УДК 514.17: 519.1

Теорема про потяг та її застосування для задач регулярного розкрою

І. Г. Величко, А. І. Зінченко
Запорізький національний університет, Україна

У статті вводиться поняття одномірного та двомірного потягів і доводиться теорема, яка дозволяє визначати всілякі зрушення фігури, за яких її нове положення не має спільних точок з вихідним. Наведено нову інтерпретацію чисел Каталана. Сформульована і доведена топологічна лема, яка корисна при доведенні.

Ключові слова: *Регулярний розкрій, крок штампування, числа Каталана, система відрізків.*

В статье вводится понятие одномерного и двумерного поездов и доказывается теорема, позволяющая определять всевозможные сдвиги фигуры, при которых ее новое положение не имеет общих точек с исходным. Приведена новая интерпретация чисел Каталана. Сформулирована и доказана топологическая лемма, которая полезна при доказательстве неравенств.

Ключевые слова: *Регулярный раскрой, шаг штамповки, числа Каталана, система отрезков.*

The notion of one-and two trains and a theorem that enables the various changes the shape in which its new position has no points in common with the original. Given a new interpretation of the Catalan numbers. Formulated and proved a topological lemma which is useful in proving inequalities.

Key words: *Regular cutting, stamping step, the Catalan numbers, the system segments.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Задачі пошуку оптимального розміщення об’єктів у заданій області можна вважати окремим розділом прикладної математики. Це пов’язано з тим, що їх варіації зустрічаються в різноманітних галузях промисловості, серед яких зазначимо машинобудування, приладобудування, радіоелектроніку, вантажоперевезення, архітектуру. Існує цілий спектр методів, які використовуються для аналізу моделей розміщення об’єктів залежно від специфіки предметної області та математичного апарату, який при цьому застосовується.

При аналізі розміщення двовимірних фігур у площині завжди виникає питання про допустимі зсуви фігур, при яких сусідні фігури не накладаються одна на одну. Існуючі алгоритми пошуку допустимих зсувів або є громіздкими, або є ітераційними (і тому наближеними). Задача побудови алгоритмів для визначення точних значень зсувів є актуальною та практично важливою задачею. У даній статті будується математичний апарат, на базі якого можна ефективно розв’язувати задачі однорядного регулярного розкрою.

2. Аналіз публікацій

Найбільш відомою монографією, яка присвячена задачам оптимального розкрою, є класична робота Канторовича та Залгаллера [1]. В Україні є декілька наукових шкіл, які займаються проблемами оптимального розкрою, серед яких найбільш відомі колективи Харківської школи (її засновниками є В. Л. Рвачов та Ю. Г. Стоян) [2-4] та Донецька школа (Ю. О. Скобцова) [5]. Із зарубіжних вчених відмітимо російський колектив учених під керівництвом Е. О. Мухачової (м. Уфа) [6,7], італійських науковців A. Lodi, S. Martello, D. Vigo (м. Болонья) [8], та англійських дослідників G. Kendall, E. K. Burke [9].

Існує інтернаціональна наукова група ESICUP, яка спеціалізується по задачах розкрою, висвітлюючи свою діяльність на сайті [10]. Команду, яка налічує понад 500 науковців, очолюють G. Waescher, H. Dyckhoff. На сайті організації наведено бібліографічний покажчик, який містить більше ніж 600 наукових праць членів цієї групи.

Майже всі роботи вказаних авторів присвячені розробці емпіричних алгоритмів оптимального розкрою області на неоднотипні деталі. Питанню регулярної укладки присвячено значно менша кількість робіт. Ці роботи відрізняються між собою, в основному, способами визначення кроку штампування. Як приклад наведемо роботу [11].

3. Невирішені проблеми та цілі роботи

Крок штампування можна визначати як найменшу відстань, на яку можна зсунути фігуру в напрямку штампування так, щоб вона не мала спільних точок зі своїм вихідним положенням. Ціллю даної статті є пошук ефективного алгоритму точного визначення мінімального кроку штампування для регулярного однорядного розкрою на однотипні фігури у випадку, коли контури фігури складаються з відрізків.

