УДК 519.853.32

Построение математической модели и решение задачи оптимального размещения кругов в кольце

И. В. Лимаренко
Институт проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАНУ, Украина

Данная статья посвящена решению задачи минимизации отклонения центра тяжести кольца системой кругов. Построена математическая модель задачи и проведен анализ ее особенностей. Описан один из методов решения задачи. Разработан программный модуль, приведены численные результаты его работы.

Ключевые слова: *математическая модель, стратегия решения, оптимизация, отклонение центра тяжести, Ф-функция, круг, кольцо.*

Стаття присвячена розв'язанню задачи мінімізації відхилення центру ваги кільця набором кіл. Побудовано математичну модель задачі та проведено аналіз її властивостей. Описаний один з методів розв'язання задачі. Розроблено програмний модуль, наведені числові результати його роботи.

Ключові слова: *математична модель, стратегія розв'язання, оптимізація, відхилення центру тяжіння, Ф-функція, коло, кільце.*

This article is devoted to a solution of a minimization problem of a center of gravity displacement of a ring with a set of circles. A mathematical model is built and an analysis of its characteristics is carried out. One of solution methods of the problem is described. An application software is developed, the numerical results are given.

Key words: *mathematical model, solution strategics, optimization, center of gravity displacement, Ф-function, circle, ring.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Во многих сферах промышленности возникает острая необходимость разместить набор объектов внутри области, гарантируя устойчивость центра тяжести системы. Это и определило цель работы - минимизировать отклонение центра тяжести кольца, смещенного системой кругов.

2. Истоки исследования авторов

Количество работ, посвященных проблеме устойчивости центра тяжести системы геометрических объектов, не велико, и каждая, например [1-2], описывает размещение в области определенной пространственной формы, в основном, прямоугольной.

Для аналитического описания взаимодействия пары геометрических объектов настоящая работа опирается на метод Ф-функций [3].

3. Постановка задачи и цели работы

Пусть задано кольцо $H = \{(x, y) \in R^2 : r^2 \le x^2 + y^2 \le \rho^2\}$ и набор кругов $C_i = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le r_i^2\}$, $i \in I \quad, I = 1,2,..., n$, массой m_i каждый. Кроме того, заданы минимально допустимые расстояния l_{ij} для каждой пары кругов

C_i и C_j, $i, j \in I$, $i \neq j$. Расположение круга C_i, $i \in I$, в пространстве R^2 определяется координатами его центра $u_i = (x_i, \ y_i)$. Обозначим его трансляцию на вектор через $C_i(u_i)$. Тогда, $u = (u_1, \ u_2, \ ..., \ u_n) \in R^{2n}$ - вектор размещения всех кругов.

Необходимо найти такой вектор $u = (u_1, \ u_2, \ ..., \ u_n) \in R^{2n}$, который обеспечивает минимальное смещение центра тяжести системы, относительно центра тяжести кольца, с учетом минимально допустимых расстояний l_{ij}, $i, j \in I$, $i \neq j$ между размещаемыми кругами.

4. Математическая модель задачи и ее особенности

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$F(u^*) = \min\left(\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\right)^2 + \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\right)^2\right), \quad u \in W \subset R^{2n} \tag{1}$$

$$W = \left\{u \in R^{2n} : \Phi_i^{CH}(u_i) \geq 0, \Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) \geq 0, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j\right\}, \tag{2}$$

где

$$\Phi_i^{CH}(u_i) = \min(f_i(u_i), F_i(u_i)) \tag{3}$$

$$f_i(u_i) = (\rho - r_i)^2 - x_i^2 - y_i^2$$

$$F_i(u_i) = x_i^2 + y_i^2 - (r + r_i)^2$$

$$\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j + l_{ij})^2 \tag{4}$$

Условие $\Phi_i^{CH}(u_i) \geq 0$ обеспечивает принадлежность круга кольцу, а $\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j) \geq 0$ - размещение кругов на минимально допустимом расстоянии друг от друга.

