

УДК 532.546

## К задаче об обтекании шпунта Жуковского

Э. Н. Береславский

*Санкт-Петербургский государственный университет  
гражданской авиации, Россия*

В гидродинамической постановке решается задача о плоской установившейся фильтрации под шпунтом Жуковского через орошаемый массив, подстилаемый сильнопроницаемым пластом, не содержащим напорных грунтовых вод, левая полубесконечная часть кровли которого моделируется непроницаемым включением. Рассматривается случай течения, когда скорость обтекания на конце шпунта равна бесконечности, что приводит к двулиственности области комплексной скорости. Приводятся результаты численных расчетов и анализ влияния всех физических параметров модели на фильтрационные характеристики. Дается сравнение с известными результатами.

**Ключевые слова:** *фильтрация, грунтовые воды, шпунт Жуковского, область комплексной скорости, конформные отображения, метод Полубариновой-Кочиной.*

У гідродинамічній постановці вирішуване завдання про плоску сталу фільтрацію під шпунтом Жуковського через зрошуваний масив, що підстилає сильнопроницаємим пластом, що не містить напірних ґрунтових вод, ліва напівбесконечна частина крівлі якого моделюється непроникним включенням. Розглядається випадок течії, коли швидкість обтікання на кінці шпунта дорівнює нескінченності, що приводить до двулістності області комплексної швидкості. Наводяться результати чисельних розрахунків і аналіз впливу всіх фізичних параметрів моделі на фільтраційні характеристики. Дається порівняння з відомими результатами.

**Ключові слова:** *фільтрація, ґрунтові води, шпунт Жуковського, область комплексної швидкості, конформні відображення, метод Полубариної-Кочиної.*

In hydrodynamic statement a solved task about the flat established seepage under a rabbit Zhukovsky through the irrigated array spread by strongly nontight layer, not containing pressure head ground waters, the left semi-infinite which part of a roof is modelled by impenetrable initialization. The current case when velocity of a flow on the rabbit extremity is equal to infinity that leads to two-sheeted area of complex velocity is considered. Outcomes of numerical calculations and the analysis of effect of all physical parametres of model on filtration performances are cited. Comparison of the outcomes with known results is given.

**Key words:** *a seepage, ground waters, Zhukovsky rabbit, area of complex velocity, conformal mappings, method of Polubarinova-Kochina.*

**Введение**

В работах [1, 2] рассматривалось течение жидкости под шпунтом Жуковского через грунтовой массив в нижележащий сильнопроницаемый водоносный пласт, не содержащий напорные подземные воды, левая полубесконечная часть кровли которого представляет собой непроницаемый участок. Для изучения инфильтрации на свободную поверхность предполагалась конечная величина скорости обтекания на конце шпунта, удовлетворяющая условию  $0 < |\mathbf{v}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) – равномерная интенсивность инфильтрации, отнесенная к коэффициенту фильтрации грунта  $\kappa = \text{const}$ .

Ниже исследуется случай, когда скорость обтекания на конце шпунта принимается равной бесконечности. Это обстоятельство приводит к тому, что

соответствующая область комплексной скорости течения становится двулистной. Для решения возникающей в этом случае смешанной краевой многопараметрической задачи теории аналитических функций используется метод Полубариновой-Кочиной [3, 4], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [5], а также разработанные [6-8] способы конформного отображения для областей специального вида, весьма характерных для задач подземной гидромеханики [9-11].

### 1. Постановка задачи

Рассматривается плоское установившееся движение несжимаемой жидкости под шпунтом Жуковского через слой грунта мощности  $T$  в нижележащий сильнопроницаемый водоносный пласт, не содержащий напорных подземных вод, при этом левая полубесконечная часть кровли пласта  $BC$  моделируется водонепроницаемым включением (рис. 1).