Розглянемо одну з фігур у смузі. Кожен з перетинів цієї фігури з горизонтальною прямою є системою інтервалів. Умова того, що фігура після зсуву вздовж осі OX на величину z не буде мати спільних внутрішніх точок зі своїм початковим положенням, еквівалентна умові, що для кожного з таких перетинів вихідна система інтервалів та система зсунутих інтервалів не будуть мати спільних точок. Оскільки кількість горизонтальних перетинів є нескінченною, то перевірити їх всі не є можливим.

Доведемо, що для визначення кроку штампування достатньо перевірити лише скінченну кількість перетинів, і запропонуємо алгоритм пошуку кроку штампування, який спирається на аналіз взаємного розташування інтервалів у кожному із зазначених перетинів.

4. Визначення допустимих трансляції системи відрізків

Назвемо «одновимірним потягом» набір інтервалів, розташованих на числовій прямій. Якщо кількість інтервалів дорівнює n, довжини інтервалів дорівнюють $a_1, a_2, ..., a_n$, довжини відрізків між ними $b_1, b_2, ..., b_n$ і координата лівого кінця най лівішого інтервалу дорівнює x_0, то такий потяг будемо характеризувати кортежем $\langle x_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1}, a_n \rangle$.

Характеристичною функцією потяга будемо називати функцію, яка дорівнює одиниці в заданих інтервалах то нулю в інших точках прямої. Явний вигляд цієї функції буде таким:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} G(x - A_i)G(A_i + a_i - x).$$

Тут $G(t) = \begin{cases} 0, t \le 0, \\ 1, t > 0 \end{cases}$ - функція типу Хевісайда, $A_i = x_0 + \sum_{k=1}^{i-1}(a_k + b_k)$.

Допустимими значеннями трансляції назвемо такі значення z, що одновимірний потяг, зсунутий вздовж осі OX на величину z, не буде мати спільних точок з одновимірним потягом у початковому положенні. Через $M(z)$ позначимо множину всіх допустимих значень трансляції. Із наведених вище міркувань випливає, що

$$M(z) = \{z > 0 / \forall x \quad f(x) + f(x+z) \le 1\}.$$

Наведемо спосіб аналітичного визначення множини $M(z)$ для одновимірного потяга, який характеризується кортежем $\langle 0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1}, a_n \rangle$. Зауважимо, що множина $M(z)$ не залежить від величини x_0, тому без обмеження загальності можна вважати, що $x_0 = 0$.

Якщо z - допустиме значення трансляції, то при зсуві на величину z кожен з інтервалів попаде або між двома заданими інтервалами, або опиниться правіше інтервалу з номером n. Позначимо через α_i максимальний номер інтервалу із заданої сукупності, правіше якого опинився зсунутий інтервал з номером i.

Очевидно, що послідовність натуральних чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ повинна задовольняти таким вимогам:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_n = n,$$
$$i \le \alpha_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема: Кількість різних послідовностей довжини n, які задовольняють цим умовам, дорівнює n - му числу Каталана і обчислюється за формулою

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Доведення.

Одне з визначень чисел Каталана C_n (послідовність A000108 в OEIS) таке: це кількість різних послідовностей дужок, які містять n відкривальних дужок та n закривальних, і для яких при відкиданні будь-якої кількості правих дужок серед залишених дужок відкривальних не менше, ніж закривальних. Такі послідовності дужок будемо називати правильними.

Кожній послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ поставимо у відповідність такий впорядкований набір дужок:

α_1 відкривальних, 1 закривальна, $\alpha_2 - \alpha_1$ відкривальна, 1 закривальна, $\alpha_3 - \alpha_2$ відкривальна, 1 закривальна, …, $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ відкривальна, 1 закривальна.

Кількість відкривальних дужок дорівнює

$$\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + ... + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \alpha_n = n.$$

Кількість закривальних дужок також дорівнює n.

