

УДК 519.6

Построение квадратурных формул наивысшей алгебраической точности для интегрирования осциллирующих функций

С. Л. Ставцев

*Учреждение Российской академии наук Институт вычислительной математики РАН,
Российская Федерация*

В статье рассматривается построение квадратурных формул наивысшей алгебраической точности для вычисления интегралов с весовой осциллирующей функцией. Подробно описаны особенности численной реализации нового метода построения узлов и весов квадратурной формулы. Квадратурные формулы применены для вычисления поверхностных интегралов на поверхностях Кунса. Приведены результаты численного эксперимента, которые демонстрируют эффективность построенных квадратурных формул для интегрирования поверхностных интегралов от осциллирующих функций по сравнению с известными квадратурными формулами.

Ключевые слова: квадратурные формулы, осциллирующие функции.

В статті розглядається побудова квадратурних формул найвищої алгебраїчної точності для обчислення інтегралів з ваговою осцилюючою функцією. Детально описані особливості чисельної реалізації нового методу побудови вузлів та ваг квадратурної формули. Квадратурні формули застосовані для обчислення поверхневих інтегралів на поверхнях Кунса. Наведені результати обчислювального експерименту, які демонструють ефективність побудованих квадратурних формул для інтегрування поверхневих інтегралів від осцилюючих функцій порівняно з відомими квадратурними формулами.

Ключові слова: квадратурні формули, осцилюючі функції.

In the paper construction quadrature formula of the highest algebraic accuracy for calculation of integrals with weight oscillatory function is considered. Features of numerical realisation of a new method of construction of nodes and weights quadrature formula are in detail described. Quadrature formula is applied to calculation of integrals on Coons surfaces. Examples of numerical experiment which show efficiency constructed quadrature formula for integration of superficial integrals from oscillatory functions in comparison with known quadrature formula are resulted.

Key words: quadrature formulas, oscillatory functions.

1. Актуальность задачи

В ряде прикладных задач возникает необходимость вычисления одномерных или поверхностных интегралов, содержащих осциллирующие подынтегральные функции. С ростом частоты осциллирующей функции возрастает сложность вычисления таких интегралов, а также теряется требуемая точность вычисления таких интегралов. Исключением из данного правила являются асимптотические квадратурные формулы (см. [1]), при использовании которых точность вычислений растет с ростом частоты. Однако в этом случае для малых частот точность вычисления интегралов является низкой. Возникает необходимость построения квадратурных формул высокой точности для вычисления интегралов от осциллирующих функций для широкого спектра частот.

Для достижения поставленной цели в статье предлагается использовать квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности (или квадратурные формулы типа Гаусса), построенные для весовой функции $\cos x$ (для функции $\sin x$ формулы строятся аналогичным образом). Во-первых, по сравнению с квадратурными формулами интерполяционного типа квадратурные формулы Гаусса имеют большую точность для того же количества узлов. Во-вторых, квадратурные формулы, построенные для весовых тригонометрических функций, позволяют вычислять интегралы для широкого спектра частот с хорошей точностью.

2. Общий вид квадратурной формулы

В работе [2] предложена квадратурная формула для интегрирования осциллирующих функций на отрезке $[-1, 1]$, а именно квадратур типа

$$\int_{-1}^1 f(x)\omega(x)\cos\frac{\pi mx}{2}dx = \sum_{v=1}^s A_v \cos\frac{\pi mx_v}{2}, m=0, 1, \dots, 2s. \quad (1)$$

Для четной функции $\omega(x)$ квадратурная формула интегрирования Гауссова типа принимает вид

$$\int_0^1 \omega(x)\cos\frac{\pi mx}{2}dx = \begin{cases} \sum_{v=1}^{p/2} A_v \cos(\frac{\pi mx_v}{2}), & p - \text{нечётное}, \\ \frac{1}{2} A_{(p+1)/2} + \sum_{v=1}^{(p-1)/2} A_v \cos(\frac{\pi mx_v}{2}), & p - \text{чётное}, \end{cases} m=0, 1, \dots, p-1 \quad (2)$$

то есть формула точна для всех функций $\omega(x)\cos\frac{\pi mx}{2}$, $m=0, 1, \dots, p-1$.

