УДК 517.929

Исследование методом усреднения колебания струны под действием многочастотных возмущений с запаздыванием

Я. И. Бигун

Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Украина

Изучается начальная задача для гиперболического уравнения и многоточастотной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Обосновано метод усреднения по быстрым переменным на конечном промежутке времени в том случае, когда система в процессе эволюции проходит через резонансы. Получено оценку погрешности метода усреднения, явно зависящая от малого параметра.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, метод усреднения, медленные и бысрые переменные, резонанс, малый параметр, запаздывание.*

Вивчається початкова задача для гіперболічного рівняння і багаточастотної системи диференціальних рівнянь із запізненням. Обгрунтовано метод усереднення за швидкими змінними на скінченному проміжку часу у тому випадку, коли система в процесі еволюції проходить через резонанси. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра.

Ключові слова: *диференціальне рівняння, метод усереднення, повільні і швидкі змінні, резонанс, малий параметр, запізнення.*

The object of this paper is to study a system of hyperbolic differential equation and a multifrequence differential equation systems with delay. An averaging method over fast variables is justified for system which, in the process evolution pass through the resonances particles. For error of the method, an estimate evidently dependent of a small parameter is obtained.

Key words: *differential equation, averaging method, resonance, small parameter, delay.*

Введение

Системы уравнений с распределенными и сосредоточенными параметрами являются математическими моделями в задачах управления колебаниями, в которых один из объектов описывается волновым уравнением, а другой – дифференциальными уравнениями с обычными производными [1], струнного генератора и усилителя с запаздыванием [2], при управлении динамической системой под действием высокочастотных возмущений [3], в задачах химии и биологии [4] и многих других.

В данной работе рассматривается обоснование метода усреднения для возмущенного уравнения колебаний бесконечной струны, источником возмущений для которого является система обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными. Запаздывание в системе линейное и задается с помощью линейно преобразованных аргументов $\theta_\nu \tau$, $\theta_\nu \in (0,1)$, $\nu = 1,...,r.$ Случай постоянного запаздывания изучался в работах [5, 6].

Исследование многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a, \varphi),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + B(\tau, a, \varphi),$$

где $a \in D$, D − ограниченная область в R^n, $\varphi \in T^m, m \geq 2$, T^m − m-мерный тор, ε − достаточно малый параметр. Исследование многочастотных систем усложнено резонансными явлениями, условие которых $(k, \omega, (\tau, x)) \approx 0$, где целочисленный вектор $k \neq 0$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Метод усреднения по быстрым переменным для двухчастотной системы с аналитическими правыми частями обоснован В.И. Арнольдом [7]. Для широких классов многочастотных систем с начальными и краевыми условиями метод усреднения обоснован в работах А.М. Самойленко и Р.И. Петришина [8], используя при этом оценки соответствующих осцилляционных интегралов. Там же получены оценки погрешности метода усреднения, явно зависящие от малого параметра. Аналогичные задачи для одно- и многочастотных систем с постоянным и переменным запаздыванием изучены в работах А.М. Самойленко и Я.И. Бигуна [9-11] и др.

1. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, \tau, a_\Theta, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a_\Theta, \varphi_\Theta),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, a_\Theta, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

где $\tau \in [0,1]$, $x \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in T^m$, $m \geq 1$, $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$, $\varphi_\Theta(\tau) = (\varphi(\theta_1 \tau), ..., \varphi(\theta_r.\tau))$, $0 < \theta_1 < ... \leq \theta_r \leq 1$. Функция f и вектор-функции A и B 2π-периодические по каждой из компонент векторной переменной φ_Θ. Переменные $a_1, ..., a_n$ называются медленными, а $\varphi_1, ..., \varphi_m$ − быстрыми.

Зададим для системы (1) и (2) начальные условия:

$$u(x,0,\varepsilon) = v(x), \frac{\partial u(x,0,\varepsilon)}{\partial \tau} = w(x), x \in R; a(0,\varepsilon) = y, \varphi(0,\varepsilon) = \psi. \tag{3}$$

Особенностью системы с запаздыванием (1), (2) является то, что начальное множество при $\tau = 0$ состоит из единственной точки $\{0\}$.

