УДК 517.44:004

Рекурентні методи обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі з підвищеною точністю обчислення в арифметиці з фіксованою комою

В. І. Волинець
Вінницький інститут економіки ТНЕУ, Україна

Запропоновано рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі, точність яких в 4 та 3p, де p – кількість ітерацій обчислення, рази вища за точність відомих методів обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі відповідно при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді та збігається з точністю відомих методів для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Ключові слова: *рекурентні методи обчислення, дискретні перетворення Фур'є та Хартлі, точність обчислення, арифметика з фіксованою комою.*

Предложены рекуррентные методы вычисления обыкновенных и модифицированных дискретных преобразований Фурье и Хартли, точность которых в 4 и 3p, где p – количество итераций вычисления, раза выше точности известных методов вычисления обыкновенных модифицированных дискретных преобразований Фурье и Хартли соответственно при реализации в арифметике с фиксированной запятой для случая усечения результатов операций умножения в дополнительном коде и совпадает с точностью известных методов для других случаев аппроксимации результатов операций умножения.

Ключевые слова: *рекуррентные методы вычисления, дискретные преобразования Фурье и Хартли, точность вычисления, арифметика с фиксированной запятой.*

The recurrent methods of calculation of usual and modified discrete Fourier and Hartley transforms are offered, exactness of which in 4 and 3p, where p is an amount of iterations of calculation, times higher than exactness of the known methods of calculation of usual and modified discrete Fourier and Hartley transforms accordingly during realization in fixed-point arithmetic for the case of truncating of results of operations of multiplications in an additional code and coincides with exactness of the known methods for other cases of approximation of results of operations of multiplication.

Key words: *recurrent methods of calculation, discrete Fourier and Hartley transforms, exactness of calculation, fixed-point arithmetic.*

1. Постановка проблеми

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) на ковзних або стрибкових інтервалах [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення ДПФ і ДПХ, оскільки

© Волинець В. І., 2010

рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. В роботі [4] проведений аналіз точності відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу [5], при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, а в якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення значень перетворень.

2. Невирішені проблеми та ціль роботи

Отримані в роботі [4] значення СКЗ похибок обчислення значень перетворень показали, що точність відомих рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді в 4 та 3р, де р – кількість ітерацій обчислення, рази нижча за точність обчислення для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді при обчисленні звичайних та модифікованих ДПФ і ДПХ відповідно, в той час, як доповняльний код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

Метою цієї роботи є запропонувати рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ, точність яких в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді збігалась би з точністю відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді та не знижувалась для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

3. Результати дослідження

Аналіз відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ показав, що на СКЗ похибок обчислення значень перетворень в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді суттєво впливають середні значення похибок результатів операцій множення. Для усунення їх впливу пропонується обчислювати звичайні та модифіковані ДПФ за такими рекурентними виразами:

$$\operatorname{Re} F_{i+m}(k) = \left[\operatorname{Re} F_i(k) + \sum_{n=0}^{]m/2[-1} \Delta x(n+i) \cdot \cos\frac{2\pi nk}{N} - \sum_{n=]m/2[}^{m-1} \Delta x(n+i) \cdot (-\cos\frac{2\pi nk}{N}) \right] \times$$

$$\times \cos\frac{2\pi mk}{N} -$$

$$
-\left[\operatorname{Im}F_i(k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\sin\frac{2\pi nk}{N})-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\sin\frac{2\pi nk}{N}\right]\times
$$

$$
\times\sin\frac{2\pi nk}{N}\,, \tag{1}
$$

$$
\operatorname{Im}F_{i+m}(k)=\left[\operatorname{Re}F_i(k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\cos\frac{2\pi nk}{N}-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\cos\frac{2\pi nk}{N})\right]\times
$$

$$
\times\sin\frac{2\pi nk}{N}-
$$

$$
-\left[\operatorname{Im}F_i(k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\sin\frac{2\pi nk}{N})-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\sin\frac{2\pi nk}{N}\right]\times
$$

$$
\times(-\cos\frac{2\pi nk}{N})\,, \tag{2}
$$

$$
\operatorname{Re}F^{\grave{i}}_{i+m}(k)=\operatorname{Re}F^{\grave{i}}_{i}(k)+(-1)^l\cdot\left(\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right]-\right.
$$

$$
\left.-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot(-\cos\frac{2\pi(n+i)k}{N})\right]\right), \tag{3}
$$

$$
\operatorname{Im}F^{\grave{i}}_{i+m}(k)=\operatorname{Im}F^{\grave{i}}_{i}(k)+(-1)^l\left(\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot(-\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N})\right]-\right.
$$

$$
\left.-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot\sin\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right]\right., \tag{4}
$$

