УДК 51-72

Первая основная граничная задача для дробно-дифференциального уравнения Лапласа

Л. И. Брацыхина, Т. В. Мукомел, Л. А. Фильштинский
Сумский государственный университет, Украина

Решается задача синтеза топологии сети доступа телекоммуникационной системы согласно критерия максимум прибыли оператора сети, при отсутствии и наличии дополнительных требований к связности.

Ключевые слова: *дробная производная Рисса, интегральное преобразование Фурье, интегральное уравнение, фундаментальное решение.*

У статті розглянуто першу основну граничну задачу для двовимірного фрактального рівняння Лапласа. У якості допоміжної задачі знайдено фундаментальний розв'язок дробового оператора Лапласа. При розв'язуванні задач застосовувалися методи інтегральних перетворень та інтегральних рівнянь.

Ключові слова: *дробова похідна Рісса, інтегральне перетворення Фур'є, інтегральне рівняння, фундаментальний розв'язок.*

In the paper we consider the first basic boundary problem for a two-dimensional fractional Laplace equation. As an auxiliary problem we found the fundamental solution of the fractional Laplace operator. Methods of integral transformations and integral equations are used.

Key words: *Riesz fractional derivative, Fourier integral transform, integral equation, fundamental solution.*

1. Введение

Дробную степень Лапласиана $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2 + \ldots + \partial^2 / \partial x_n^2$ в евклидовом пространстве R^n называют также дробной производной Рисса [1] либо оператором Рисса-Вейля [2]. Она легко определяется при помощи преобразования Фурье F: $F\left[(-\Delta)^{\beta/2} f(x)\right] = |\xi|^\beta F[f(x)]$. Дробный Лапласиан $-(-\Delta)^{\beta/2}$ с показателем $1 < \beta < 2$ порождает β-устойчивый закон Леви [3, 4] и входит в состав уравнений, описывающих модели случайных блужданий, процессы аномальной диффузии (теплопроводности).

В настоящее время существует значительное число работ, посвященных численному решению граничных задач для дифференциальных уравнений, содержащих дробную производную Рисса. В работе [5] исследованы вычислительные аспекты конечно-элементной аппроксимации фрактального уравнения переноса в ограниченной двумерной области. В статье [6] рассматривается метод конечных разностей в качестве метода решения пространственно-дробного уравнения диффузии для отрезка с изолированными концами. Несколько численных схем аппроксимации оператора дифференцирования Рисса предложено авторами [7].

В данной работе найдено фундаментальное решение дробно-дифференциального уравнения Лапласа. На его основе построено интегральное представление, с помощью которого граничная задача сводится к интегральному уравнению I рода. Также приводятся результаты численного решения полученного интегрального уравнения при различных входных параметрах.

2. Фундаментальное решение дробно-дифференциального оператора Лапласа

Фундаментальное решение дробно-дифференциального оператора Лапласа будем искать из уравнения [8]

$$(-\Delta)^{\beta/2}T(x)=\delta(x), \tag{2.1}$$

где $(-\Delta)^{\beta/2}$ – оператор дробного дифференцирования Рисса, $x=(x_1,x_2)\in R^2$, $1<\beta<2$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Используя, определение дробной степени Лапласиана и применяя преобразование Фурье к уравнению (2.1), получим

$$|\xi|^{\beta}F[T(x)]=1,\;\; F[T(x)]=1/|\xi|^{\beta}, \tag{2.2}$$

где $F[T(x)]=\int\limits_{R^2}T(x)e^{-ix\xi}dx$.

Обращение преобразования Фурье в последнем уравнении (2.2) с учетом того, что $\xi=\rho e^{i\varphi}$ и $x=re^{i\alpha}$ приводит к следующему выражению

$$T(r,\alpha)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho^{\beta}}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\rho r\cos(\varphi-\alpha)}d\varphi\right\}\rho d\rho. \tag{2.3}$$

Справедливы следующие формулы [9]

$$e^{i\rho r\cos(\varphi-\alpha)}=\cos[\rho r\cos(\varphi-\alpha)]+i\sin[\rho r\cos(\varphi-\alpha)]=J_0(\rho r)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(\rho r)\cos(2k(\varphi-\alpha))+2i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(\rho r)\cos((2k+1)(\varphi-\alpha)). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и интегрируя, получим искомую функцию в виде [10]

$$T(r,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(\rho r)}{\rho^{\beta-1}}d\rho=\frac{\Gamma(1-\beta/2)}{2^{\beta}\cdot\pi\cdot\Gamma(\beta/2)}\cdot\frac{1}{r^{2-\beta}}, \tag{2.5}$$

где $\Gamma(\beta)$ – Гамма-функция Эйлера [9].