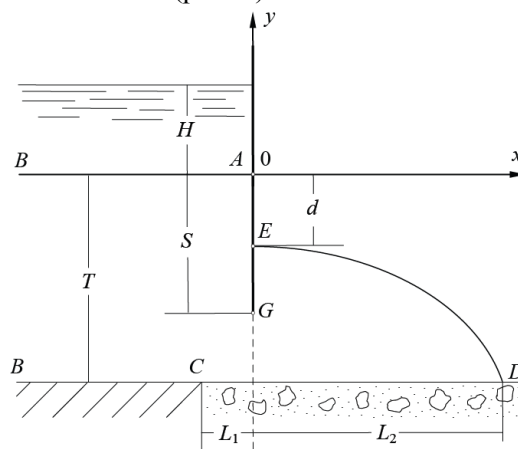


Рис. 1. Схема течения

Также, как в [1, 2], грунтовые воды, обтекая шпунт  $AGE$ , поднимаются за ним на некоторую высоту  $GE$  и образуют свободную поверхность  $ED$ , на которую поступают инфильтрационные воды с равномерной интенсивностью  $\varepsilon$ . Однако в отличие от [1, 2], где скорость обтекания была ограничена сверху величиной  $\varepsilon$ , теперь она принимается равной бесконечности, что приводит к неоднозначности соответствующей области комплексной скорости, которая принимает вид, изображенный на рис. 2. Предполагается, что граница бьефа  $AB$  горизонтальна, грунт однороден и изотропен, а течение подчиняется закону Дарси с коэффициентом фильтрации  $\kappa$ .

Введем комплексный потенциал  $\omega = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi$  — потенциал скорости,  $\psi$  — функция тока, и комплексную координату  $z = x + iy$ , отнесенные соответственно к  $\kappa T$  и  $T$ . Задача состоит в определении положения кривой депрессии  $DE$  при следующих краевых условиях:

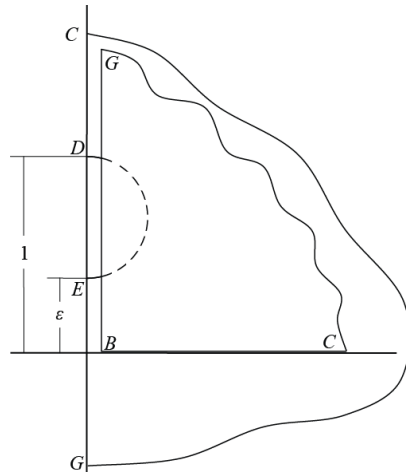


Рис. 2. Область комплексной скорости

$$\begin{aligned}
 AB: y=0, \phi=-H; \quad BC: y=-T, \psi=0; \quad CD: y=-T, \phi=0; \\
 DE: \phi=-y-T, \psi=\varepsilon x+Q; \quad AE: x=0, \psi=Q,
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $Q$  – фильтрационный расход. Нахождение высоты  $GE$  поднятия воды за шпунтом, т. е. величины  $S-d$ , а также расположение абсциссы точки  $D$ , т. е. проекции свободной поверхности  $L_2$ , представляют известный практический интерес. Действующий напор  $H$ , глубина грунтового массива  $T$ , длина шпунта  $S$ , фильтрационный расход  $Q$  наряду с величинами  $L_1$ , фиксирующей расположение конца непроницаемого включения, и  $\varepsilon$  считаются заданными.

## 2. Построение решения

Обратимся к области комплексной скорости  $w$  (рис. 2), соответствующей краевым условиям (1.1). Эта область является двулистной, причем в бесконечно удаленной точке  $C$  при обходе границы осуществляется переход на второй лист римановой поверхности. Учитывая то, что данная область принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [12], удобно при конформном отображении в качестве канонической области взять прямоугольник плоскости  $\tau$  [13] (рис. 3):

$$0 < \operatorname{Re} \tau < 1/2, \quad 0 < \operatorname{Im} \tau < \rho/2, \quad \rho(k) = K'/K, \quad K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода при модуле  $k$  [14]. Применяя разработанную [6–8, 13] методику построения отображающих функций для многоугольников подобного типа, найдем

$$\begin{aligned}
 w = \sqrt{\varepsilon} i \frac{X^+(\tau)}{X^-(\tau)}, \quad \sqrt{\varepsilon} = \operatorname{th} \pi(\rho/2 + \alpha - \beta), \\
 X^\pm(\tau) = (1 + \sqrt{\varepsilon}) \vartheta_2(\tau - i\alpha) \vartheta_2(\tau + i\beta) \exp(\pi i) \pm \\
 \pm (1 - \sqrt{\varepsilon}) \vartheta_2(\tau + i\alpha) \vartheta_2(\tau - i\beta) \exp(-\pi i),
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где для функции  $\mathcal{G}_2$  и других тета-функций придерживаемся записи, принятой в [15],  $\alpha, \beta$  ( $0 < \alpha < \beta < \rho/2$ ) – некоторые подходящие постоянные.

