

УДК 519.642.7:532.5.013.2

О некоторых особенностях нестационарных течений

А. Д. Головенко, С. А. Голубев

Киевский национальный университет им. Т.Г.Шевченко, Украина

Выявлены причины «парадоксального» расхождения вычисляемых и измеряемых характеристик в отрывных нестационарных течениях несжимаемой жидкости. На примере численного моделирования поперечного обтекания плоской пластинки идеальной несжимаемой жидкостью показано влияние вкладов доминирующих физических факторов и дано объяснение данного «парадокса».

Ключевые слова: метод дискретных особенностей, численное моделирование.

Виявлено причини «парадоксальної» розбіжності обчислюваних і вимірюваних характеристик у відірваних нестационарних течіях нестисливої рідини. На прикладі чисельного моделювання поперечного обтікання плоскої пластинки ідеальною нестисливою рідиною показано вплив вкладів домінуючих фізичних факторів і дано пояснення даного «парадоксу».

Ключові слова: метод дискретних особливостей, чисельне моделювання.

Found the causes of "paradoxical" differences between calculated and measured characteristics in the unsteady flow of an incompressible fluid. On the example of numerical simulation of the cross-flow flat plate by incompressible fluid shows the effect of the contributions of the dominant physical factors and an explanation of this "paradox".

Key words: discrete singularities method, numerical modeling.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При исследовании отрывного обтекания тел при больших числах Рейнольдса ($Re \approx 10^6$) замечено, что даже в простейшем плоском случае (поперечное обтекание цилиндрического тела), для подобных задач распределение по контуру измеренного коэффициента давления C_p далеко не всегда совпадает с расчетным [1,5,6,11,15,19]. В силу того, что данный факт не достаточно полно отражен в классической литературе, он всегда приводил в замешательство исследователей и ставил под сомнение достоверность математической модели и результаты ее численной реализации. Однако скупрулезный анализ литературных источников [1-19], анализ исследуемых аэрогидродинамических процессов [1,6,10,11,12], анализ принятых технологий (методик) проведения экспериментальных измерений в аэродинамической трубе [1,6,7,8,13,14], анализ математических соотношений [2,9,10,16-18] позволяет выявить причины расхождения результатов.

На примере поперечного обтекания единичной пластинки (толщины 0.1) бесконечного размаха показано, что развитие нестационарного процесса обтекания приводит к тому, что коэффициент давления C_p в критической точке на обтекаемой поверхности зачастую принимает значение больше единицы [15], а режим течения проходят несколько стадий, что существенно отражается на значениях коэффициента сопротивления $C_x(t)$ и коэффициента поперечной силы $C_y(t)$.

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается плоская модель нестационарного отрывного поперечного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью плоской пластинки L_d , с формированием вихревого следа, состоящего из складок тонких вихревых слоев представимых свернутыми поверхностями L_v разрыва тангенциальной составляющей скорости (Рис.1).

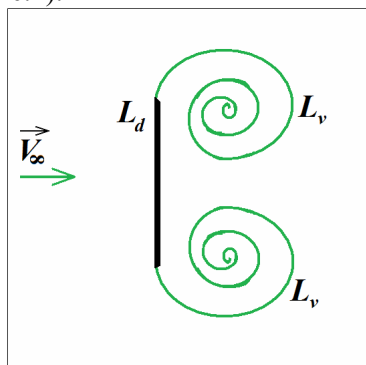


Рис.1. Обтекание пластинки

Для потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости в области D^+ вне границ: L_d - обтекаемого контура, L_v - вихревых структур в струе, ставится следующая задача для нахождения потенциала φ , для которого скорость $\vec{V} = \nabla \varphi$:

$$t \geq t_0 : \Delta \varphi = 0 \text{ в } D^+ \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = W_n^* \text{ на } L_d \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^- \text{ на } L_v \quad (2.3)$$

$$p^+ = p^- \text{ на } L_v \quad (2.4)$$

$$|\nabla \varphi| < \infty \text{ на } L \text{ (на острых краях и краях)} \quad (2.5)$$

$$\lim_{|r-r_\sigma| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_\infty \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$t = t_0 : \sigma_d(t_0), \varphi^+ \Big|_{t=t_0} = \varphi_0^+ \quad (2.8)$$