Перед k-ю закривальною дужкою знаходиться $\alpha_k \ge k$ відкривальних, тобто при відкиданні будь-якої кількості правих дужок серед залишених дужок відкривальних не менше, ніж закривальних.

Таким чином, ми маємо бієкцію між правильними послідовностями з $2n$ дужок та послідовностями довжини n натуральних чисел, які задовольняють умовам теореми. А це означає, що їх кількість однакова.

Теорему доведено.

Заданий інтервал з номером k має вигляд $(A_k, A_k + a_k)$, а проміжок між k-м та $k+1$-м інтервалами є відрізком $[A_k + a_k, A_k + a_k + b_k] = [A_k + a_k, A_{k+1}]$.

Після зсуву на величину z k-й інтервал набуде вигляду $(A_k + z, A_k + a_k + z)$. Умова того, що цей інтервал буде лежати між α_k та α_{k+1} інтервалами, буде еквівалентна системі нерівностей:

$$\begin{cases} A_k + z \ge A_{\alpha_k} + a_{\alpha_k}, \\ A_k + a_k + z \le A_{\alpha_k} + a_{\alpha_k} + b_{\alpha_k} \end{cases}$$

Якщо $\alpha_k = n$, то ця умова набуде вигляду

$$A_k + z \ge A_n + a_n .$$

Об'єднуючи ці результати, сформулюємо таке твердження: Якщо зсув характеризується послідовністю $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то величина z повинна задовольняти системі нерівностей:

$$\begin{cases} (A_{\alpha_k} - A_k) + a_{\alpha_k} \le z \le (A_{\alpha_k} - A_k) + (a_{\alpha_k} - a_k) + b_{\alpha_k}, \quad \alpha_k < n \\ (A_n - A_k) + a_n \le z, \quad \alpha_k = n \end{cases},$$

яка повинна виконуватися для всіх $k = \overline{1, n}$.

5. Визначення допустимих трансляції системи трапецій

Двовимірним потягом будемо називати набір трапецій, верхні основи яких належать одній з двох паралельних прямих, а нижні основи – другій паралельній прямій, причому трапеції попарно не перетинаються. Будемо вважати, що прямі, які містять основи трапецій, паралельні осі абсцис, та задаються рівняннями $y = c$ та $y = d$.

Допустимими значеннями трансляції назвемо такі значення z, що двовимірний потяг, зсунутий вздовж осі OX на величину z, не буде мати спільних точок з двовимірним потягом у початковому положенні. Множину всіх допустимих значень трансляції двовимірного потягу позначимо через $N(z)$.

Перетин горизонтальної прямої з двовимірним потягом є одновимірним потягом. Множину допустимих значень трансляції одновимірного потягу, який знаходиться на прямій $y = t$, позначимо через $M(z,t)$. Тоді

$$N(z) = \{z \,/\, \forall t \in (c,d) \quad z \in M(z,t)\}.$$

Перед формулюванням теореми про двовимірний потяг сформулюємо та доведемо топологічну лему, яка буде використовуватися при доведенні теореми.

Лема. Якщо число z та функції $f(\mu)$ та $g(\mu)$ такі, що

1. $f(\mu)$ та $g(\mu)$ неперервні при $\mu \in [0,1]$,
2. $f(\mu) < g(\mu)$ при $\mu \in [0,1]$,
3. $f(1) < z < g(0)$ або $f(0) < z < g(1)$,

то існує таке значення $\overline{\mu} \in (0,1)$, при якому $f(\overline{\mu}) < z < g(\overline{\mu})$.

Доведення леми.

Розглянемо випадок, коли $f(0) < z < g(1)$.

Можливі два випадки: коли $f(1) < z$ і коли $f(1) \geq z$.