Для решения задачи используем метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [3, 4, 16, 17], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [5]. Вводятся функции  $\omega(\tau)$  и  $z(\tau)$ , конформно отображающие прямоугольник плоскости  $\tau$  на области  $\omega$  и  $z$  (соответствие точек указано на рис. 3), а также функции  $d\omega/d\tau$  и  $dz/d\tau$ .

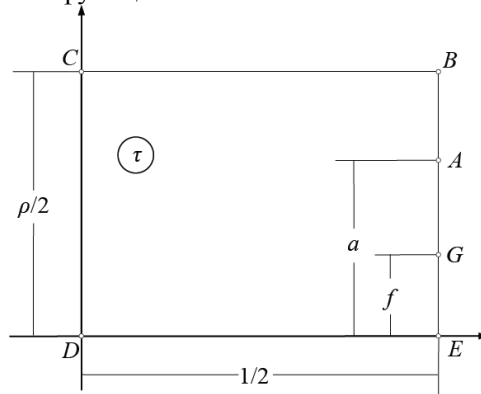


Рис. 3. Область вспомогательной параметрической переменной

Определяя показатели этих функций около особых точек [3, 16, 17] и принимая во внимание соотношение (2.1), приходим к зависимостям

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\sqrt{\varepsilon} M \frac{X^+(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = iM \frac{X^-(\tau)}{\Delta(\tau)},$$

$$\Delta(\tau) = \mathcal{G}_0^2(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k) \sqrt{1 - (1 - k'^2 a'^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}, \quad a' = \operatorname{sn}(2Ka, k'),$$

где  $M$  – масштабная постоянная моделирования,  $a$  – неизвестная ордината точки  $A$  в плоскости  $\tau$  (рис. 3). Можно проверить, что функции (2.2) удовлетворяют граничным условиям (1.1), сформулированным в терминах функций  $d\omega/d\tau$  и  $dz/d\tau$ , и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Для определения постоянной моделирования  $M$  воспользуемся следующим соображением [18]. Когда точка  $\tau$  обходит точку  $B$  по четверти окружности  $C$ , достаточно малого радиуса  $r$  (т. е. когда вектор  $0.5(1 + \rho i) - \tau = r \exp(i\varphi)$  поворачивается, изменяя свой аргумент от  $-0.5\pi$  до  $-\pi$ ), соответствующая точка  $z$  должна перейти с луча  $AB$  на луч  $BC$  и приращение  $z$  должно мало отличаться от величины  $-iT$ :

$$\Delta z = -iT + O(r),$$

где  $O(r)$  – бесконечно малая при  $r \rightarrow 0$ .

С другой стороны, при таком малом приращении  $\Delta\tau$  приращение функции  $z$  также будет малым (в нашем случае представление  $dz/d\tau$  (2.2) непрерывно в точке  $\tau = 0.5(1 + \rho i)$ ). Следовательно,

$$\Delta z = \int_{C_r} \frac{dz}{d\tau} \Big|_{AB} d\tau = -iM \frac{\sqrt{1-\varepsilon} \mathcal{G}_3(i\gamma) \mathcal{G}_0(i\alpha) \mathcal{G}_0(i\beta) \exp(\pi(0.5\rho + \alpha - \beta - \gamma))}{\sqrt{1-A^2} \mathcal{G}_0^3(0) \mathcal{G}_3^2(0)} + O(r).$$

Приравнявая выражения, полученные для  $\Delta z$ , и переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$ , находим

$$M = \frac{\sqrt{1-A^2} \exp(\pi(\beta + \gamma - \alpha - 0.5\rho)) \mathcal{G}_0^2(0) \mathcal{G}_3^2(0)}{\sqrt{1-\varepsilon} \mathcal{G}_0(i\alpha) \mathcal{G}_0(i\beta) \mathcal{G}_3(i\gamma)} T.$$

Запись представлений (2.2) для разных участков границы области  $\tau$  с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения  $z$ .