Если в формуле (2) сделаем замену переменной $x = 2/\pi \arccos(t)$, то с учетом обозначения $\Omega(t) = 2/\pi \omega(2/\pi \arccos t) / \sqrt{1-t^2}$ получаем

$$\int_0^1 \Omega(t)T_m(t)dt = \begin{cases} \sum_{v=1}^{p/2} A_v T_m(t_v), & p - \text{нечётное}, \\ \frac{1}{2} A_{(p+1)/2} + \sum_{v=1}^{(p-1)/2} A_v T_m(t_v), & p - \text{чётное}, \end{cases} m=0, 1, \dots, p-1, \quad (3)$$

где $T_m(t)$ – многочлен Чебышева степени m . Соотношения (3) преобразуются в

$$\int_0^1 \Omega(t)t_m(t)dt = \begin{cases} \sum_{v=1}^{p/2} A_v t_m(t_v), & p - \text{нечётное}, \\ \frac{1}{2} A_{(p+1)/2} + \sum_{v=1}^{(p-1)/2} A_v t_m(t_v), & p - \text{чётное}, \end{cases} m=0, 1, \dots, p-1. \quad (4)$$

Для $\omega(x) \equiv 1$ (в дальнейшем ограничимся рассмотрением этого частного, но наиболее важного случая) соотношения (4) принимают вид:

$$\int_0^1 \frac{t_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} \sum_{v=1}^{p/2} A_v t_m(t_v), & p - \text{нечётное}, \\ \frac{1}{2} A_{(p+1)/2} + \sum_{v=1}^{(p-1)/2} A_v t_m(t_v), & p - \text{чётное}, \end{cases} m=0, 1, \dots, p-1. \quad (5)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению $A_v > 0$ и $t_v \in [0, 1]$, удовлетворяющих соотношениям (5). Эта задача является классической, и один

из методов решения описан в работе [3]. Однако сложность задачи состоит в том, что для вычисления интегралов с высокой точностью, когда P велико, необходимо вычислять узлы и веса с высокой точностью. С ростом P за счет округлений точность вычислений теряется. Таким образом, решение задачи, определяемой (5), требует разработки устойчивых алгоритмов.

3. Особенности вычисления узлов квадратурной формулы

Известно (см. [3]), что для четных p искомые $t_\nu \in [0,1]$, $\nu = 0, \dots, p/2$ являются корнями ортогонального полинома $L_i(x)$, для которого выполнены условия ортогональности:

$$\int_0^1 \frac{L_i(x)L_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (6)$$

Для ортогональных полиномов справедлива формула (см. [4])

$$L_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n & h_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} & h_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$h_k = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (8)$$

$$D_n = \det \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n & h_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} & h_{2n-1} \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} & h_{2n} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Если для ортогональных многочленов выполняются рекуррентные соотношения

$$xL_n(x) = \beta_{n-1}L_{n-1}(x) + \alpha_n L_n(x) + \beta_n L_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

то корни ортогонального многочлена $L_n(x)$ являются собственными значениями вещественной симметричной трёхдиагональной матрицы (см. [5])

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В (10), (11) коэффициенты α_n и β_n вычисляются по формулам

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{xL_n(x)L_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (12)$$

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{xL_n(x)L_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Подставляя в (12) формулу для полиномов (7), приходим к

$$\alpha_1 = \frac{h_1}{h_0}; \alpha_n = \frac{\Delta_n}{D_n} - \frac{\Delta_{n-1}}{D_{n-1}}; n = 2, \dots, \quad (13)$$

$$\beta_0 = 0; \beta_n = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}, n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & h_{n+1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n & h_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} & h_{2n} \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} & h_{2n+1} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, по формулам (13), (14) рассчитываем коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений (10), затем находим узлы квадратурной формулы как собственные значения матрицы (11).