Перший випадок. Якщо $f(1) < z$, і, за умовою $g(1) > z$, то, оскільки ці функції неперервні при $\mu \in [0,1]$, існує такий окіл точки 1, у якому ці нерівності мають місце. Тобто існує таке $\varepsilon \in (0,1)$, що $\forall \mu \in (1-\varepsilon, 1)$ має місце нерівність $f(\mu) < z < g(\mu)$. Таким чином, як $\overline{\mu}$ можна взяти $\overline{\mu} = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Другий випадок: $f(1) \geq z$. Оскільки функція $f(\mu)$ неперервна при $\mu \in [0,1]$, та $f(0) < z$ і $f(1) \geq z$, то це означає, що рівняння $f(\mu) = z$ має корені на відрізку $[0,1]$. Позначимо через T найменший додатний корінь рівняння $f(\mu) = z$. Тоді при $\mu \in (0, T)$ має місце нерівність $f(\mu) < z$.

Із умов леми випливає, що $g(T) - z > f(T) - z = 0$. Через неперервність функції $g(\mu)$ можна стверджувати, що функція $g(\mu) - z$ залишається додатною в деякому околі точки T, і, в тому числі, в деякому інтервалі $(T-\varepsilon, T)$, де $0 < \varepsilon < T$. Якщо візьмемо $\overline{\mu} = T - \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $f(\overline{\mu}) < z < g(\overline{\mu})$. **Лему доведено.**

Теорема про двовимірний потяг. Множина допустимих значень трансляції двовимірного потягу складається з тих та тільки тих значень z, які є допустимими значеннями трансляції для верхнього та нижнього одновимірних потягів і відповідають однаковим послідовностям.

Доведення

Будемо вважати, що нижній одновимірний потяг є перетином заданого двовимірного потягу з прямою $y = c$, і він характеризується набором $\langle x_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1}, a_n \rangle$, а верхній є перетином з прямою $y = d$, і він, у свою чергу характеризується набором $\langle x'_0, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, ..., a'_{n-1}, b'_{n-1}, a'_n \rangle$.

Будь-який проміжний потяг є перетином заданого двовимірного потягу з прямою $y = \lambda c + \mu d$. Тут $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$. Він буде характеризуватися, з огляду на теорему Фалеса, набором

$\langle x''_0, a''_1, b''_1, a''_2, b''_2, ..., a''_{n-1}, b''_{n-1}, a''_n \rangle$.

Тут $x''_0 = \lambda x_0 + \mu x'_0$, $a''_k = \lambda a_k + \mu a'_k$, $k = \overline{1,n}$, $b''_r = \lambda b_r + \mu b'_r$, $r = \overline{1, n-1}$.

З цих рівностей випливає, що $A''_i = x''_0 + \sum\limits_{k=1}^{i-1} \left(a''_k + b''_k \right) = \lambda A_k + \mu B_k$, $k = \overline{1,n}$.

Якщо z є допустимим значенням трансляції для верхнього та нижнього одновимірних потягів, і величина z відповідає однаковим наборам $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то це означає виконання таких нерівностей:

$$\begin{cases} (A_{\alpha_k} - A_k) + a_{\alpha_k} \le z \le (A_{\alpha_k} - A_k) + (a_{\alpha_k} - a_k) + b_{\alpha_k}, & \alpha_k < n, \\ (A'_{\alpha_k} - A'_k) + a'_{\alpha_k} \le z \le (A'_{\alpha_k} - A'_k) + (a'_{\alpha_k} - a'_k) + b'_{\alpha_k}, & \alpha_k < n, \\ (A_n - A_k) + a_n \le z, \quad \alpha_k = n, \\ (A'_n - A'_k) + a'_n \le z, \quad \alpha_k = n. \end{cases}$$

Помножимо першу з цих нерівностей на λ та додамо її до другої нерівності, помноженої на μ. Те ж саме зробимо з третьою і четвертою нерівностями. У результаті, з урахуванням того, що $\lambda z + \mu z = z$, будемо мати такі нерівності:

$$\begin{cases} (A''_{\alpha_k} - A''_k) + a''_{\alpha_k} \le z \le (A''_{\alpha_k} - A''_k) + (a''_{\alpha_k} - a''_k) + b''_{\alpha_k}, & \alpha_k < n, \\ (A''_n - A''_k) + a''_n \le z, \quad \alpha_k = n, \end{cases}$$

які означають, що для відповідного одновимірного потягу величина z є допустимим значенням трансляції. У результаті довільності вибору перетину отримуємо, що величина z є допустимим значенням трансляції для заданого двовимірного потягу.