Фундаментальное решение (2.5) было недавно получено в работе [11] при помощи метода интегральных преобразований и контурного интегрирования.

3. Первая основная граничная задача для дробно-дифференциального уравнения Лапласа

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$(-\Delta)^{\beta/2}T(x)=0, \tag{3.1}$$

$$T(x)|_{\Gamma}=f(x), \tag{3.2}$$

где $(-\Delta)^{\beta/2}$ – оператор дробного дифференцирования Рисса, $x=(x_1,x_2)\in D\subset R^2$, $1<\beta<2$, $f(x)$ – некоторая заданная на границе области функция, $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ – граница области D.

На основании полученного фундаментального решения (2.5) представим функцию $T(x)$ в виде свертки

$$T(x)=A\int_{\Gamma}\frac{p(\zeta)}{|\zeta-x|^{2-\beta}}dg\,,\ A=\frac{\Gamma(1-\beta/2)}{2^{\beta}\cdot\pi\cdot\Gamma(\beta/2)}. \tag{3.3}$$

Здесь $\zeta\in\Gamma$, $p(\zeta)$ – неизвестные функции, подлежащие определению на Γ, dg – элемент дуги кривой Γ.

Подставляя представление (3.3) в граничное условие (3.2), получим функциональное равенство для определения $p(\zeta)$

$$\int_{\Gamma}\frac{p(\zeta)}{|\zeta-\zeta_0|^{2-\beta}}dg=\frac{1}{A}f(\zeta_0),\ \zeta_0\in\Gamma.$$

После параметризации контура Γ: $\zeta=\zeta(t)=\zeta_1(t)+i\zeta_2(t)$, $\zeta_0=\zeta_0(t_0)$, получаем следующее уравнение

$$\int_0^{2\pi}\frac{p(t)\sqrt{\zeta_1'^2(t)+\zeta_2'^2(t)}}{|\zeta(t)-\zeta_0(t_0)|^{2-\beta}}dt=\frac{1}{A}f(t_0). \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) представляет собой интегральное уравнение I рода со слабой особенностью. При $1.5<\beta<2$ ядро данного интегрального уравнения является Фредгольмовым. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $K(t,t_0)$ – симметричное, положительно определенное ядро и пусть уравнение

$$\int_a^b K(t,t_0)y(t)dt=f(t_0),\ f(t_0)\in L^2[a,b] \tag{3.5}$$

имеет единственное решение. Тогда последовательность функций $\{y_n(x)\}$, определяемая рекуррентным соотношением

$$y_n(t_0)=y_{n-1}(t_0)+\lambda\left[f(t_0)-\int_a^b K(t,t_0)y_{n-1}(t)dt\right],\ n=1,2,\ldots, \tag{3.6}$$

где $y_0(t_0)\in L^2[a,b]$, $0<\lambda<2\lambda_1$, λ_1 – наименьшее характеристическое число ядра $K(t_0,t)$, сходится (по норме $L^2[a,b]$) к решению уравнения (3.5).

В качестве примера рассмотрим граничную задачу (3.1)-(3.2) при $f(t_0)=\sin t_0$. Численное решение уравнения (3.4) проводилось при помощи метода последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения была выбрана функция $y_0(t_0)=0$. Выбор параметра λ контролировался сходимостью процесса (3.6).

На рис. 3.1-3.6 изображены линии уровня функции $T(x)$ (температуры) в эллиптической и круговой области при различных значениях β.

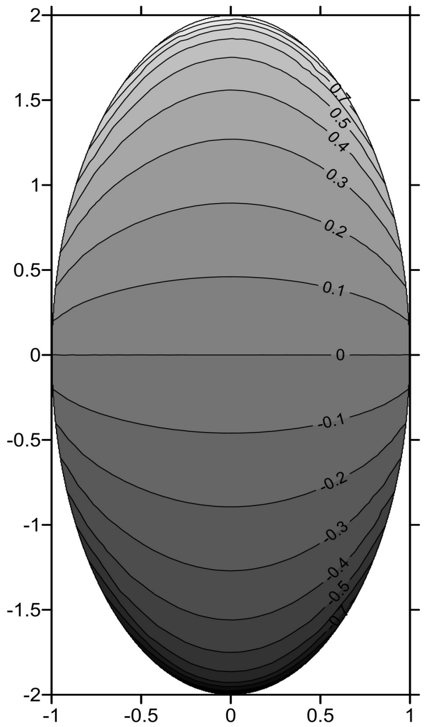

Рис. 3.1. Распределение $T(x)$ *в эллиптической области при* $\beta = 1.1$.