В результате получаем выражения для основных геометрических и фильтрационных характеристик

$$\begin{aligned} M \int_a^f Y_{AG}(t) dt = S, \quad \sqrt{\varepsilon} M \int_a^{\rho/2} \Psi_{AB}(t) dt = Q, \\ L_2 - M \int_0^{\rho/2} X_{CD}(t) dt = L_1, \quad -M \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} \int_0^{1/2} \Phi_{BC}(t) dt = H, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$L_2 = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{1/2} \Psi_{DE}(t) dt, \quad d = T - \sqrt{\varepsilon} M \int_0^{1/2} \Phi_{DE}(t) dt, \quad (2.4)$$

а также координат точек свободной поверхности  $DE$  ( $0 \leq t \leq 1/2$ )

$$x_{DE}(t) = L_2 + M \int_0^t X_{DE}(t) dt, \quad y_{DE} = -T + M \int_0^t Y_{DE}(t) dt. \quad (2.5)$$

Полагая в уравнениях (2.5)  $t = 1/2$ , находим другие выражения для искомым размеров  $L_2$  и  $d$ :

$$L_2 = x_{DE}(1/2), \quad d = -y_{DE}(1/2), \quad (2.6)$$

которые наряду с (2.4) служат контролем вычислений. В формулах (2.3)–(2.6) подынтегральные функции – выражения правых частей равенств (2.2) на соответствующих участках контура плоскости  $\tau$ .

### 3. Предельный случай. Случай отсутствия непроницаемого включения ( $L_1 = \infty$ )

Остановимся на случае отсутствия непроницаемого участка на кровле нижележащего пласта, который на всем своем протяжении становится сильнопроницаемым дренирующим слоем. Анализ показывает, что если зафиксировать все физические параметры схемы, то по мере уменьшения ширины непроницаемого включения точка  $C$ , перемещаясь вдоль границы области движения  $z$  в направлении точки  $B$ , сливается с ней на бесконечности при  $\beta = \beta_* = \rho/2$ . При таком значении  $\beta$  второй лист римановой поверхности в

области комплексной скорости  $w$  вырождается в точку  $B$ , которая наряду с точкой  $A$ , переходят в некоторые конечные точки (для которых  $v_y = H/T > 1$ ) на нижний лист, а прямоугольник плоскости вспомогательной переменной  $\tau$  превращается в полуполосу  $0 < \operatorname{Re} \tau < 1/2$ ,  $0 < \operatorname{Im} \tau < \infty$ , поскольку модуль  $k = 0$ ,  $k' = 1$ ,  $K' = \infty$  и, следовательно,  $\rho = \infty$ .

Решение для этого предельного случая получается из формул (2.1), (2.2), если в них положить  $k = 0$  и учесть, что при  $\beta = \beta_*$  [14, 15]

$$\mathcal{G}_2(\tau + i\rho/2) = q^{-1/4} \exp(-\pi i) \mathcal{G}_3(\tau), \quad \mathcal{G}_2(\tau - i\rho/2) = q^{-1/4} \exp(\pi i) \mathcal{G}_3(\tau)$$

$$\mathcal{G}_3(\tau) = k'^{-1/2} \mathcal{G}_0(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k), \quad q = \exp(-\pi\rho),$$

при этом ряды для тета-функций  $\mathcal{G}_0$  и  $\mathcal{G}_2$  обрываются на первых членах, а эллиптические функции вырождаются в тригонометрические. В результате получаем выражения (2.1) и (2.2) в виде

$$w = i(\cos \pi\tau + i\varepsilon \sin \pi\tau) \exp(\pi i), \quad \operatorname{th} \pi\alpha = \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -M \frac{\cos \pi\tau + i\varepsilon \sin \pi\tau}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\alpha - \sin^2 \pi\tau}}, \quad (3.2)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = iM \frac{\exp(\pi i)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\alpha - \sin^2 \pi\tau}}.$$