Перейдемо до випадку, коли z є допустимим значенням трансляції для верхнього та нижнього одновимірних потягів, але характеризується різними наборами, у яких збігаються перші k компонент: $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_k, ..., \alpha_n)$ - для нижнього потягу та $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}, \alpha'_k, ..., \alpha'_n)$ – для верхнього. Без обмеження загальності можна вважати, що $\alpha'_k = \alpha_k + p,\ p \in N$. Звідси випливає, що $\alpha_k < n$.

Покажемо, що в цьому випадку після зсуву потягу на величину z k-та трапеція буде мати спільні точки з $\alpha_k + p$ - трапецією потягу в початковому стані. Ліва межа k-го відрізку перетину після зсуву має координату $A''_k + z$, а $\alpha_k + p$ – інтервал перетину в початковому стані: $(A''_{p+\alpha_k}, A''_{p+\alpha_k} + a''_{p+\alpha_k})$. Доведемо, що існує такий перетин, що $A''_{p+\alpha_k} < A''_k + z < A''_{p+\alpha_k} + a''_{p+\alpha_k}$, (існування такого перетину означатиме, що ліва границя одного з інтервалів є внутрішньою точкою іншого інтервалу, а значить, ці інтервали мають спільні точки) або, що теж саме, існують такі $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, що

$$\lambda(A_{p+\alpha_k} - A_k) + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k) < z <$$
$$< \lambda(A_{p+\alpha_k} - A_k) + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k) + \lambda a_{p+\alpha_k} + \mu a'_{p+\alpha_k}.$$

Запишемо цю нерівність через одну змінну

$$A_{p+\alpha_k} - A_k + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k - A_{p+\alpha_k} + A_k) < z <$$
$$< A_{p+\alpha_k} - A_k + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k - A_{p+\alpha_k} + A_k) + a_{p+\alpha_k} + \mu(a'_{p+\alpha_k} - a_{p+\alpha_k}).$$

Уведемо функції

$$f(\mu) = A_{p+\alpha_k} - A_k + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k - A_{p+\alpha_k} + A_k),$$
$$g(\mu) = A_{p+\alpha_k} - A_k + \mu(A'_{p+\alpha_k} - A'_k - A_{p+\alpha_k} + A_k) + a_{p+\alpha_k} + \mu(a'_{p+\alpha_k} - a_{p+\alpha_k}).$$

Очевидно, що ці функції неперервні, і має місце нерівність

$$g(\mu)-f(\mu)=a_{p+\alpha_k}+\mu\left(a'_{p+\alpha_k}-a_{p+\alpha_k}\right)>0 \text{ при } \mu\in[0,1].$$

Знайдемо $f(0)=A_{p+\alpha_k}-A_k$, $g(1)=A'_{p+\alpha_k}-A'_k+a'_{p+\alpha_k}$.

Зробимо оцінку:

$$f(0)=A_{p+\alpha_k}-A_k=\left(A_{p+\alpha_k}-A_{\alpha_k}\right)+\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)=$$
$$=\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)+a_{\alpha_k}+b_{\alpha_k}+a_{\alpha_k+1}+b_{\alpha_k+1}+\ldots+a_{\alpha_k+p-1}+b_{\alpha_k+p-1}\geq$$
$$\geq\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)+a_{\alpha_k}+b_{\alpha_k}>\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)+\left(a_{\alpha_k}-a_k\right)+b_{\alpha_k}.$$