При решении данной задачи методом дискретных особенностей значения для потенциала и скорости определяются выражениями:

$$\varphi(x, y, t) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \quad (2.9)$$

$$+ \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t)}{x - x_i^p(t)} \right)$$

$$\vec{V}(x, y, t) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}_j(x, y, x_j, y_j)$$

$$+ \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}_i^p(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \quad (2.10)$$

Выражение для коэффициента давления, полученное из интеграла Коши-Лагранжа (2.7) содержит производную от потенциала по времени:

$$C_p(x, y, t) = 1 - \frac{(\vec{V}(x, y, t))^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} \right) \quad (2.11)$$

В предположении, что $\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} = 0$, для корректного вычисления C_p

выражение (2.9) было преобразовано [16-18] так, чтоб производную $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ можно было представить в виде «дипольной составляющей» и «конвективной составляющей»:

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \vec{D}_j \cdot \vec{V}_j(x, y) + \sum_p \vec{d}_p \cdot \vec{V}_p(x, y) -$$

$$- \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \cdot \vec{W}(x_i^p(t), y_i^p(t), t) \quad (2.12)$$

«Дипольная составляющая»: $\frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t}$ - это сумма первого и второго слагаемых в правой части (2.12), дающих вклад (дипольного характера) в производную за счет изменения во времени интенсивностей распределенных циркуляций на пластинке вызванного схождение циркуляции (вихрей) в след:

$$\frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \vec{D}_j \cdot \vec{V}_j(x, y) + \sum_p \vec{d}_p \cdot \vec{V}_p(x, y) \quad (2.13)$$

«Конвективная составляющая»: $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ - это третье слагаемое в (2.12), дающее вклад в производную за счет перемещения эволюционирующего следа:

$$\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial e} = - \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \bullet \vec{W}(x_i^p(t), y_i^p(t), t) \quad (2.14)$$

Здесь $\vec{W}(x_i^p(t), y_i^p(t), t)$ - скорость перемещения каждой i -ой дискретной особенности (дискретного вихря), составляющих p -й след L_p за пластинкой L_d .

3. Результаты вычислительного эксперимента

В предположении, что на бесконечности, впереди по потоку, заданы величины давления P_∞ скорости \vec{V}_∞ и производной $\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} = 0$, представлены результаты моделирования нестационарного обтекания плоской пластинки, с учетом формирования и эволюции следа. Представлены расчетные характеристики для коэффициента давления C_p , с выделением составляющих его частей:

«стационарной» и нестационарной в виде производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (состоящей из «дипольной» и «конвективной») в моменты безразмерного времени $t=1$ и $t=2$, когда явно выражено формирование разгонных вихрей. На рисунках, цифрами приведено вычисленное значение упомянутых величин в передней критической точке на пластинке.

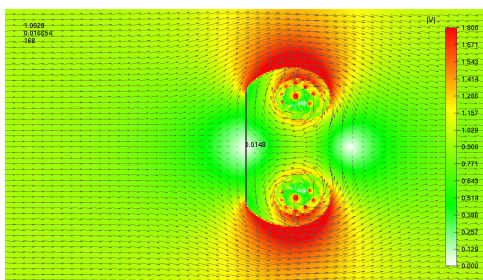


Рис.2. Распределение векторного поля скорости и скалярного поля - модуля скорости $|V|$ в области течения при $t=1$.

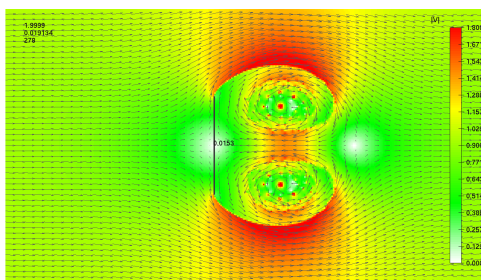


Рис.3. Распределение векторного поля скорости и скалярного поля - модуля скорости $|V|$ в области течения при $t=2$.

На Рис.2, 3 представлено распределение \vec{V} - векторного поля скорости и $|V|$ - скалярного поля модуля скорости при отрывном обтекании пластинки в моменты времени $t=1$ и $t=2$. Поле скорости является разрывным. При наложении векторного поля \vec{V} и цветового отображения $|V|$ хорошо видны поверхности (конечного) разрыва тангенциальных скоростей, которые сворачиваются в два разгонных вихря. Несмотря на нестационарный характер течения, сохраняются три критические точки (две по разные стороны от пластинки и одна (перемещающаяся) в области смыкания потока за разгонными вихрями.