#### 4. Обсуждение численных результатов

Представления (2.1)–(2.6) содержат ряд неизвестных постоянных:  $a'$  (или ординату  $a$  прообраза точки  $A$  в плоскости  $\tau$ ), ординату  $f$  прообраза точки  $G$  в плоскости  $\tau$ , один из параметров конформного отображения  $\alpha$  или  $\beta$ , которые связаны условием  $0 < \alpha < f < a < \beta < \rho/2$ , и модуль  $k$  ( $0 < k < 1$ ). Для их определения служит система четырех уравнений (2.3) при заданных значениях  $S$ ,  $Q$ ,  $L_1$  и  $H$ , а также условие  $1/w|_G = 0$ , которое означает, что на острие шпунта  $G$  скорость обращается в бесконечность. После определения неизвестных постоянных отображения находятся искомые размеры  $L_2$  и  $d$  по формулам (2.4) и, наконец, по формулам (2.5) рассчитываются координаты точек свободной поверхности  $DE$ . Следует отметить, что решение задачи реализуется в небольшом диапазоне изменения физических параметров  $H$  и  $T$ .

На рис. 4 изображена картина течения, рассчитанная при

$$\varepsilon = 0.5, L_1 = -4.5, Q = 6.5, H = 5, T = 5 \text{ и } S = 4. \quad (4.1)$$

Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $\varepsilon$ ,  $L_1$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $T$  и  $S$  на размеры  $L_2$  и  $d$  приведены в табл. 1 и 2. В каждом из блоков таблиц варьируется (в допустимом диапазоне) один из указанных параметров, а значения остальных фиксируются согласно равенствам (4.1). На рис. 5–10 представлены зависимости  $L_2$  и  $d$  от параметров схемы.

Анализ данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

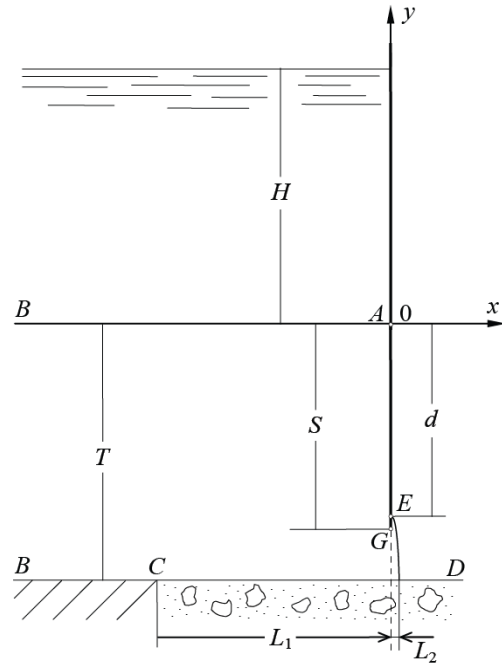


Рис. 4. Картина течения

Увеличение интенсивности инфильтрации и напора и уменьшение ширины непроницаемого включения, фильтрационного расхода, длины шпунта, а также мощности пласта приводят к уменьшению величины  $d$ , т. е. росту ординаты точки  $G$  выхода кривой депрессии из-под шпунта. Так, согласно данным табл. 1 изменению параметров  $L_1$  и  $Q$  всего в 1.1 раза сопутствует уменьшение величины  $d$  на 6.5%. При этом наибольшее влияние на величину  $d$  оказывает мощность пласта  $T$ : табл. 2 показывает, что при возрастании параметра  $T$  почти в то же (в 1.2) число раз значение  $d$  увеличивается уже на 33.8%. Видно, что величина  $d$  изменяется линейно по  $T$ .

Табл.1. Данные расчетов

$\varepsilon$	$d$	$L_2$	$L_1$	$d$	$L_2$	$Q$	$d$	$L_2$
0.1	3.8459	0.0521	4.35	3.9227	0.1169	6.47	3.7091	0.0292
0.3	3.8059	0.0476	4.40	3.8639	0.0869	6.50	3.7584	0.0432
0.5	3.7584	0.0432	4.45	3.8070	0.0637	6.56	3.8441	0.0669
0.7	3.7092	0.0386	4.50	3.7584	0.0432	6.62	3.9060	0.0869
0.9	3.6602	0.0341	4.58	3.6814	0.0194	6.67	3.9485	0.0997