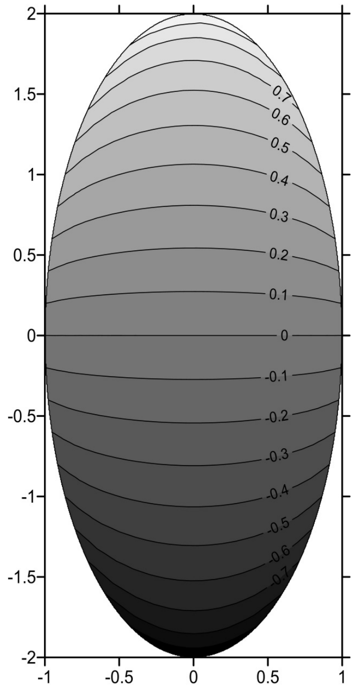

Рис. 3.2. Распределение $T(x)$ *в эллиптической области при* $\beta = 1.5$.

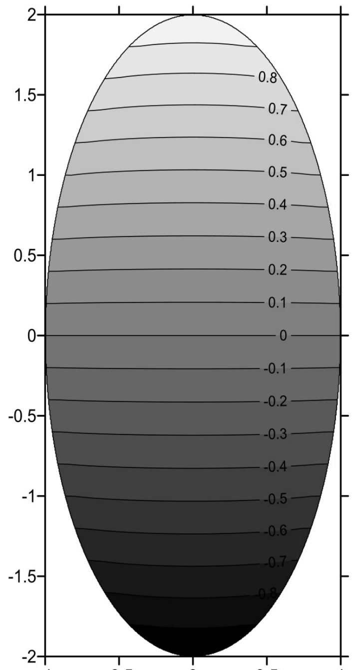

Рис. 3.3. Распределение $T(x)$ в эллиптической области при $\beta = 1.9$.

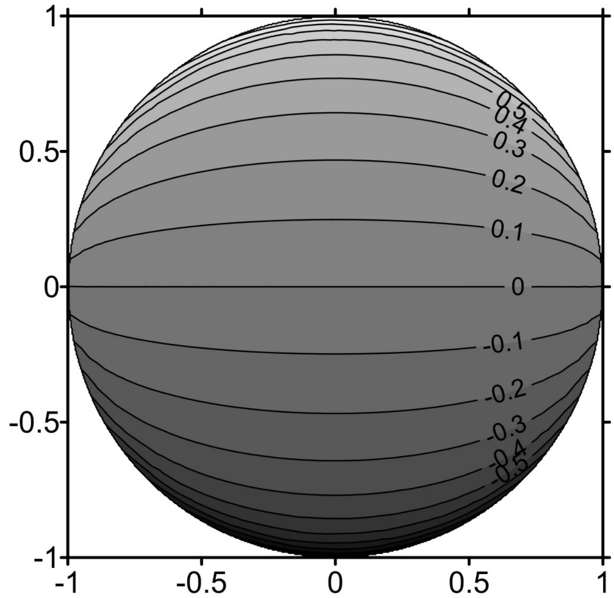

Рис. 3.4. Распределение $T(x)$ в круговой области при $\beta = 1.1$.