де $F_{i+m}(k)$, $F_i(k)$ – комплексні значення звичайного ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $F^{\grave{i}}_{i+m}(k)$, $F^{\grave{i}}_{i}(k)$ – комплексні значення модифікованого ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; Re та Im – дійсні та уявні частини комплексних значень ДПФ; $i=0,1,2,\ldots$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу; m – зсув поточного інтервалу вхідного сигналу відносно попереднього інтервалу в межах від 1 до $N-1$; $k=\overline{0,N-1}$ – номер значення перетворення; $\Delta x(n+i)=[x(N+n+i)-x(n+i)]$; $x(n)$ – значення вхідного сигналу; N – розмір перетворення; $]m/2[$ – значення $m/2$, округлене до більшого цілого; l – номер ітерації обчислення.

Звичайні та модифіковані ДПХ пропонується обчислювати за такими рекурентними виразами:

$$
H_{i+m}(k)=\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N})\right]\times
$$

$$\times\cos\frac{2\pi mk}{N}-$$

$$-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N})\right]\times$$

$$\times\sin\frac{2\pi mk}{N}, \qquad (5)$$

$$H_{i+m}(N-k)=\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N})\right]\times$$

$$\times\sin\frac{2\pi mk}{N}-$$

$$-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N})\right]\times$$

$$\times(-\cos\frac{2\pi mk}{N}), \qquad (6)$$

$$H^{\grave{\imath}}_{i+m}(k)=H^{\grave{\imath}}_{i}(k)+(-1)^l\cdot\left(\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)k}{N})\right]\right), \qquad (7)$$

$$H^{\grave{\imath}}_{i+m}(N-k)=H^{\grave{\imath}}_{i}(N-k)+(-1)^l\left(\sum_{n=0}^{]m/2[-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)(N-k)}{N}\right]-\right.$$

$$-\sum_{n=]m/2[}^{m-1}\Delta x(n+i)\cdot\left[(-1)^l\cdot(-\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)(N-k)}{N})\right], \qquad (8)$$

де $H_{i+m}(k)$, $H_i(k)$ – значення звичайного ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $H^{\grave{\imath}}_{i+m}(k)$, $H^{\grave{\imath}}_{i+m}(N-k)$ – значення модифікованого ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (8) є операції додавання (віднімання) та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання (віднімання), відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Порівнюючи відповідні вирази обчислення ДПФ і ДПХ, видно, що вони мають однакову структуру щодо складу та порядку операцій множення, внаслідок чого точність обчислення цих виразів однакова. Враховуючи це, аналіз точності можна провести лише для рекурентних методів обчислення звичайного та модифікованого ДПФ, котрі ґрунтуються на таких рекурентних виразах в комплексній формі [3]:

$$F_{i+m}(k) = \left[F_i(k) + \sum_{n=0}^{]m/2[-1} \Delta x(n+i) \cdot W^{nk} - \sum_{n=0}^{]m/2[-1} \Delta x(n+i) \cdot (-W^{nk}) \right] \cdot W^{-mk}, \quad (9)$$

$$F^{\text{м}}_{i+m}(k) = F^{\text{м}}_{i}(k) + (-1)^l \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{]m/2[-1} \Delta x(n+i) \cdot \left[(-1)^l \cdot W^{(n+i)k} \right] - \sum_{n=]m/2[}^{m-1} \Delta x(n+i) \cdot \left[(-1)^l \cdot (-W^{(n+i)k}) \right] \right), \quad (10)$$

де $W = \exp(-j2\pi / N)$, $j = \sqrt{-1}$.