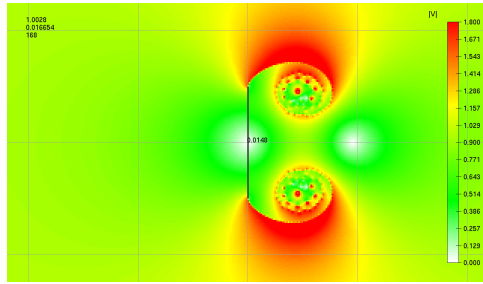


Рис.4. Распределение скалярного поля - модуля скорости $|V|$ в области течения при $t=1$.

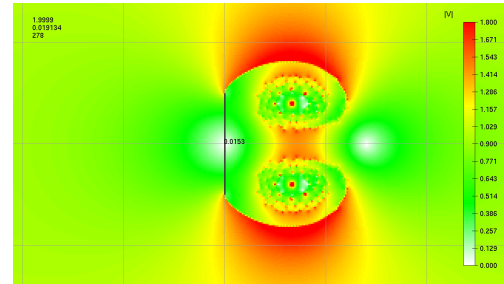


Рис.5. Распределение скалярного поля - модуля скорости $|V|$ в области течения при $t=2$.

На Рис.4,5 приведены значения модуля скорости в критической точке перед пластинкой. Представление $|V|$ - скалярного поля модуля скорости в виде цветовой шкалы отображает зоны торможения и зоны разгона потока. Видно, что перепад скоростей по разные стороны пластинки заметен только вблизи ее краев, на которых реализуется отрывное течение.

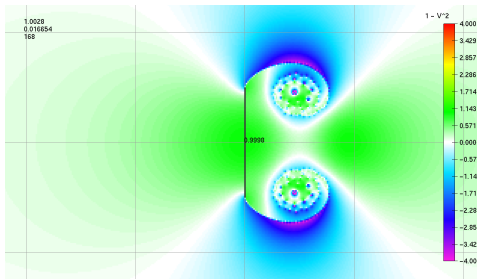


Рис.6. Распределение величины $1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$ при $t=1$

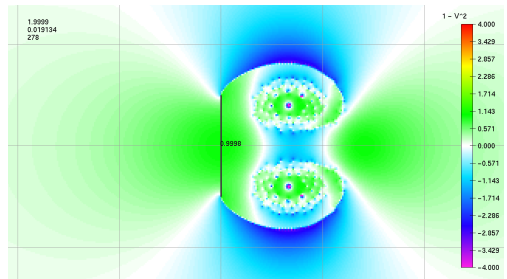


Рис.7. Распределение величины $1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$ при $t=2$.

На Рис.6,7 отображено распределение скалярного поля «стационарной» составляющей для величины C_p равной $1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$ в моменты времени $t=1$ и $t=2$.

Следует отметить, что данное распределение составляет только первые два слагаемых от величины (2.11) и может трактоваться, как «значение коэффициента давления полученное из интеграла Бернулли» (т.е. как для стационарного режима обтекания). Из рисунка видно, что перепад данной величины на пластинке заметен опять только вблизи ее краев, на которых реализуется отрывное течение. Следует отметить, что для отрывных нестационарных течений вычисления распределенного поля давлений по упрощенной формуле – полученной из интеграла Бернулли будут некорректными, в силу того, что посчитанное таким способом поле давлений в следе будет разрывным, что противоречит условию (2.4) в постановке задачи.

Видно, (Рис.6,7) что пренебрежение в (2.11) третьим слагаемым (с $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, отвечающим за нестационарность) не позволяет правильно вычислить перепад давлений на пластинке, который и определяет ее сопротивление потоку. Вклад от $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, в соответствии с выражением (2.12)-(2.14) условно можно разделить на

«дипольную» и «конвективную» составляющие: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{конвект}}{\partial t}$.