Соответствующая (1), (2) усредненная по быстрым переменным система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + f_0(x,\tau,\overline{a}_\Theta), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{a}}{d\tau} &= A_0(\tau,\overline{a}_\Theta), \\ \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B_0(\tau,\overline{a}_\Theta), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$F_0(x,\tau,a_\Theta) = \frac{1}{(2\pi)^{rm}} \int_0^{2\pi} F(x,\tau,a_\Theta,\varphi_\Theta)d\varphi_\Theta, \quad F = (f, A, B).$$

Система (4), (5) хотя и является системой с запаздыванием, но существенно проще по сравнению с (1), (2), поскольку уравнения для $\overline{u}$ и $\overline{a}$ не зависят от быстрых переменных $\overline{\varphi}_\Theta$, а также то, что решение первого и третьего уравнений сводится к интегрированию.

Задача состоит в доказательстве существования решения задачи (1)-(3) и оценке отклонения решений этой задачи от решения усредненной задачи при $(x,\tau,\varepsilon) \in R \times [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$, если ε_0 достаточно мало и начальные условия для них совпадают.

2. Условие резонанса

Условием резонанса частот в системе (2) в точке τ является выполнение равенства

$$\gamma_l(\tau) := \sum_{\nu=1}^{\tau} \theta_\nu (l^{(\nu)}, \omega(\theta_\nu \tau)) = 0, \quad l^{(\nu)} \in \mathrm{Z}^{\mathrm{m}}, \ \|l\| := \sum_{\nu=1}^{r} \left\| l^{(\nu)} \right\| \neq 0. \tag{6}$$

Учет влияния запаздывания в условии (6) является существенным. Проиллюстрируем это на следующем примере

$$\begin{aligned} &\frac{da(\tau)}{d\tau} = \cos(k\varphi_1(\tau) + l\varphi_2(\theta\tau)), \\ &\frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon}, \quad \frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = \frac{1+\tau}{\varepsilon} \\ &a(0) = y, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Если $2k = l = 2, \quad \theta = 0.5,$ то $\gamma_{kl}(\tau) = 0.5\tau$ и в системе имеет место резонанс при $\tau = 0$. При этом $k\varphi_1(\tau,\varepsilon) + l\varphi_2(\theta\tau,\varepsilon) = \dfrac{3\tau^2}{4\varepsilon}$ и

$$a(1,\varepsilon) - \overline{a}(1) = \int_0^1 \cos\frac{3\tau^2}{4\varepsilon} d\tau = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \int_0^{\sqrt{3}/2\sqrt{\varepsilon}} \cos z^2 d\tau = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

что следует из оценки интеграла Френеля [12].

Если же $8k = -l = 8$, $\theta = 0.5$, то $\gamma_{kl}(\tau) = -3$, то в системе отсутствует резонанс и $a(1,\varepsilon) - \bar{a}(1) = \int_0^1 \cos\frac{3\tau}{4\varepsilon} d\tau = \frac{4\varepsilon}{3}\sin\frac{3}{4\varepsilon} = O(\varepsilon)$. В каждом из случаев $k\omega_1(\tau) + l\omega_2(\tau) = k(1+2\tau) \neq 0$, так что система не проходит через резонанс, характерный для обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания.

Условием незастревания системы уравнений (2) в малой окрестности резонанса (6) является выполнение условия [9,13]

$$V(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, L], \tag{7}$$

где $V(\tau)$ − определитель Вронского порядка rm, построенный по системе функций $\{\omega(\theta_1\tau),...,\omega(\theta_r\tau)\}$. Например, для $m = 1$ и $r = 3$ имеем:

$$V(\tau) = \begin{vmatrix} \omega(z_1) & \omega(z_2) & \omega(z_3) \\ \theta_1 \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} & \theta_2 \frac{d\omega(z_2)}{dz_2} & \theta_3 \frac{d\omega(z_3)}{dz_3} \\ \theta_1^2 \frac{d^2\omega(z_1)}{dz_1^2} & \theta_2^2 \frac{d^2\omega(z_2)}{dz_2^2} & \theta_3^2 \frac{d^2\omega(z_3)}{dz_3^2} \end{vmatrix}, \ z_\nu = \theta_\nu \tau, \quad \nu = 1,2,3.$$

В случае одночастотной системы с одним линейно преобразованным аргументом

$$V(\tau) = \begin{vmatrix} \omega(\tau) & \omega(z) \\ \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} & \theta\frac{d\omega(z)}{d\tau} \end{vmatrix}, \ z = \theta\tau, \quad \theta \in (0,1).$$

3. Обоснование метода усреднения

Покажем, что при выполнении условия незастревания в резонансе (7), аналогичного условию А в работе В.И. Арнольда [7], и некоторых условий гладкости правых частей системы уравнений (1), (2) отклонение решений системы уравнений (1), (2) и усредненной системы (3), (4) при всех $\tau \in [0, L]$, $x \in R$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ не превышает $c_1\varepsilon^\alpha$, $\alpha = (rm)^{-1}$, $c_1 > 0$ и не зависит от ε_0.