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (9) – (10) можуть бути отримані рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого ДПФ в арифметиці з фіксованою комою, котрі мають такий вигляд:

$$E\left(F_{i+m}(k)\right) = \left[E\left(F_i(k)\right) + \sum_{n=1}^{]m/2[-1} E_{\text{мк}1_{n,i+m}} - \sum_{n=]m/2[}^{m-1} E_{\text{мк}1_{n,i+m}} \right] \cdot W^{-mk} + E_{\text{мк}2_{i+m}}, \quad (11)$$

$$E\left(F^{\text{м}}_{i+m}(k)\right) = E\left(F^{\text{м}}_{i}(k)\right) + (-1)^l \left(\sum_{n=1}^{]m/2[} E_{\text{мк}1_{n,i+m}} - \sum_{n=]m/2[+1}^{m} E_{\text{мк}1_{n,i+m}} \right), \quad (12)$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X; $E_{\text{мк}1_{n,i+m}}$ – похибка n-ої операції комплексного множення першого виду (множення дійсного та комплексного значень) на $(i+m)$-му інтервалі; $E_{\text{мк}2_{i+m}}$ – похибка операції комплексного множення другого виду (множення двох комплексних значень) на $(i+m)$-му інтервалі.

Ітераційні вирази для визначення похибок обчислення звичайного та модифікованого ДПФ, котрі отримуються на підставі рекурентних виразів обчислення ДПФ (9) – (10) та визначення похибок обчислення ДПФ (11) – (12) з урахуванням того, що для $i = 0$ $E\left(F_0(k)\right) = E\left(F^{\text{м}}_0(k)\right) = 0$, визначаються як

$$E\left(F_{pm}(k)\right) = \sum_{l=1}^{p} W^{-(p-l+1)mk} \left(\sum_{n=1}^{]m/2[-1} E_{\text{мк}1_{n,lm}} - \sum_{n=]m/2[}^{m-1} E_{\text{мк}1_{n,lm}} \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{p} E_{\text{мк}2_{lm}} W^{-(p-l)mk}, \quad (13)$$

$$E\left(F^{\text{м}}_{pm}(k)\right) = \sum_{l=1}^{p} (-1)^l \left(\sum_{n=1}^{]m/2[} E_{\text{мк}1_{n,lm}} - \sum_{n=]m/2[+1}^{m} E_{\text{мк}1_{n,lm}} \right), \quad (14)$$

де p – кількість ітерацій обчислення.

Дисперсії похибок обчислення за виразами (13) – (14) визначаються як

$$D\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right] = p\cdot(m-1)\cdot D\left[E_{мк1}\right] + p\cdot D\left[E_{мк2}\right], \qquad (15)$$

$$D\left[E\left(F_{pm}^{м}(k)\right)\right] = p\cdot m\cdot D\left[E_{мк1}\right], \qquad (16)$$

де $D[X]$ – дисперсія значення X.

Середні значення похибок обчислення за виразами (13) – (14) визначаються як

$$M\left[E\left(F_{pm}(k)\right)\right] = \begin{cases} M\left[E_{мк2}\right]\cdot\sum\limits_{l=1}^{p} W^{-(p-l)mk}, \ m - \text{непарні} \\ -M\left[E_{мк1}\right]\cdot\sum\limits_{l=1}^{p} W^{-(p-l+1)mk} + \\ +M\left[E_{мк2}\right]\cdot\sum\limits_{l=1}^{p} W^{-(p-l)mk}, \ m - \text{парні} \end{cases}, \qquad (17)$$

$$M\left[E\left(F_{pm}^{м}(k)\right)\right] = \begin{cases} 0, m - \text{парне} \\ 0, m - \text{непарне}, p - \text{парне} \\ -M\left[E_{мк1}\right], m - \text{непарне}, p - \text{непарне} \end{cases}, \qquad (18)$$

де $M[X]$ – математичне очікування значення X.

