УДК 532.546

Расчет потенциалов фильтрационных течений в угловых областях с помощью симметрий

И. К. Волянская, А. А. Зайцев, А. Я. Шпилевой

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

В статье даны обобщения теорем о прямой и окружности на случай областей, обладающих внутренними симметриями. С их помощью получены комплексные потенциалы фильтрационных течений в двухкомпонентной среде, заполняющей угловую область.

Ключевые слова: *потенциал фильтрационного течения, коэффициент проницаемости, симметрия, функция Грина, обобщенная теорема об окружности, круговой сектор.*

В статті дані узагальнення теорем про пряму і коло на випадок областей, що мають внутрішні симетрії. З їх допомогою отримані комплексні потенціали фільтраційних течій в двокомпонентному середовищі, що заповнює кутову область.

Ключові слова: *потенціал фільтраційної течії, коефіцієнт проникності, симетрія, функція Гріна, узагальнена теорем про окружність , круговий сектор.*

In the article generalizations of the theorems of a straight line and a circle on a case of the areas possessing internal symmetries is given. With help of them and complex potentials of filtrational currents in the two-componential media filling angular area are received.

Key words: *potential of a filtration flows, permeability factor, symmetry , Green's function, the generalized theorem of a circle, circular sector.*

1. Введение

Для исследования фильтрационных течений жидкости, подчиняющихся закону Дарси, удобно использовать комплексный потенциал $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ [1, 2]. По нему можно определить поля скоростей и давлений [1]. Если границами раздела областей фильтрации являются прямые или окружности или их части, то для определения комплексных потенциалов традиционно используется метод изображения особых точек, а также теорема о прямой и окружности [1 - 4]. Этим способом решены многие конкретные задачи. Представляется, тем не менее, необходимым найти обобщение этих теорем. Здесь предлагается попытка это сделать.

Отмеченные задачи фактически сводятся к построению функции Грина задач Дирихле и Неймана, а в более общем случае - функции Грина задачи линейного сопряжения. Основой нового способа построения этой функции служат две теоремы, которые позволяют получать ее с помощью симметрий. Они и основанный на них алгоритм используются для решения задач о потенциале фильтрационного течения в круговом секторе и угловой области.

Отправным пунктом нашего анализа является следующее свойство функции Грина двумерной задачи Дирихле в односвязной области D [5, 6]: она имеет представление

$$g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\,|\,h(z,z_0)\,|,\qquad z,z_0\in D, \tag{1}$$

где функция $w = h(z, z_0)$ аналитическая в области D, имеет там простой ноль в точке $z = z_0$ и является конформным отображением области D на единичный круг $|w| < 1$, причем точка z_0 отображается в центр этого круга, точку $w = 0$. Таким образом, задача определения функции Грина сводится к нахождению функции $h(z, z_0)$, которую назовем *представляющей функцией области* D. Именно ей будет уделено основное внимание.

2. Удвоение области посредством симметрии

Пусть граница односвязной области D содержит отрезок некоторой прямой (он может быть в частности, лучом или всей прямой) или дугу некоторой окружности (она может быть полной окружностью); обозначим эту часть границы l и будем считать, что область D находится по одну сторону от линии, являющейся продолжением l.

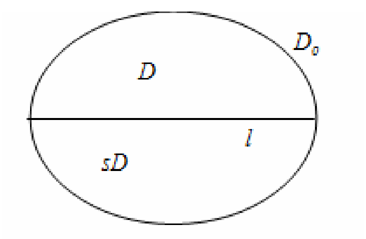

Рис. 1. Удвоение области посредством симметрии

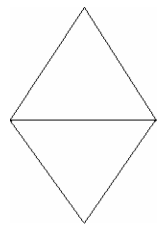

Рис. 2. Удвоение правильного треугольника посредством отражения от одной из его сторон; результатом является ромб

Пусть s – симметрия от l. Тогда множество $D_0 = int(D \cup l \cup sD)$ (символ $int\,A$ обозначает внутренность множества A) также является областью. Назовем ее *удвоением* области D посредством симметрии s (рис. 1). В свою очередь область D назовем *делением* области D_0 посредством s. Например, ромб с острым углом $\pi/3$ является удвоением правильного треугольника посредством отражения от его стороны (рис. 2). Более интересный с точки зрения приложений пример: любой круг является делением плоскости посредством симметрии от окружности. Далее всюду в тексте считается, что символы D и D_0 обозначают области, связанные указанным отношением.

Замечание 1. Симметрия s является конформным автоморфизмом второго рода области D_0, причем равенство $sz = z$ выполняется на линии l и только на ней.