Теорема 1. Пусть:

1) функции $\omega_\nu \in C^{rm-1}[0, L]$, $\nu = 1,...m$, и выполняется условие (7);

2) $F \in C^1_{\tau, a_\Theta}(G, \sigma_1)$, $G = R \times [0, L] \times D^r \times R^{rm}$, постоянной $\sigma_1 > 0$ ограничены вектор-функции F и ее производные по τ, a_Θ;

3) в области $G_1 = R \times [0, L] \times D^r$ для коэффициентов Фурье вектор-функции F выполняется неравенство

$$\sum_{l\neq 0}[\sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu \left\|l^{(\nu)}\right\| \sup_{G_1}\left\|F_l(\tau,a_\Theta)\right\| + \frac{1}{\|l\|_\Theta}(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial F_l(\tau,a_\Theta)}{\partial\tau}\right\| + \sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu \sup\left\|\frac{\partial F_l(\tau,a_\Theta)}{\partial a^{(\nu)}}\right\|)] \le \sigma_2;$$

4) $v\in C^2(R)$, $\quad w\in C^1(R)$;

5) существует единственное решение $\overline{a}=\overline{a}(\tau,y)$, $\quad \overline{a}(0,y)=y$, $\quad y\in D_0\subset D$, первого из уравнений (5), которое лежит в D вместе с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для достаточно малого $\varepsilon_0>0$ существует единственное решение системы уравнений (1), (2) такое, что для всех $(x,\tau,\varepsilon)\in R\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ выполняется неравенство

$$\left\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,y)\right\|+\left\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\right\|+\left|u(x,\tau,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau)\right|\le c_1\varepsilon^{\alpha}, \qquad (8)$$

где $\alpha=(rm)^{-1}$, $c_1>0$ и не зависит от ε, если начальные условия для решений совпадают при $\tau=0$.

Доказательство. Используя формулу Даламбера из уравнений (1) и (3) имеем:

$$u(x,\tau,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau)=\frac{1}{2c}\int_0^{\tau}\int_{x-c(\tau-s)}^{x+c(\tau-s)}[f(z,s,a_\Theta(s,y,\psi,\varepsilon),\varphi_\Theta(s,y,\psi,\varepsilon))-$$

$$-f_0(z,s,\overline{a}_\Theta(s,y))]dsdz.$$

Переходя к оценкам, получим

$$\left|u(x,\tau,\varepsilon)-\overline{u}(x,\tau)\right|\le\sigma_1\int_0^{\tau}(\tau-s)\left\|a_\Theta(s,\varepsilon)-\overline{a}_\Theta(s)\right\|ds+$$

$$+\frac{1}{2c}\sum_{R\neq 0}\left|\int_0^{\tau}ds\int_{x-c(\tau-s)}^{x+c(\tau-s)}f_l(z,s,a_\Theta(s,\varepsilon))\exp[i\sum(l^{(\nu)},\varphi_\nu(\theta_\nu s,\varepsilon))]dz\right|\le$$

$$\le\sigma_1\int_0^{\tau}(\tau-s)\left\|a_\Theta(s,\varepsilon)-\overline{a}_\Theta(s)\right\|ds+\frac{1}{2c}\sum_{l\neq 0}\left|\int_0^{\tau}g_l(x,\tau,s,\varepsilon)\exp[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{s}\gamma_l(s_1)]ds\right|,$$

где $g_l(x,\tau,s,\varepsilon)=\int\limits_{x-c(\tau-s)}^{x+c(\tau-s)}f_l(r,s,a_\Theta(s,\varepsilon))\exp[i(l,\varphi_\Theta)-\exp(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{s}\gamma_l(s_1)ds_1)]ds.$