При визначенні дисперсій та середніх значень похибок обчислення ДПФ слід врахувати, що похибка операції комплексного множення першого виду , яка визначається як $E_{мк1} = E_{мд_1} + jE_{мд_2}$, має $D\left[E_{мк1}\right] = 2D\left[E_{мд}\right]$ та $M\left[E_{мк1}\right] = M\left[E_{мд}\right] + jM\left[E_{мд}\right]$ і відповідно $\left|M\left[E_{мк1}\right]\right|^2 = 2M^2\left[E_{мд}\right]$, де $E_{мд}$ – похибка операції дійсного множення, а похибка операції комплексного множення другого виду, яка відповідно до реалізації комплексного множення в виразах (1) – (4) визначається як $E_{мк2} = (E_{мд_1} - E_{мд_2}) + j(E_{мд_3} - E_{мд_4})$, має $D\left[E_{мк2}\right] = 4D\left[E_{мд}\right]$ та $M\left[E_{мк2}\right] = 0$, внаслідок чого середнє значення похибки обчислення за виразом (17) для непарних m дорівнює нулю.

Оскільки на практиці можна вибрати такі значення m та p, для яких середні значення похибок обчислення за виразами (17) – (18) дорівнюють нулю, то СКЗ похибок обчислення, які визначаються за виразом $M\left[|X|^2\right] = D[X] + |M[X]|^2$, де X – похибка обчислення, будуть визначатись лише значеннями їхніх дисперсій.

В табл. 1 наведено СКЗ похибок обчислення звичайного та модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах ($m = 1$) на основі відомих [3] та запропонованих в цій роботі рекурентних методів з врахуванням значень дисперсій та середніх значень похибок операцій множення для $(b+1)$-розрядних чисел, які наведено в [3]. Оскільки СКЗ похибок обчислення значень $F(k)$ ДПФ дорівнюють сумі СКЗ похибок обчислення двох значень $H(k)$ та $H(N-k)$ ДПХ, то для рекурентних методів обчислення ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в табл. 1 значення.

4. Висновки

Порівнюючи точність відомих та запропонованих в цій роботі рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ, можна зробити такі основні висновки:

1. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ і ДПХ в середньому в 4 рази вища за точність відомих рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді.
2. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ в 3p рази вища за точність відомих рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді.
3. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в доповняльному коді збігається з точністю відомих методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді.
4. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ збігається з точністю відомих методів обчислення ДПФ і ДПХ для випадків округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та доповняльному коді та усікання результатів операцій множення в прямому та оберненому коді.

Табл. 1. Точність методів обчислення ДПФ на ковзних інтервалах

Вид апроксимації результатів операцій множення	Методи обчислення	СКЗ похибки обчислення	
		звичайних ДПФ	модифікованих ДПФ
округлення прямого, оберненого та доповняльного коду	відомі та запропоновані	$\frac{p}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{p}{6}\cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	відомі та запропоновані	$\frac{4p}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{2p}{3}\cdot 2^{-2b}$
усікання доповняльного коду	відомі	$\left[p/3+\left\lvert\sum_{l=1}^{p} W^{-(p-l)k}\right\rvert^2\right]\cdot 2^{-2b}$, $k=\overline{0,N-1}$ $\frac{4p}{3}\cdot 2^{-2b}$, усереднене по k	$\left[\frac{p}{6}+\frac{p^2}{2}\right]\cdot 2^{-2b}$
	запропоновані	$\frac{p}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{p}{6}\cdot 2^{-2b}$

Таким чином, запропоновані рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих ДПФ і ДПХ дозволяють підвищити точність обчислення в чотири та 3p рази, де p – кількість ітерацій обчислення, при обчисленні відповідно звичайних та модифікованих ДПФ і ДПХ для випадку апроксимації результатів операцій множення в доповняльному коді, забезпечуючи таку ж точність обчислення як і відомі рекурентні методи обчислення для інших випадків апроксимації результатів операцій множення, що дозволяє використовувати запропоновані методи на практиці для різних кодів та видів апроксимації результатів операцій множення, зокрема, для випадку усікання доповняльного коду, оскільки доповняльний код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Волынец В.И.; Винницкий политехн. ин-т. – Винница, 1988. – 14 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 18.11.88; № 2898 – Ук88.
2. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 1. – С. 77-80.
4. Волинець В.І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – Т. 1, № 2. – С. 171-175.
5. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.

Надійшла - 24.06.2010