Математическая модель задачи имеет такие особенности:

1. Функция цели и функции, входящие в состав ограничений, квадратичные.
2. Если $F(u^*) = 0$, то гарантировано достигнут глобальный экстремум.

3. Функции $\Phi_i^{CH}(u_i)$, $\Phi_{ij}^{CC}(u_i,u_j)$ - выпуклые, из чего следует, что задача (1)-(2) – обратно выпукла [4].
4. Область W определяется системой (2), состоящей из $\frac{1}{2}n(n-1)+2n$ неравенств.
5. Задача является многоэкстремальной и NP-трудной [5].
6. Локальные экстремумы, в общем случае, нестрогие. Это легко показать, вращая систему кругов относительно центра кольца, что даст нам такое же отклонение центра тяжести при других параметрах размещения объектов.

5. Метод решения задачи

Решение задачи (1)-(2) включает в себя два этапа. Первый – нахождение стартовой точки, второй – непосредственно минимизация смещения центра тяжести.

Следует отметить, что нахождение стартовой точки в задачах с ограничениями такого рода – довольно сложная задача. Для ее решения используем следующую стратегию:

1. Случайным образом размещаем круги, так, чтобы параметры размещения каждого принадлежали кольцу (рис.1).
2. Полагаем радиусы кругов переменными. Решаем задачу оптимального размещения, цель которой – выполнение условий принадлежности кругов (в общем случае, радиусы меньше заданных) области и размещение их на минимально допустимом расстоянии друг от друга.
   Для решения задачи вводим дополнительную переменную χ. И решаем следующую задачу оптимизации:
$$\max \chi$$
$$\begin{cases} \Phi_i^{CH}(u_i,r_i)-\chi \ge 0, \quad i \in I \\ \Phi_{ij}^{CC}(u_i,u_j,r_i,r_j)-\chi \ge 0, \quad i,j \in I, \quad i \ne j \\ r_i \ge 0, \quad i \in I \\ \chi \le 0 \end{cases}$$
   Для стартовой точки находим значение χ_0:
$$\chi_0 = \min\left(\Phi_i^{CH}\left(u_i^0\right), \Phi_{ij}^{CC}\left(u_i^0,u_j^0\right)\right),$$
где u^0 - исходный вектор размещения кругов.

   Очевидно, что если $\chi_0 \ge 0$, то условия размещения объектов в области выполнены.

   В результате, выполняются условия размещения для всех объектов, но радиусы кругов могут быть уменьшены (рис.2).
3. Для того чтобы восстановить радиусы кругов (рис.3) решаем следующую задачу:

$$
\max \sum_{i=1}^{n} r_i
$$

$$
\begin{cases}
\Phi_i^{CH}\left(u_i, r_i\right) \geq 0, \quad i \in I \\
\Phi_{ij}^{CC}\left(u_i, u_j, r_i, r_j\right) \geq 0, \quad i, j \in I, \quad i \neq j \\
r_i^0 - r_i \geq 0, \quad i \in I
\end{cases}
$$

где r_i^0, $i \in I$ - заданные радиусы кругов.

После чего, находим решение задачи (1)-(2) (рис.4).

Для решения всех трех задач нелинейной оптимизации используем одну из модификаций метода Зойтендейка [6].

6. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

Размещаем 20 кругов в кольцо с радиусами $\rho = 50$, $r = 27$. Исходные параметры размещения, метрические характеристики и минимально допустимые расстояния между кругами приведены в таблице 1.