Табл.2. Данные расчетов

$H$	$d$	$L_2$	$S$	$d$	$L_2$	$T$	$d$
4.9	3.7888	0.0291	3.4	3.1621	0.0509	4.2	2.9584
5.0	3.7584	0.0432	3.8	3.5356	0.0469	4.6	3.3584
5.5	3.6312	0.1984	4.2	3.9763	0.0385	4.8	3.5584
6.0	3.5566	0.3959	4.6	4.4090	0.0255	5.0	3.7584
6.5	3.5136	0.6189	4.8	4.6572	0.0158	5.2	3.9584

Что касается величины  $L_2$ , то она увеличивается с ростом напора и фильтрационного расхода и уменьшается с ростом интенсивности инфильтрации, ширины непроницаемого участка и длины шпунта. Наиболее существенное влияние на параметр  $L_2$  оказывает ширина  $L_1$  и напор  $H$ : варьирование значений  $L_1$  и  $H$  всего в 1.1 и 1.3 раза изменяют проекцию свободной поверхности на 502.4 и 2025.3% соответственно. Так же, как в [1, 2], влияние мощности массива не очень сказывается на величине  $L_2$ : варьирование параметра  $T$  для тех расчетных вариантов, которые содержатся в правой части табл. 2, приводит к одному и тому же значению  $L_2 = 0.0432$ .

Наблюдается различное поведение размеров  $d$  и  $L_2$  при варьировании параметров  $H$  и  $S$  (табл. 2) и, напротив, одинаковый качественный характер зависимостей этих размеров от  $\varepsilon$  и  $L_1$  (табл. 1): уменьшение последних приводит к уменьшению ординаты точки выхода грунтовой воды из-под шпунта и увеличению проекции кривой депрессии.

Сравнение результатов со случаем, когда скорость обтекания на конце шпунта конечна и  $0 < |v| < \varepsilon$  [1, 2], показывает, что зависимости  $d$  и  $L_2$  от параметров  $H$ ,  $S$  и  $T$  здесь качественно подобны за исключением зависимости от интенсивности инфильтрации, что совершенно естественно с физической точки зрения. Расчеты показали, что в отличие от случая конечной величины скорости обтекания, для которого точка  $C$  (правый конец непроницаемого включения) всегда находится правее оси ординат, в предлагаемой модели она лежит слева от начала координат.