Оскільки величина z є допустимим значенням трансляції для верхнього та нижнього потягів, то це буде означати, що виконуються такі нерівності

$$\begin{cases}\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)+a_{\alpha_k}\leq z\leq\left(A_{\alpha_k}-A_k\right)+\left(a_{\alpha_k}-a_k\right)+b_{\alpha_k},\\ \left(A'_{p+\alpha_k}-A'_k\right)+a'_{p+\alpha_k}\leq z\end{cases}$$

Як бачимо, $g(1)\leq z<f(0)$. Оскільки $g(0)>f(0)$, то робимо висновок, що $z>f(0)$. Аналогічно показується, що $z<g(1)$. Отже, всі умови леми виконано, а це означає, що для деякого перетину заданого двовимірного потягу величина z не є допустимим значенням трансляції. **Теорему доведено.**

Таким чином, якщо z є допустимим кроком штампування, то для кожного з одновимірних потягів, які отримані в результаті перетину фігури з горизонтальними прямими, величина z є допустимим значенням трансляції.

Оскільки перевірити всі одновимірні потяги не видається можливим, то проведемо прямі, які проходять через вузлові точки фігури. Отримаємо розбиття заданої фігури на двовимірні потяги. Визначивши для кожного з таких потягів допустимі значення трансляції (для цього зручно використовувати доведену вище теорему), знаходимо мінімальне значення z, яке є загальним для всіх таких двовимірних потягів. Знайдена величина z буде найменшим можливим кроком штампування.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень

У статті запропоновано ефективний аналітичний спосіб точного визначення найменшого можливого кроку штампування для задачі про регулярний однорядний регулярний розкрій листа на однотипні деталі. Запропонований спосіб спирається на введені поняття одновимірного та двовимірного потягів, доведену теорему про довжину двовимірного потягу, і може бути застосований для нероздільних у заданому напрямку деталей.

Було встановлено нову інтерпретацію чисел Каталана та доведено допоміжну топологічну лему, яка становить окремий інтерес для доведення двосторонніх нерівностей.

В наступних публікаціях автори планують навести детальні приклади обчислення кроку штампування для різноманітних фігур, які проілюструють наведені в цій статті теоретичні міркування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. Рациональный раскрой промышленных материалов/ Л.В.Канторович, В.А.Залгаллер. – Новосибирск: Наука, 1971. – 299 с.
2. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения/ Рвачёв В. Л. — К.: Наук. думка 1982. – с.
3. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов/ Стоян Ю.Г. – К.: Наукова думка, 1975. – 175 с.
4. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов/ Ю.Г.Стоян, Н.И.Гиль. – К.: Наукова думка, 1976. - 247с
5. Скобцов Ю. А. К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки / Ю. А. Скобцов, В. Н. Балабанов// Вісник Хмельницького національного університету. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 205—217.
6. Мухачева Э. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ/ Мухачева Э. А. — М.: Машиностроение, 1984. — 176 с.
7. Мухачева Э.А. САПР раскроя: основные проблемы и опыт их решения/ Э.А.Мухачева, М.А.Верхотуров, В.В.Мартынов // Вестник компьютерных и информационных технологий. - М.: Машиностроение. - 2004. - №2. – С.31-40.
8. Lodi A. Models and Bounds for Two-Dimensional Level Packing Problems/ A. Lodi, S.Martello, D. Vigo// Journal of Combinatorial Optimization.- 2004.- 8. – P.363–379.
9. Edmund K. Burke. A Simulated Annealing Enhancement of the Best-Fit Heuristic for the Orthogonal Stock-Cutting Problem/ E. K. Burke, G. Kendall, G. Whitwell //INFORMS Journal on Computing archive.- 2009. – Vol. 21, Issue 3. - P. 505-516.
10. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://paginas.fe.up.pt/~esicup/tiki-index.php
11. Аввакумов В.Д. Численное решение задач оптимального размещения плоских объектов/ В.Д. Аввакумов //Прикладная геометрия. -Вып.9, №19. -2007. - С. 13-23.

Надійшла – 25.02.2011.