3. Представление функции Грина задачи Дирихле для области *D* через функцию Грина для области *D₀*

Функцию Грина задачи Дирихле для деления области посредством симметрии можно выразить через ту же функцию для исходной области. Это свойство формулируется в теореме 1. Следует иметь в виду, особенно в случаях использования теоремы для решения конкретных задач, что для отражений от прямых функция $\overline{sz}$ является линейной и потому голоморфной всюду в комплексной плоскости; напротив, эта функция перестает быть голоморфной, если отображение s есть симметрией от окружности.

Теорема 1. Пусть $h(z,z_0)$ и $h_0(z,z_0)$ – представляющие функции областей D и D_0 с дополнительным условием: если s – симметрия от окружности, то функция $\overline{sz}$ голоморфна в области D. Тогда представляющая функция области D выражается через представляющую функцию области D_0 по формуле

$$h(z,z_0)=\frac{h_0(z,z_0)}{\overline{h_0(sz,z_0)}},\qquad z,z_0\in D. \tag{2}$$

Соответственно функция Грина задачи Дирихле области D имеет вид:

$$g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{h_0(z,z_0)}{\overline{h_0(sz,z_0)}}\right|,\qquad z,z_0\in D.$$

Доказательство. Функция $\overline{h_0(sz,z_0)}$ является аналитической в области D_0, за исключением тех точек, где $\overline{sz}$ имеет полюс (это возможно, если s – симметрия от окружности и область sD содержит бесконечно удаленную точку), но этот случай исключен дополнительным условием, следовательно, эта функция аналитична в области $D\subset D_0$, причем в области D она нигде не обращается в 0. Действительно, если $z,z_0\in D$ и $h_0(z,z_0)=0$, то согласно определению представляющей функции это равенство имеет место лишь тогда, когда $sz=z_0$, т.е. $z=sz_0\notin D$.

Таким образом, функция $h(z,z_0)$ является аналитической в области D и имеет там единственный простой ноль в точке $z=z_0$. Кроме того, $|h_0(z,z_0)|=|h_0(sz,z_0)|=1$ на дополнении границы области D к линии l, поскольку это дополнение и его симметрия являются частями границы области D_0. Наконец, для всех точек z на линии l выполняется равенство $sz=z$, поэтому там $h_0(sz,z_0)=h_0(z,z_0)$ и, значит, на линии l будем иметь

$$|h(z,z_0)|=\left|\frac{h_0(z,z_0)}{\overline{h_0(sz,z_0)}}\right|=\left|\frac{h_0(z,z_0)}{\overline{h_0(z,z_0)}}\right|=1.$$

Итак, функция $h(z,z_0)$ удовлетворяет всем условиям для представляющей функции. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 1 неприменима, например, в том случае, когда область D является кругом $|z|<r$. В этом случае D_0 будет расширенной комплексной плоскостью, $D_0=C^*$, $sz=r^2/\overline{z}$, $h_0(z,z_0)=z-z_0$, $\overline{h_0(sz,z_0)}=r^2/z-\overline{z}_0=(r^2-\overline{z}_0z)/z$. Следовательно, формально

$$h(z,z_0)=\frac{(z-z_0)z}{r^2-\overline{z}_0z},\ g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{(z-z_0)z}{r^2-\overline{z}_0z}\right|. \tag{3}$$

Но тогда в области D представляющая функция имеет лишний ноль $z=0$, а функция Грина лишнюю особенность в той же точке, которую она не должна иметь. Причина в том, что функция $\overline{sz}=r^2/z$ не является голоморфной в круге D. Для устранения лишней особенности следует к ложной функции Грина (3) добавить контрчлен $-\ln|z/r|/2\pi$, который обращается в 0 на границе круга. Получаем

$$g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{r(z-z_0)}{r^2-\bar{z}_0 z}\right|.$$

Это и будет истинная функция Грина задачи Дирихле для круга $|z|<r$.

С другой стороны, если область D является внешностью круга $|z|<r$, функция $\overline{sz}=r^2/z$ будет голоморфной в этой области, поэтому формулы (3) в этом случае будут истинными. Соответствующие контрчлены можно и следует использовать и в других случаях.