Исходя из условий 1 и 2 теоремы в области $0\le s\le\tau\le L$, $\quad a_\Theta\in D^r$, $\quad \varphi_\Theta\in R^{rm}$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполняются оценки

$$|g_l(x,\tau,s,\varepsilon)| \le 2c(\tau - s)\sup_{G_1}|f_l| \le 2cL\sup_{G_1}|f_l|,$$

$$\left|\frac{\partial g_l(x,\tau,s,\varepsilon)}{\partial s}\right| \le 2c(1+\sigma_1 L)(\sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu\left\|l^{(\nu)}\right\|)\sup_{G_1}|f_l| + 2cL(1+\sigma_1)(\sup_{G_1}\left|\frac{\partial f_l}{\partial s}\right| + \sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu \sup_{G_1}\left|\frac{\partial f_l}{\partial a_{\theta_\nu}}\right|).$$

Используем оценку осцилляционного интеграла [13]:

$$\|I_l(x,\tau,\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^\alpha[(1+\frac{1}{\|l\|_\Theta})\sup_{G_1}\|f(x,s,\varepsilon)\| + \frac{1}{\|l\|_\Theta}\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial f(x,s,\varepsilon)}{\partial s}\right\|], \quad (9)$$

где $\|l\|_\theta = \sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu\left\|l^{(\nu)}\right\|,$ $c_2 > 0$ и не зависит от ε,

$$I_l(x,\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau f(x,s,\varepsilon)\exp[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_l(s_1)ds_1]ds.$$

При выполнении условий 1-3 и 5 теоремы справедлива оценка (9) и аналогичные оценки для осцилляционных интегралов, соответствующих уравнениям (2). Как следствие [8,13], получается оценка отклонения решений систем (2) и (4):

$$\|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le c_3\varepsilon^\alpha. \quad (10)$$

Оценки (9) и (10) позволяют получить следующую оценку

$$|u(x,\tau,\varepsilon) - \bar{u}(x,\tau)| \le \frac{1}{2}c_3 G_1 L^2\varepsilon^\alpha + \frac{c_2\varepsilon^\alpha}{2c}\sum_{l\ne 0}[(2L+1+\sigma_1 L)(\sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu\left\|l^{(\nu)}\right\|)\sup_{G_1}|f_l| +$$

$$+\frac{L(1+\sigma_2)}{\|l\|_\Theta}(\sup_{G_1}\left|\frac{\partial f_l}{\partial s}\right| + \sum_{\nu=1}^{r}\theta_\nu \sup_{G_1}\left|\frac{\partial f}{\partial a^{(\nu)}}\right|] \le c_4\varepsilon^\alpha, \quad (x,\tau,\varepsilon) \in R\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0],$$

где $c_4 = (0.5c_3\sigma_1 L^2 + 2c_2(1+2L+\sigma_1))\sigma_2$.

Из полученной оценки и (10) следует неравенство (8), где $c_1 = c_2 + c_4$.

Замечание 1. Как показано в [13] условие 1 теоремы можно заменить более общим условием вида

$$\left\|(W_p^T(\tau)W_p(\tau)^{-1}W_p(\tau)\right\| \le \sigma_3, \quad \tau \in [0,L],$$

если $\omega_\nu \in C^{p-1}[0,L],$ $p \ge mr,$ $W_p(\tau) - p\times mr -$ матрица, первые m столбцов которой образованы элементами $\dfrac{d^j\omega_\nu(z_1)}{d\tau^j},$ $z_1 = \theta_1\tau,$ следующие – элементами $\dfrac{d^j\omega_\nu(z_2)}{d\tau^j},$ $z_2 = \theta_2\tau$ и т.д. При этом асимптотика оценки отклонения решений точной и усредненной задач имеет порядок малости $\varepsilon^{1/p}$, $p \ge mr$.

Замечание 2. Если в первом условии теоремы $V(\tau) = 0$ в некоторой точке и кратность корня не превышает p, то, как показано в [14], в оценке (10)

$\alpha = (rm + p)^{-1}$. При выполнении этого условия такая же асимптотика достигается и для отклонения $|u(x,\tau,\varepsilon) - \bar{u}(x,\tau)|$.

4. Примеры

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим два примера.