Для нечетного p в силу симметричности отрезка интегрирования и функции $\omega(x)$ искомые узлы $t_\nu \in [0, 1]$, $\nu = 0, \dots, (p+1)/2$ квадратурной формулы (5) являются корнями ортогонального полинома $\tilde{L}_i(x)$ (см. [3]), для которого выполнены условия ортогональности:

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\tilde{L}_i(x)\tilde{L}_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (15)$$

Алгоритм нахождения узлов квадратурной формулы (5) для нечетных p аналогичен вышеописанному.

4. Особенности вычисления весов квадратурной формулы

Зная узлы, по формулам (5) можно найти веса квадратурной формулы. Однако в возникающей системе алгебраических уравнений элементы содержат x^n , которые при больших n сложно вычислить с хорошей точностью, поэтому прямым методом получить веса квадратурной формулы при больших n нельзя.

Для вычисления весовых коэффициентов воспользуемся формулой (см. [5]):

$$A_i = \left(L_0^2(x_i) + L_1^2(x_i) + \dots + L_{p-1}^2(x_i) \right)^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad (16)$$

где $L_i(x_i)$ – многочлены, определяемые формулой (7), x_i – корни многочлена $L_p(x)$.

Для вычисления σ представим каждый из многочленов виде

$$L_n(x) = a_n (x - x_{1,n}) (x - x_{2,n}) \dots (x - x_{n,n}), \quad (17)$$

где a_n – старший коэффициент в многочлене $L_n(x)$; $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ – корни этого многочлена. Корни многочлена находим с помощью матрицы (11).

Из формул (7) – (10) получаем

$$a_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}. \quad (18)$$

Как показывают расчеты, при $n=14$ $a_n \sim 10^{12}$, произведение остальных сомножителей в (18) является малой величиной. Поэтому непосредственное

вычисление значений многочлена $L_i(x)$ по формуле (17) дает большую погрешность.

Преобразуем (17). Из (18) с учетом формул (13) для β_i имеем

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{D_0 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_n}}, \quad (19)$$

тогда

$$L_n(x) = \frac{(x - x_{1,n})(x - x_{2,n}) \dots (x - x_{n,n})}{\sqrt{D_0 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_n}}. \quad (20)$$

Так как в числителе и знаменателе последнего соотношения стоят множители одного порядка, то вычисление значений полинома (17) по формулам (20) производится с машинной точностью.

5. Вычисление поверхностных интегралов

Квадратурная формула (1) записана для отрезка $[-1,1]$. Так как функция $\cos \frac{\pi t x}{2}$ входит как в правую, так и в левую часть квадратурной формулы, то с помощью замены переменной

$$x = \frac{2y - a - b}{b - a} \quad (21)$$

можно свести интегрирование по произвольному отрезку $[a,b]$ (по переменной y) к интегрированию по отрезку $[-1,1]$ (по переменной x) и применить формулу (1).

Более того, с помощью замены переменной можно получить квадратурные формулы для расчета контурных интегралов по гладкой кривой, заданной параметрически, а также для поверхностных интегралов при интегрировании по поверхности, принадлежащей определенному классу.

Пусть σ – поверхность, представимая в виде $\sigma = \bigcup_{i=1}^m \sigma_i$. Ограничимся случаем, когда каждая из поверхностей σ_i , $i = 1, \dots, N_M$ является поверхностью Кунса [6]. Тогда каждая из поверхностей σ_i может быть задана параметрически

$$\sigma_i = \sigma_i(\xi, \zeta), \xi \in [-1,1], \zeta \in [-1,1], \quad (22)$$

т.е. может быть получена из квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$ с помощью непрерывного отображения.