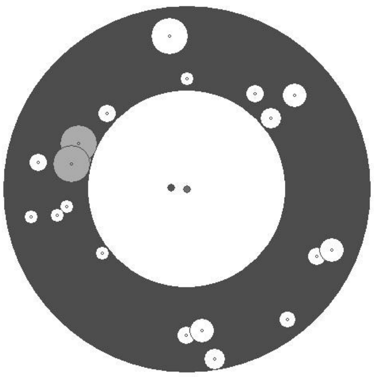

Рис.1. Случайное размещение кругов в кольце

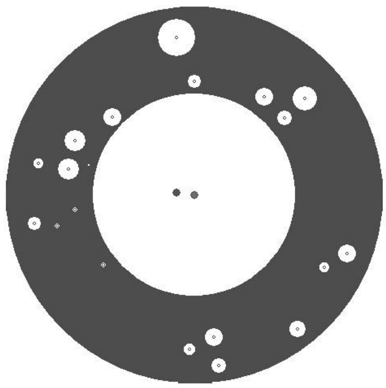

Рис.2. Размещение кругов в кольце на минимально допустимом расстоянии

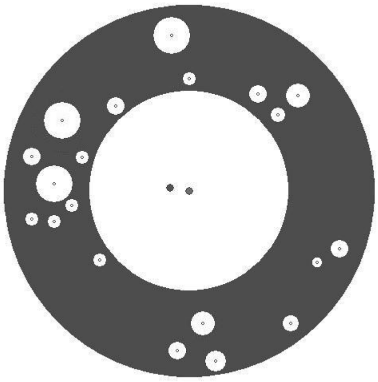

Рис.3. Восстановление радиусов кругов

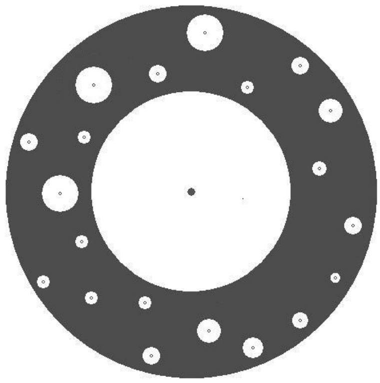

Рис.4. Решение задачи минимизации центра тяжести системы.