Замечание 3. Фактически в доказательстве теоремы 1 установлено, что представляющей функцией в области $D_1=sD_0$, симметричной области D_0, является функция $\bar{h}_0(\overline{sz},\bar{z}_0)$ (разумеется при условии, что функция $\overline{sz}$ голоморфна в D_1). Поэтому функция Грина задачи Дирихле имеет представление

$$g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln|\,\overline{h_0(sz,z_0)}\,|.$$

4. Функция Грина задачи Дирихле для кругового сектора

В случае угловой области с углом раствора φ представляющая функция, как следует из результатов статьи [3], имеет вид

$$h(z,z_0)=\frac{z^p-z_0^{\,p}}{z^p-\overline{z_0^{\,p}}}=\frac{z^p-z_0^{\,p}}{z^p-exp(-2\pi pi)\bar{z}_0^{\,p}},\qquad p=\pi/\varphi. \tag{4}$$

Здесь z^p обозначает регулярную ветвь степенной функции в плоскости с разрезом вдоль полуоси неотрицательных действительных чисел $Re\,z\geq 0$, $Im\,z=0$ (рис. 3). Для этой ветви выполняется равенство

$$\overline{z^p}=exp(-2\pi pi)\bar{z}^p \tag{5}$$

Используем теорему 1 для определения функции Грина для кругового сектора, замкнутого дугой окружности радиуса r (рис. 4).

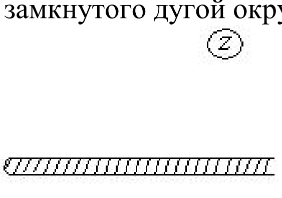

Рис. 3. Область аналитичности z^p

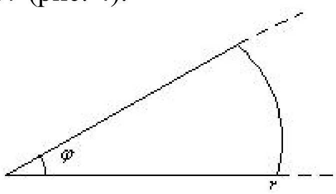

Рис. 4. Круговой сектор

Пусть s есть симметрия от дуги. Тогда удвоением рассматриваемого кругового сектора будет угловая область $0 < \arg z < \varphi$. Выражение для представляющей функции этой области дается формулой (4). В данном случае $sz = r^2 / \bar{z}$.

Хотя точка $z = 0$ является особой для функции $\overline{h_0(sz, z_0)}$, но эта особенность устранимая. Следовательно,

$$h(z, z_0) = \frac{h_0(z, z_0)}{h_0(sz, z_0)} = \frac{z^p - z_0{}^p}{z^p - exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p} \cdot \frac{\overline{(r^2 / \bar{z})^p} - z_0{}^p}{\overline{(r^2 / \bar{z})^p} - exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p}$$

(учтено равенство (5)). Для упрощения второй дроби умножим ее числитель и знаменатель на z^p. Тогда согласно определению регулярной ветви многозначной степенной функции z^p будем иметь: если $z = \rho\, exp(i\alpha)$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, то

$$\overline{(r^2 / \bar{z})^p} z^p = \overline{(r^2 / \rho \exp(i\alpha))^p} \rho^p \exp(ip\alpha) = (r^{2p} / \rho^p)\rho^p \exp(-ip\alpha)\exp(ip\alpha) = r^{2p}.$$

Учитывая этот результат, для представляющей функции получаем следующее выражение:

$$h(z, z_0) = \frac{(z^p - z_0{}^p)(r^{2p} - z_0{}^p z^p)}{(z^p - exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p)(r^{2p} - exp(-2\pi pi)\bar{z}_0{}^p z^p)}. \tag{6}$$

5. Функция Грина задачи линейного сопряжения для двухкомпонентной области

Здесь сохраняются обозначения, используемые в предыдущих пунктах. Пусть D и $D_1 = sD$ будут областями фильтрации с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2 соответственно, а область D_0 граничит с водной средой. Пусть в области D в точке $z = z_0$ действует источник с дебитом Q (рис. 5).

Пусть $W_0(z)$ и $W_1(z)$ – комплексные потенциалы фильтрационных течений в областях D и D_1. Они должны подчинятся следующим условиям:

1.функция $W_0(z)$ имеет логарифмическую особенность вида $Q\,ln(z - z_0) / 2\pi$, а вне точки $z = z_0$ она аналитическая в области D;

2. функция $W_1(z)$ аналитическая в области D_1;

3. действительные части обоих потенциалов обращаются в 0 на внешних границах областей D и D_1;

4. на линии l выполняются следующие граничные условия:

$$Re W_0 / k_1 = Re W_1 / k_2, \qquad Im W_0 = Im W_1. \tag{7}$$

Теорема 2. Перечисленным условиям удовлетворяют следующие потенциалы

$$\begin{aligned} &W_0(z) = QG(z, z_0) + v\overline{QG(sz, z_0)}, \qquad z \in D, \\ &W_1(z) = wQG(z, z_0), z \in D_1, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} ln\, h(z, z_0)$$

$$v = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, w = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}. \tag{9}$$