Пример 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\cos(\varphi - 2\varphi_\theta),$$
$$\frac{da}{d\tau} = \cos(\rho - 2\varphi_\theta), \quad \theta = 0.5, \quad a(0) = y_0,$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1+3\tau^2}{\varepsilon}, \quad \varphi(0) = 0.$$

При $\tau = 0$ определитель Вронского $V(\tau) = 4.5\tau = 0$ и достигается резонанс, поскольку частота $\gamma_{kc}(\tau) = 9\tau^2/4$. Для отклонении медленных переменных имеем $a(\tau,\varepsilon) - \bar{a} = \int_0^\tau \cos^3 \frac{s^2}{4\varepsilon} ds.$ Если $\tau = \sqrt[3]{2\pi\varepsilon}/3,$ то $|a(\tau,\varepsilon) - \bar{a}| \ge \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{\varepsilon}$, следовательно, асимптотика оценки (8) является неулучшаемой при наложенных условиях.

Пример 2. Рассмотрим систему с m-частотным возмущением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos[\varphi_1 + \ldots + \varphi_m - p(\varphi_{1,0} + \ldots + \varphi_{m,0})], \quad v(x) = w(x) = 1;$$
$$\frac{da}{d\tau} = \cos[\varphi_1 + \ldots + \varphi_m - p(\varphi_{1,0} + \ldots + \varphi_{m,0})];$$
$$\frac{d\varphi_\nu}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \tau^{\nu-1} + \tau^\nu - \tau^{m+\nu-2} + \tau^{n+\nu-1}), \quad \nu = 2,\ldots,m-1;$$
$$\frac{d\varphi_m}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \tau^{m-1} - \tau^{2m-2} + a\tau^{2m-1}), \quad \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon},$$

где $m \ge 3$, $\theta \in (0,1)$, $p \in N$, $p\theta = 1$, $x(0) = y$, $\varphi(0) = 0$, $a = 2m(1-\theta^{2m-1})^{-1}$.

Поскольку $\gamma_l(\tau) = 2m\tau^{2m-1}$, то условие резонанса выполняется при $\tau = 0$. Определитель Вронского

$$V(\tau) = 2m^2(1-\theta^{m-1})^{m-1}\theta^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{\nu=2}^{2m-1} \nu! \ne 0,$$

поэтому условия теоремы выполняются. Отклонение медленных переменных $a(\tau,\varepsilon)$ и $\bar{a} = y$ имеет вид

$$|a(\tau,\varepsilon) - y| = \left| \int_0^\tau \cos\frac{\tau^{2m}}{\varepsilon} d\tau \right| = O(\sqrt[2m]{\varepsilon})$$

при $\tau = O(1)$. Причем, $|a(\tau_1, \varepsilon) - y| > (2^{-m-2}\pi)^{1/2m} \cdot \varepsilon^{1/2m}$ при $\tau_1 = \sqrt[2m]{(\pi\varepsilon/2}$, т.е. оценка неулучшаемая. Аналогичная оценка имеет место и для отклонения $|u(x,\tau,\varepsilon) - \bar{u}(x,\tau)|$ для всех $(x,\tau,\varepsilon) \in R\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. матем. и матем. физики. − 2005. − **49**, № 5. − С. 815-825.
2. Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем Минск: Изд-во "Университетское", 1985. − 143 с.
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Анализ пространственных нелинейных колебаний струны // ПММ. − 1996. −Т. 60. Вып.1. − С.88-101.
4. Said S.E.H. Elnashaie, John R. Grace Complexity, bifurcation and chaos in natural and man-made lumped and distributed systems параметрами // Chemical Engineering Science. − 2007. − **62**, № 13. − С. 3295-3325.
5. Бігун Я.Й. Про існування, єдиність і неперервну залежність від параметра розв'язку диференціально-функціональних рівнянь із звичайними і частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 715-719.
6. Бігун Я.Й. Усереднення в задачі про коливання струни і багаточастотної системи із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 14 – 17.
7. Арнольд В.И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. − 1965. − 161, № 1. − С.9-12.
8. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. − Київ: Наукова думка, 2004. − 475 с.
9. Бигун Я.И., Самойленко А.М. Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8-14.
10. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, №4. – С. 435-446.
11. Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 462-471.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.
13. Бігун Ярослав. Про усереднення початкової і крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Математичний вісник НТШ. – 2008. – Т. 5. – С. 23-35.
14. Петришин Р.І., Бігун Я.Й. Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 84-89.

Надійшла – 30.03.2011.