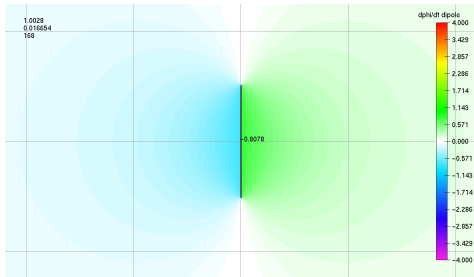


Рис.8. Распределение «дипольной» части

$$\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t} \text{ при } t=1$$

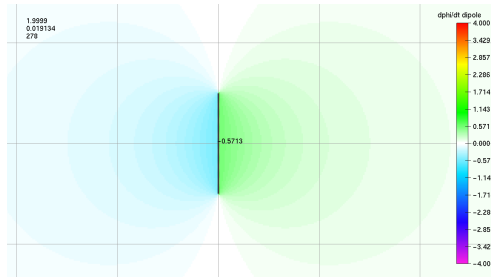


Рис.9. Распределение «дипольной» части

$$\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t} \text{ при } t=2.$$

«Дипольная составляющая» $\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t}$ (2.14) от $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ состоит из первого и второго слагаемых в правой части выражения (2.11). Первое слагаемое в (2.13) определяет вклад в производную за счет изменения распределенных циркуляций на пластинке. Второе слагаемое в (2.13) определяет изменение циркуляций на пластинке за счет схождения вихрей с кромок пластинки в след. Условный термин -«дипольная составляющая» вызван тем, что в выражении (2.9) выполнено преобразование [16-18] вихревого распределения особенностей на обтекаемой поверхности в дипольное (2.12), что позволило перейти от вычислений с неоднозначными функциями (арктангенсы и комплексные логарифмы) к однозначным дипольным представлениям.

Из Рис.8,9 видно, что пластинка формирует дипольное воздействие вдоль оси OX(в данном случае). На всей длине пластинки имеется конечный скачок данной величины. Как видно из Рис.8,9, значение перепада «дипольной составляющей» от $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ - ее конечный скачок на пластинке убывает с ростом

времени t : $\left[\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t} \right]_{t=1} = 2, \left[\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t} \right]_{t=2} = 1$. В остальных точках области - везде, вне пластинки, распределение данной величины имеет непрерывный характер.

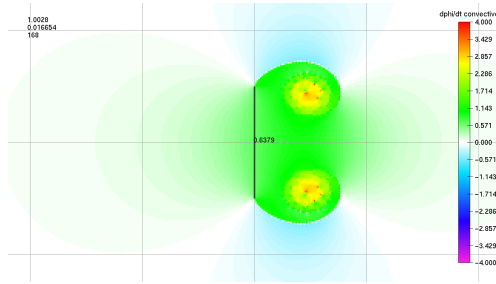


Рис.10. Распределение «конвективной»

части $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ при $t=1$

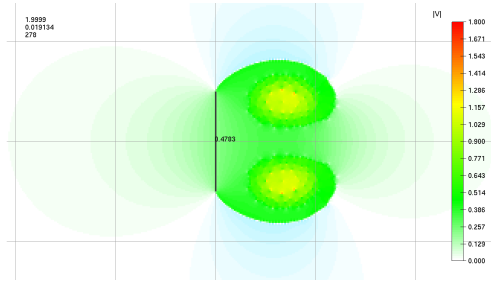
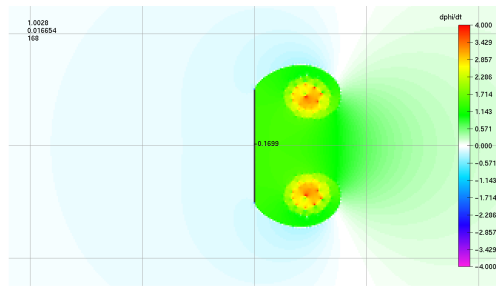
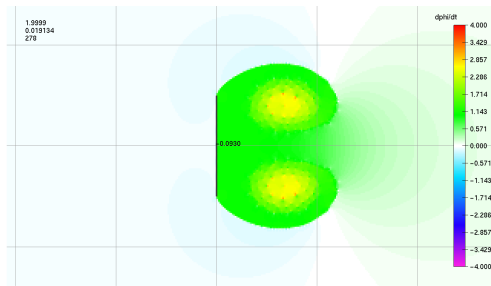


Рис.11. Распределение «конвективной»

части $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ при $t=2$.

«Конвективная составляющая» (2.14) - это третье слагаемое в (2.12), дающее вклад в производную за счет перемещения эволюционирующего следа. Следует отметить, что распределение «конвективной» части от $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ также имеет разрывный характер (Рис.12,13), но уже только вдоль поверхностей разрыва скорости - вдоль вихревых поверхностей (Рис.1,2,3). Величина разрыва в распределении «конвективной составляющей» - определяется интенсивностью разрыва поля скоростей и скоростью движения вихрей самой вихревой поверхности. Поверхность пластинки, в этом случае, не является поверхностью разрыва «конвективной» части $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$.