Табл.1. Исходные данные

№	Исходные параметры размещения		Радиусы кругов	Минимально допустимые расстояния																			
	X	Y		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	39.75	-10.06	3.6	0.0	0.0	0.8	0.4	0.8	1.2	1.6	0.8	1.2	1.2	0.0	1.2	0.8	1.2	0.8	0.8	0.8	1.6	1.6	0.8
2	-0.89	39.99	2.6	0.0	0.0	0.8	1.6	1.2	0.4	0.4	1.6	0.4	0.8	0.0	0.0	1.2	0.0	0.8	1.2	0.8	0.4	1.2	1.2
3	30.19	15.64	2.0	0.8	0.8	0.0	1.2	1.2	1.6	0.4	0.0	0.8	1.6	0.8	1.2	0.8	0.4	0.8	1.2	1.6	0.4	0.8	1.6
4	-25.40	25.51	4.4	0.4	1.6	1.2	0.0	0.4	0.0	0.0	1.2	0.8	1.2	0.0	1.2	0.8	0.4	0.8	0.8	0.0	0.0	0.4	0.8
5	22.59	36.59	4.4	0.8	1.2	1.2	0.4	0.0	1.2	0.8	1.6	0.8	0.4	0.8	0.8	1.2	0.8	0.8	0.0	0.8	0.0	0.4	0.4
6	0.07	24.83	3.8	1.2	0.4	1.6	0.0	1.2	0.0	0.8	0.4	0.4	0.8	0.0	1.2	1.6	0.0	1.6	0.8	1.6	1.6	1.2	0.0
7	20.06	39.16	2.0	1.6	0.4	0.4	0.0	0.8	0.8	0.0	0.0	0.4	1.2	0.4	0.8	1.6	0.0	1.6	0.8	0.8	1.6	0.4	1.2
8	3.82	-31.77	4.4	0.8	1.6	0.0	1.2	1.6	0.4	0.0	0.0	1.6	0.4	0.4	1.6	0.4	0.4	1.2	0.4	1.2	0.4	1.6	1.2
9	-8.78	-32.85	2.8	1.2	0.4	0.8	0.8	0.8	0.4	0.4	1.6	0.0	0.0	1.2	0.0	0.4	0.0	0.4	0.8	0.0	1.2	0.0	0.0
10	-25.03	-19.94	2.0	1.2	0.8	1.6	1.2	0.4	0.8	1.2	0.4	0.0	0.0	0.0	0.4	1.2	1.2	0.0	0.0	0.8	1.6	1.6	0.8
11	24.11	-17.85	3.6	0.0	0.0	0.8	0.0	0.8	0.0	0.4	0.4	1.2	0.0	0.0	0.4	1.6	1.6	1.2	1.6	0.4	0.0	0.0	0.0
12	2.41	-31.91	2.8	1.2	0.0	1.2	1.2	0.8	1.2	0.8	1.6	0.0	0.4	0.4	0.0	1.6	0.0	1.2	0.4	1.6	0.0	0.4	0.8
13	14.92	-44.57	2.0	0.8	1.2	0.8	0.8	1.2	1.6	1.6	0.4	0.4	1.2	1.6	1.6	0.0	0.8	1.6	1.6	0.4	0.0	0.8	0.8
14	18.66	-39.85	2.0	1.2	0.0	0.4	0.4	0.8	0.0	0.0	0.4	0.0	1.2	1.6	0.0	0.8	0.0	1.2	1.2	0.8	1.6	1.6	1.6
15	-12.77	-31.51	2.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1.6	1.6	1.2	0.4	0.0	1.2	1.2	1.6	1.2	0.0	0.8	0.4	1.2	0.4	0.4
16	-17.92	35.76	2.0	0.8	1.2	1.2	0.8	0.0	0.8	0.8	0.4	0.8	0.0	1.6	0.4	1.6	1.2	0.8	0.0	1.6	1.6	0.8	0.0
17	37.63	-10.23	3.6	0.8	0.8	1.6	0.0	0.8	1.6	0.8	1.2	0.0	0.8	0.4	1.6	0.4	0.8	0.4	1.6	0.0	0.8	0.0	1.2
18	-25.90	10.63	2.2	1.6	0.4	0.4	0.0	0.0	1.6	1.6	0.4	1.2	1.6	0.0	0.0	0.0	1.6	1.2	1.6	0.8	0.0	0.8	0.0
19	27.68	-4.19	2.0	1.6	1.2	0.8	0.4	0.4	1.2	0.4	1.6	0.0	1.6	0.0	0.4	0.8	1.6	0.4	0.8	0.0	0.8	0.0	1.6
20	19.82	25.12	2.0	0.8	1.2	1.6	0.8	0.4	0.0	1.2	1.2	0.0	0.8	0.0	0.8	0.8	1.6	0.4	0.0	1.2	0.0	1.6	0.0

В результате, смещение центра тяжести системы составило 0,0000102.

Задача разрешима и для большего количества размещаемых кругов, но размер таблицы исходных данных, в таком случае, был бы чрезвычайно велик.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Построена математическая модель и исследованы особенности задачи минимизации смещения центра тяжести кольца набором кругов. Разработана общая методика решения задачи.

Результаты исследований могут служить основанием для решения подобной задачи, где в качестве размещаемых объектов выступают прямоугольники, а та, в свою очередь, является предпосылкой аналогичной в 3-мерном пространстве: оптимальное размещение прямоугольных параллелепипедов в цилиндрическом кольце, с учетом цента тяжести. Последняя широко применяется в строительстве и ракетостроении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов А.Н., Гиревка Ф.И., Заворотный Д.Г. Определение смещение центра тяжести груза в железнодорожном вагоне // ПИКАД – 2007. - № 3. – С.34-35.
2. Токарь К.Е. Автоматизированная система контроля технических параметров и положение центра тяжести контейнеров при погрузке в порту // ПИКАД – 2008. - № 3. – С.76-78.
3. Stoyan Yu.G. Ф-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. - № 8. - С.112-117.
4. Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А. Метод линеаризации для обратно-выпуклого программирования // Кибернетика и системный анализ. – 1995. - № 6. - С.86-97.
5. Пападимитриу Х., Стайнглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – Москва: Мир, 1985. – 512 с.
6. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 176 с.

Надійшла - 18.05.2010.