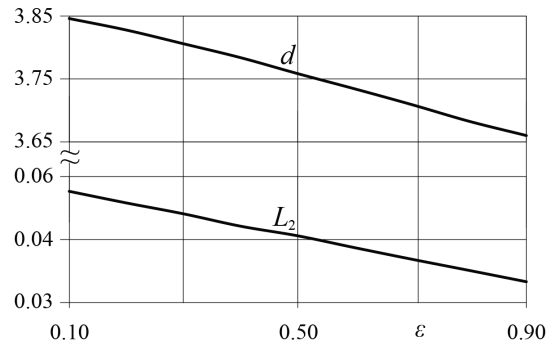


Рис. 5

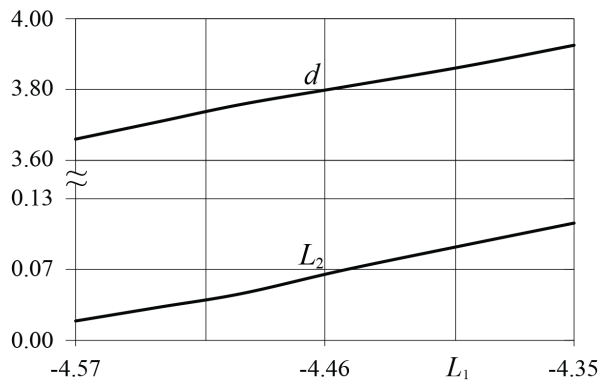


Рис. 6



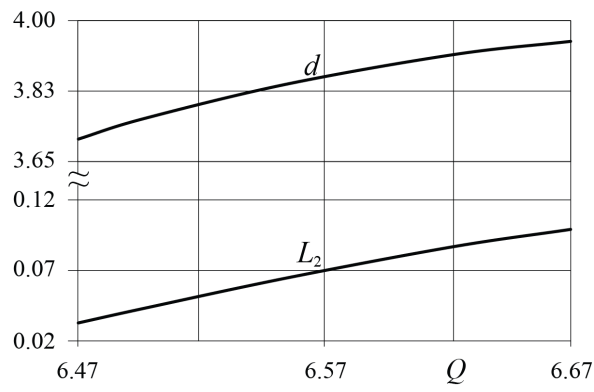


Рис. 7

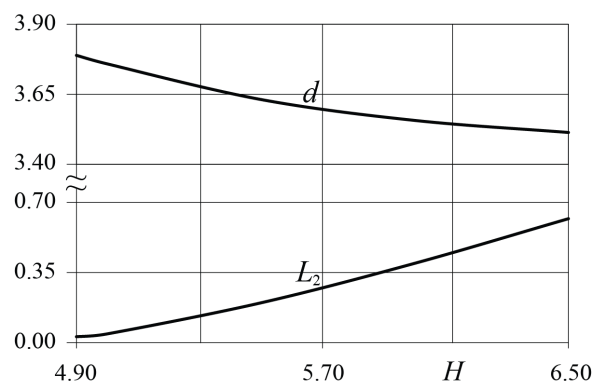


Рис. 8

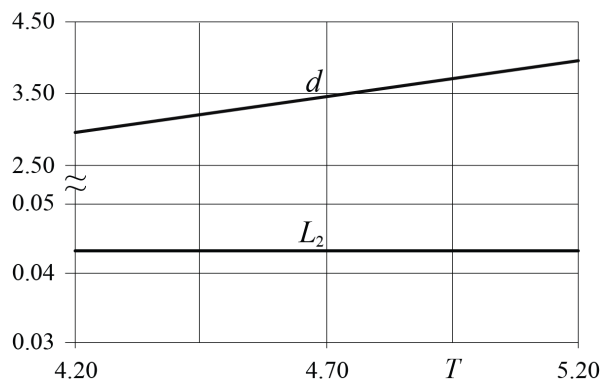


Рис. 9

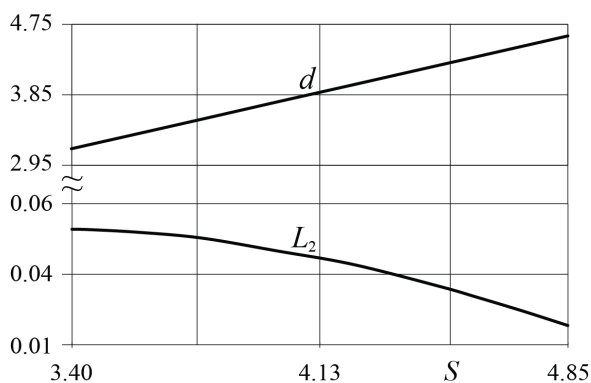


Рис. 10

## ЛИТЕРАТУРА

1. Береславский Э.Н., Пестерев Е.В. Об одном случае обтекания шпунта Жуковского // Вестник ХНТУ. 2009. №2(35). – С.84-88.
2. Береславский Э.Н., Александрова Л.А., Пестерев Е.В. Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Мат. моделирование. 2010. Том 22. №6. – С.27-37.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-е изд. - М.: Наука, 1977. – 664с.
4. Кочина П.Я. Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации. - М.: Наука, 1991. – 351с.
5. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. - М.; - Л.: Гостехиздат, 1950. – 436с.
6. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т.33. №3. – С.296-301.
7. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. 2009. Т.428. №4. – С.439-443.
8. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом / Дифференц. уравнения. 2010. Т.46. №4. – С.459-466.
9. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. №5. – С.3-7.
10. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. №5. – С.9-17.
11. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч.1. Препринт №567. - М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. – 122с.
12. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. - М.: Изд-во Иностран. Лит., 1963. – 406с.

13. Береславский Э.Н. О конформном отображении некоторых многоугольников на прямоугольник // Изв. Вузов. Математика. 1980. №5. – С.3-7.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. – 1108с.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Т.2. - М.: Физматиз, 1963. – 515с.
16. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). - М.: Наука, 1969. – 545с.
17. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. - М.: Наука, 1970. Т.2. – С.585-648.
18. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. – 688с.