Рис.12. Распределение $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $t=1$ Рис.13. Распределение $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $t=2$.

На Рис.12,13 представлено поле распределения скалярной величины $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$. В силу того, что обе величины $\frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ определяют разрывные поля, поле распределения скалярной величины $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ также является разрывным. Хорошо видно, что границы области течения L_d -контур поверхности пластинки и L_v -контур изменяющегося вихревого следа (вихревой поверхности - поверхности разрыва тангенциальных скоростей) являются линиями разрыва поля распределения

величины $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Скачок от $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ в передней критической точке на пластинке также убывает с ростом времени t : $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t=1} = -1.3$, $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t=2} = -1$. Вне указанных границ (L_d и L_v) области течения величина $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ изменяется непрерывно.

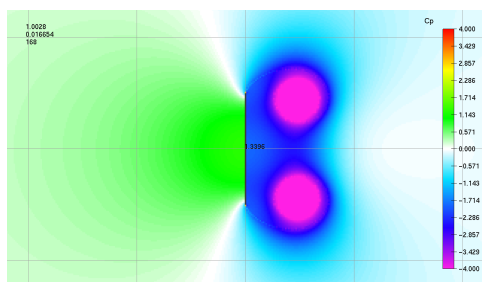


Рис.14. Распределение коэффициента

$$C_p(x, y, t) \text{ при } t=1.$$

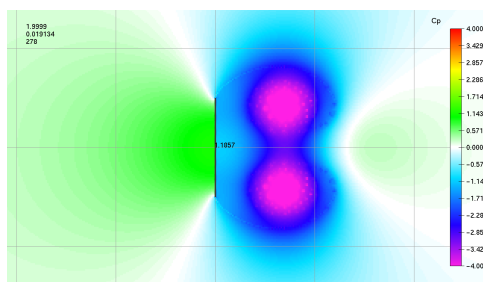


Рис.15. Распределение коэффициента

$$C_p(x, y, t) \text{ при } t=2.$$

На Рис.14,15 представлено поле распределения коэффициента давления $C_p(x, y, t)$, выражение (2.11) для которого получено из интеграла Коши-Лагранжа (2.7) в предположении, что $\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} = 0$. Видно, что в данном

представлении только сумма всех трех слагаемых позволяет корректно вычислять поле давлений - выполняется условие (2.4) непрерывности поля давлений в следе за обтекаемым контуром (отсутствует скачок давления на вихревой поверхности). Перепад давления (скачок) имеет место только на обтекаемом контуре – пластинке и именно этот перепад давлений и вызывает ее сопротивление потоку.

На Рис.16-19 представлены эпюры нагрузок (на фоне поля давлений и поля скоростей) для моментов времени $t=1$ и $t=2$. Видно, что для пластинки, изменение сопротивления при ее нестационарном отрывном обтекании вызывается изменением нагрузок (давлений) на ее подветренной стороне, вследствие уменьшения разрежения в ядрах разгонных вихрей в следе при их удалении.

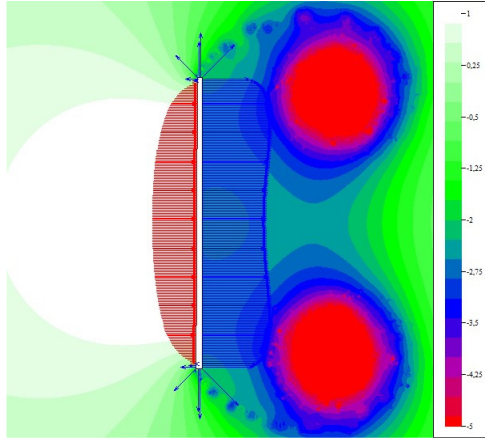


Рис.16. Этюра распределения нагрузок по пластинке на фоне поля давлений при $t=1$.

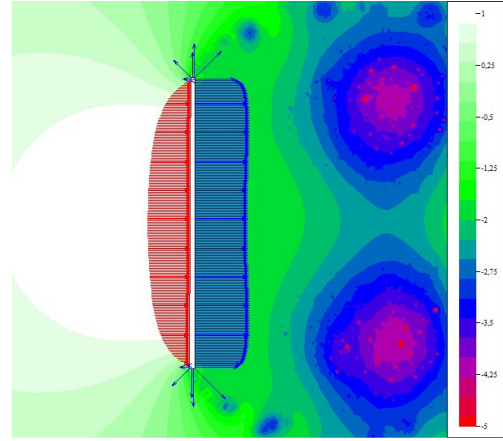


Рис.17. Этюра распределения нагрузок по пластинке на фоне поля давлений при $t=2$.