Доказательство. Действительная часть комплексного потенциала $G(z, z_0)$ совпадает с функцией Грина $g(z, z_0)$ для области D_0, а мнимая часть является сопряженной гармонической функцией. Поскольку функция $g(z, z_0)$ в области D_0 имеет единственную логарифмическую особенность в точке $z = z_0$, а в рассматриваемом случае $z_0 \in D$, то функции $W_0(z)$ и $W_1(z)$ удовлетворяют условиям 1 и 2. Условие 3 также удовлетворяется, так как по определению функции Грина действительные части функций $g(z, z_0)$ и $\overline{g(sz, z_0)}$ обращаются в 0 на границе области D_0, а значит, и на тех частях этой границы, которые служат внешними границами областей D и D_1. Осталось проверить выполнение условия 4. Поскольку на линии l $sz = z$ и $Re\, g(z, z_0) = Re\, \overline{g(z, z_0)}$, $Im\, g(z, z_0) = -Im\, \overline{g(z, z_0)}$, то после подстановки выражения (8) в соотношения (7) и необходимых сокращений получаем следующие уравнения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$k_2(v+1) = k_1 w, \qquad 1 - v = w.$$

Решая их, получаем равенства (9). Формулы (8) и (9) дают решение поставленной задачи. Отметим, что замечание 2 сохраняет силу и в этом случае. Теорема доказана.

Заметим еще, что найденное решение можно использовать и в том случае, когда источник расположен в области D_1, поскольку области D и D_1 симметричны друг другу. Результатом будут следующие формулы:

$$W_0(z) = w_1 Q g(z, z_0), z \in D,$$

$$W_1(z) = Q g(z, z_0) + v_1 Q \overline{g(sz, z_0)}, z \in D_1,$$

где

$$v_1 = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, w_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

6. Потенциалы фильтрационных течений в двухкомпонентной среде заполняющей угловую область

Используем теорему 2 для решения следующей задачи: пусть областями фильтрации являются круговой сектор и ему симметричная относительно дуги внешняя область. В этом случае удвоенной областью будет угловая область.

Рис.5. Двухкомпонентная угловая область, граничащая с водной средой.

Ограничимся случаем расположения источника в круговом секторе. Тогда с помощью формул (1), (4), (8) и результатов предыдущего пункта получаем

$$W_0(z)=\frac{Q}{2\pi}ln\frac{z^p-z_0{}^p}{z^p-exp(-2\pi pi)\overline{z}_0{}^p}+v\frac{Q}{2\pi}ln\frac{r^{2p}-exp(-2\pi pi)\overline{z}_0{}^p z^p}{r^{2p}-z_0{}^p z^p},$$

$$W_1(z)=w\frac{Q}{2\pi}ln\frac{z^p-z_0{}^p}{z^p-exp(-2\pi pi)\overline{z}_0{}^p},\qquad p=\pi/\varphi;$$

здесь значения коэффициентов v и w даются выражениями (9). В частном случае, когда l – непроницаемая граница, $k_2=0$, $v=1$, поэтому $W_1(z)=0$ и

$$W_0(z)=\frac{Q}{2\pi}ln\frac{(z^p-z_0{}^p)(r^{2p}-exp(-2\pi pi)\overline{z}_0{}^p z^p)}{(z^p-exp(-2\pi pi)\overline{z}_0{}^p)(r^{2p}-z_0{}^p z^p)}.$$

7. Заключение

Таким образом, в работе с помощью двух новых теорем, которые обобщают известные теоремы о прямой и окружности, относительно просто получены решения двух задач о потенциалах фильтрационных течений в круговом секторе и двухкомпонентной среде, заполняющей угловую область. Данная методика может быть использована для решения многих задач электростатики и магнитостатики, а также теории теплопроводности. Сейчас намечаются новые обобщения предложенных теорем, которые используют обобщенные симметрии, а также деление и расширение областей посредством групп, порожденных этими симметриями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М., 1972.
2. Зайцев А.А, Шпилевой А.Я. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах // Калининград: Изд - во КГУ, 2001.
3. Волянская И.К., Зайцев А.А., Шпилевой А.Я. Комплексные потенциалы фильтрационных течений в линзах // Труды Международных школ – семинаров «МДОЗМФ». Вып. 7. Орел, 2009. С. 36 - 39.
4. Волянская И.К., Шашков А.С., Шпилевой А.Я. Моделирование фильтрационных течений в области ограниченной сторонами прямоугольника // Вестник Российского государственного университета им. Иммануила Канта. Вып. 4. Сер. Физико – Математические науки. – Калининград: Изд – во РГУ им. И. Канта, 2009. С. 12 – 17.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.

Надійшла – 31.03.2011.