Пусть каждая из поверхностей σ_i определяется малым числом N_{L_i} гладких линий $L_{ij} \in \tilde{N}^3$, $j = 1, 2, \dots, N_{L_i}$, каждая из которых задана упорядоченным набором точек $P_{jil}(x_{P_{jil}}, y_{P_{jil}}, z_{P_{jil}})$, $l = 1, 2, \dots, N_{P_{ij}}$. Будем считать, что каждая линия L_{ij} , $j = 1, 2, \dots, N_{L_i}$ соответствует $\zeta_i = const \in [-1,1]$ из (22). Каждую из этих линий зададим параметрически и по каждой пространственной переменной аппроксимируем набором из $(N_{P_{ij}} - 1)$ кубических сплайнов:

$$L_{ij} = \bigcup_{l=1}^{N_{Pij}-1} L_{ijl}; \quad L_{ijl} : \begin{cases} x_{ijl}(t) = a_{xijl}t^3 + b_{xijl}t^2 + c_{xijl}t + d_{xijl}, \\ y_{ijl}(t) = a_{yijl}t^3 + b_{yijl}t^2 + c_{yijl}t + d_{yijl}, \\ z_{ijl}(t) = a_{zijl}t^3 + b_{zijl}t^2 + c_{zijl}t + d_{zijl}, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, N_{Pij} - 1, \quad (23)$$

где L_{ijl} – это части линии L_{ij} между точками P_{ijl} и $P_{ij(l+1)}$, $t \in [0, 1]$ – параметр. В качестве параметра t будем использовать величину $\frac{l_{ijl}(x_{Mijl}, y_{Mijl}, z_{Mijl})}{L_{ijl}}$, где L_{ijl} – длина L_{ijl} , а $l_{ijl}(x_{Mijl}, y_{Mijl}, z_{Mijl})$ – длина линии L_{ijl} от текущей точки $M(x_{Mijl}, y_{Mijl}, z_{Mijl}) \in L_{ijl}$ до начала этой линии – точки P_{ijl} .

Коэффициенты a_{xijl} , b_{xijl} , c_{xijl} , d_{xijl} , a_{yijl} , b_{yijl} , c_{yijl} , d_{yijl} , a_{zijl} , b_{zijl} , c_{zijl} , d_{zijl} из (23) определяем по координатам точек $P_{ijl}(x_{Pijl}, y_{Pijl}, z_{Pijl})$, $l = 1, 2, \dots, N_{Pij}$ и из условия гладкости кривых $L_{ij} \in C^3$, $j = 1, 2, \dots, N_{Li}$ (см. [7]).

Пусть для каждого модуля σ_i заданы параметры разбиения n_{1i} и n_{2i} , по которым построим узлы сетки на поверхности σ_i . Для заданных параметров разбиений n_{1i} и n_{2i} поверхности σ_i , полагая последовательно в (1) $s = n_{1i}$, потом $s = n_{2i}$ находим узлы и веса квадратуры (1): $x_j^{(1)} = \xi_j \in [-1, 1]$, $A_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, n_{1i}$ и $x_j^{(2)} = \zeta_j \in [-1, 1]$, $A_j^{(2)}$, $j = 1, 2, \dots, n_{2i}$.

Полагая $a = 0$, $b = N_{Pij}$, $y = t$ из (21) получаем формулу пересчета параметра

$$t = \frac{N_{Pij}}{2}x + N_{Pij}, \quad (24)$$

которую будем использовать в (23). Подставляя $x_j^{(1)} = \xi_j \in [-1, 1]$ в (24), далее параметр t в (23), имеем набор точек $K_{Lj}(x, y, z)$, $j = 1, 2, \dots, n_{1i}$, лежащих на линии L_{1i} , соответствующих нашей квадратурной формуле.