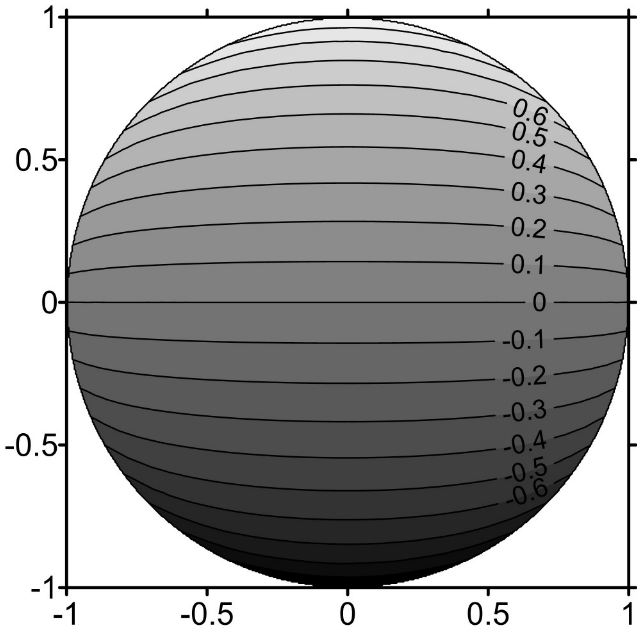

Рис. 3.5. Распределение $T(x)$ *в круговой области при* $\beta = 1.5$.

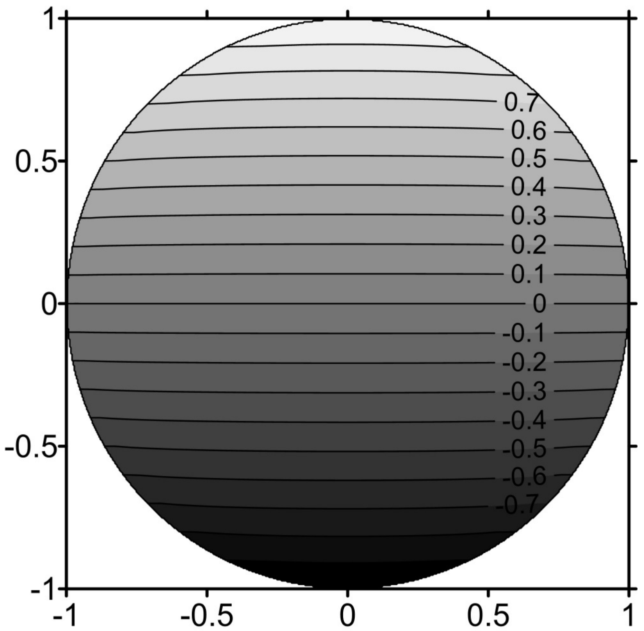

Рис. 3.6. Распределение $T(x)$ *в круговой области при* $\beta = 1.9$.

На основании полученных численных результатов видим, что изменение функции в области более «равномерное» при $\beta \to 2$ (рис. 3.3, 3.6). Если рассматривать дробный Лапласиан в связи со стационарным процессом аномальной теплопроводности (диффузии), то более «плавное» распределение температуры связано с тем, что температура в некоторой точке определяется её эволюцией во всей рассматриваемой области (эффект больших пробегов, называемых полетами Леви) — наиболее четко это видно на рис. 3.1, 3.4.

4. Выводы

В данной работе предложен новый численно-аналитический подход к решению граничной задачи I рода для фрактального уравнения Лапласа. Были проведены численные исследования поставленной задачи при различных дробных степенях оператора и показано, что результаты согласуются с физическим смыслом явления аномальной теплопроводности (диффузии), описываемого уравнением с дробными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional diffusion processes: probability distributions and continuous time random walk. Processes with long range correlations // Lecture notes in physics. – 2003. – vol. 621. – P. 148-166.
2. Sokolov I., Klafter J., Blumen A. Fractional kinetics // Physics Today. – 2002. – 55. – P. 48-54.
3. Applebaum D. Levy processes – from probability to finance and quantum groups // Notices Amer. Math. Soc. – 2004. – vol. 51, no. 11. – P. 1336-1347.
4. Uchaikin V.V. Evolution equations for Levy stable processes // International Journal of Theoretical Physics. – 1999. – vol. 38, no. 9. – P. 2377-2388.
5. Roop J.P. Computational aspects of FEM approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in R^2 // J. Comput. Appl. Math. – 2006. – 193. – P. 243-268.
6. Shen S., Liu F. Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion with insulated ends // ANZIAM J. – 2005. – vol. 46, no. E. – P. 871-887.
7. Yang Q., Liu F., Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives // Appl. Math. Model. – 2010. – 34. – P. 200-218.
8. Владимиров B.C. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
9. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979, 831 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. – 752 с.
11. Sami I. Muslih, Om P. Agrawal. Riesz Fractional Derivatives and Fractional Dimensional Space // Int J. Theor Phys. – 2010. – 49. – P. 270-275.

Надійшла – 03.02.2011.