По найденным точкам строим линии \tilde{L}_{1i} , $l = 1, 2, \dots, n_{1i}$, соответствующие $\xi_l = const \in [-1, 1]$ из (22). Эти линии аппроксимируются кубическими сплайнами согласно формулам аналогичным (23), и каждая из них разбивается на n_{2i} точек $M_{ijk}(x, y, z)$, $j = 1, 2, \dots, n_{1i}$, $k = 1, 2, \dots, n_{2i}$ согласно узлам $x_k^{(2)}$, $k = 1, 2, \dots, n_{2i}$. Эти точки будем использовать в качестве узлов квадратурной формулы для вычисления поверхностного интеграла

$$\iint_{\sigma_i} \cos(g(x, y, z))f(x, y, z)d\sigma = \sum_{j=1}^{n_{1i}} \sum_{k=1}^{n_{2i}} A_j^{(1)} A_k^{(2)} \cos(M_{ijk}). \quad (25)$$

6. Вычислительные эксперименты

Исследования проведем на примере вычисления интеграла

$$I(x_0, y_0, z_0) = \iint_{\sigma} \frac{\cos(kr)}{r} d\sigma, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

где σ – часть плоскости $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. Пример сетки на поверхности σ для $n_{1i} = n_{2i} = 10$, $i = 1$ приведен на рисунке 1. Узлы находятся в вершинах рамок.

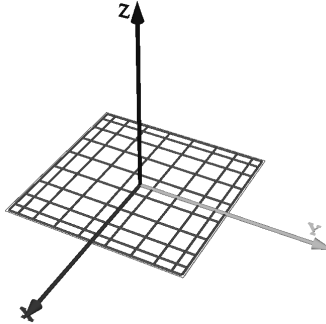


Рис. 1. Сетка на квадрате, $n_{1i} = n_{2i} = 10$, $i = 1$.

Введем величину $n_k = \frac{k}{2\pi}$, которая пропорциональна k и равна числу длин волн, укладывающихся на единицу измерения нашей области. Положим $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.3$ и будем вычислять интеграл $I(x_0, y_0, z_0)$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. В таблице 1 приведены результаты расчетов, показывающие сколько точек необходимо взять на стороне квадрата σ , чтобы вычислить интеграл с точностью ε с помощью той или иной квадратуры.

Расчеты проводились:

1) по формуле прямоугольников (число точек разбиения по каждому направлению m_{rc});

2) по формулам интерполяционного типа, точным для полиномов 5-ой степени с весом $\exp(i(kx + \varphi))$ (в нашем случае $\varphi = 0$), с автоматическим выбором шага (формулы подробно описаны в работе [8]) (число точек разбиения по каждому направлению m_{in});

3) по квадратурной формуле(1), узлы и веса которой рассчитывались по описанными в этой работе методам ($n_{1i} = n_{2i} = m_{ar}$, $i = 1$).

В качестве точного значения интеграла принималось значение, полученное на мелкой сетке, всеми вышеперечисленными методами. При этом точность вычисления интеграла составляла $\varepsilon = 10^{-10}$.

Из таблицы 1 видно, что для вычисления интеграла с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ по формулам прямоугольников требуется брать 25-35 точек на длину волны. Причем с ростом частоты число точек, приходящихся на длину волны нужно брать больше, так как значение самого интеграла уменьшается: при $n_k = 1.0$ $I(0, 0, 0.3) = -1.66537576457$, а при $n_k = 20.0$ $I(0, 0, 0.3) = -1.0126399876 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, зависимость m_{rc} от k нелинейная, с большим коэффициентом пропорциональности, что приводит к значительным временным затратам на вычисление интегралов с большими k .

Табл. 1. Число точек, необходимых для вычисления интеграла по квадрату с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

n_k	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	15.0	20.0
m_{rc}	26	54	149	67	206	120	172	319	511	693
m_{in}	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
m_{ar}	5	7	9	9	11	12	14	17	24	29

Заметим, что если при переходе от формулы (1) к (2) мы не будем учитывать четность функции $\omega(x)$ и задачу построения узлов квадратуры сведем к классической задаче вычисления корней многочленов с весовой функцией $(1-t^2)^{-1/2}$ на отрезке $[-1,1]$, то при обратном переходе к переменной x формулы (1), получим формулу прямоугольников. Как видно из таблицы 1, эти формулы не эффективны при вычислении поверхностных интегралов.

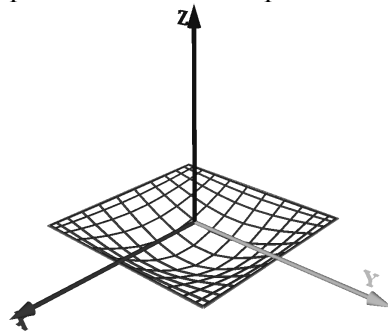


Рис. 2. Неравномерная сетка на изогнутой поверхности σ , $n_1 = n_2 = 10$.

Преимуществом квадратурной формулы интерполяционного типа 5-го порядка является независимость m_{in} от величины n_k . Число узлов квадратурной формулы определяется только точностью интерполяции функции $1/r$ в интеграле $I(x_0, y_0, z_0)$. Однако, из-за того, что тригонометрическая функция является весовой, эту квадратурную формулу нельзя применить к вычислению интеграла по поверхности Кунса.

Преимущества квадратуры (1) состоят в зависимости $m_{ar} = O(n_k^\alpha)$, $\alpha < 1$, а также в малом коэффициенте в этой зависимости. Из данных Табл. 1 видно, что (при больших n_k) достаточно взять два узла на единицу длины волны, чтобы получить хорошую точность вычисления интеграла. При малых n_k число необходимых узлов интегрирования определяется функцией $1/r$.

Исследуем зависимость числа узлов разбиения от точности вычисления интеграла $I(x_0, y_0, z_0)$ для разных квадратурных формул при фиксированном значении $n_k = 8.0$ на поверхности σ , изображенной на рисунке 2.

Результаты исследований для формулы прямоугольников (m_{rc}) и квадратурной формулы (1) – m_{ar} приведены в таблице 2.

Табл. 2. Число точек, необходимых для вычисления интеграла по поверхности σ при $n_k = 8.0$

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
m_{rc}	9	12	18	26	76	262	833	2635
m_{ar}	9	10	12	14	15	15	16	16

Как видно из данных таблицы 2, квадратурные формулы (1) имеют хорошую сходимость, а также подтверждают теоретические исследования, проведенные в работе [2].

7. Выводы

Таким образом, в статье приведены устойчивые алгоритмы вычисления узлов и весов квадратурной формулы наивысшей алгебраической точности, применительно к вычислению поверхностных интегралов от сильно осциллирующих функций. Эти квадратурные формулы позволят избежать сильного увеличения числа элементов дискретизации с ростом волнового числа при решении трехмерных задач дифракции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00115-а, № 09-01-00565-а, № 10-01-00757-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М. Численные методы, – М.: Наука, 1987. – 630 с.
2. Смелов В.В. О квадратурах типа Гаусса, основанных на тригонометрических базисах. // Российский журнал вычислительной математики и математического моделирования. № 3 – Москва, 2008. – С. 265-281.
3. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1959. – 328с.
4. Геронимус Я.Л. Теория ортогональных многочленов. – Л.: ГИТТЛ, 1950, – 164с.
5. Тыртышников Е.Е. Модификации методов вычисления интегралов Чебышева-Лагерра и Гаусса-Лежандра. // ЖВМиМФ, Т.44, №7, 2004г – С. 1187-1195.
6. Coons S. A. Surface patches and B-splines curves. // Computer Aided Geometric Design (CAGD), ed. Barnhill and Riesenfeld – Orlando: Academic Press, 1974. P. 1-16.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456с.
8. О.В.Брушлинская, Л.Г.Васильева. Набор стандартных программ приближенного вычисления однократных интегралов с автоматическим выбором шага. // Сб. «Численный анализ на ФОРТРАНе», вып.8, Изд-во МГУ, 1974.