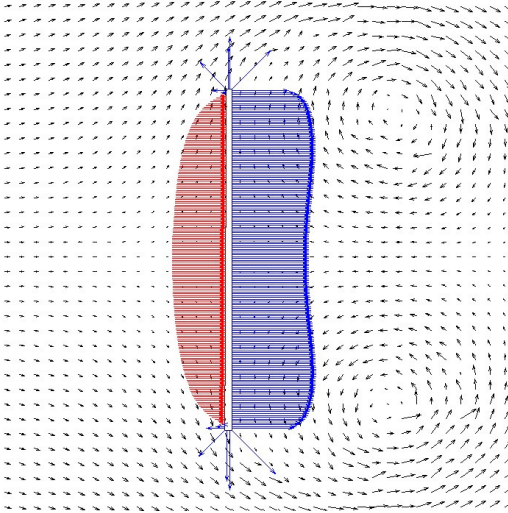


Рис.18. Этюра распределения нагрузок по пластинке на фоне поля скоростей . при $t=1$.

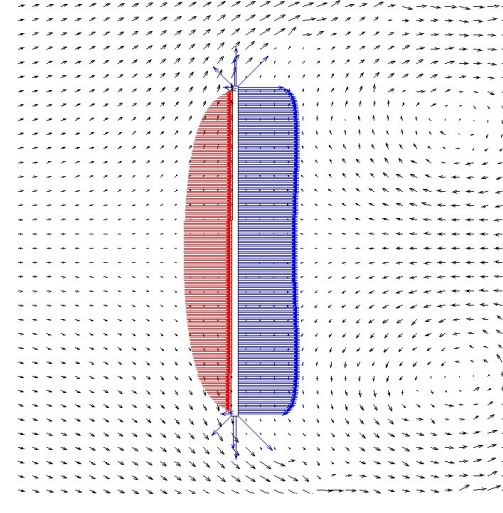


Рис.19. Этюра распределения нагрузок по пластинке на фоне поля скоростей при $t=2$.

На Рис.20, 21 представлено распределение коэффициента давления C_p по всей поверхности пластинки а) при $t=1$, б) при $t=2$. Видно, в передней критической точке $C_p \neq 1$. Причем, видна тенденция на стремление $C_p \rightarrow 1$ в критической точке. Отличие от $C_p = 1$ в критической точке вызвано тем, что в (2.11) выражение $\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} \right) \neq 0$.

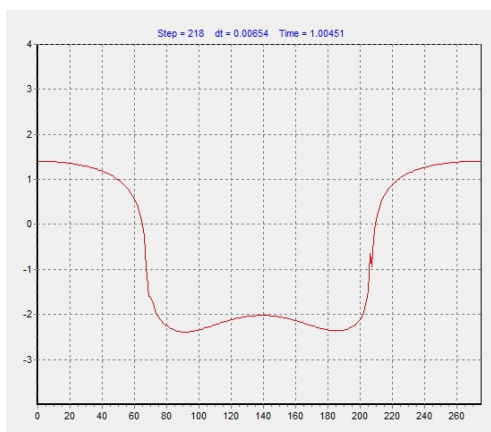


Рис.20. Распределение коэффициента давления C_p по пластинке при $t=1$.

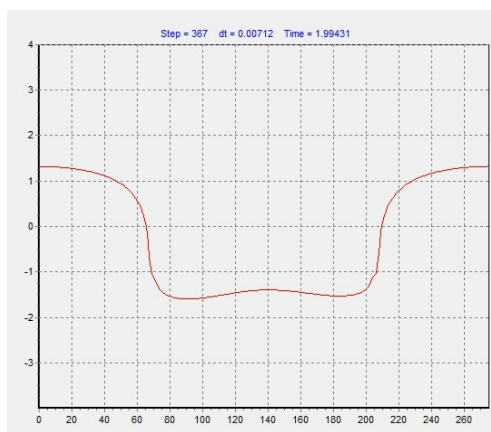


Рис.21. Распределение коэффициента давления C_p по пластинке при $t=2$.

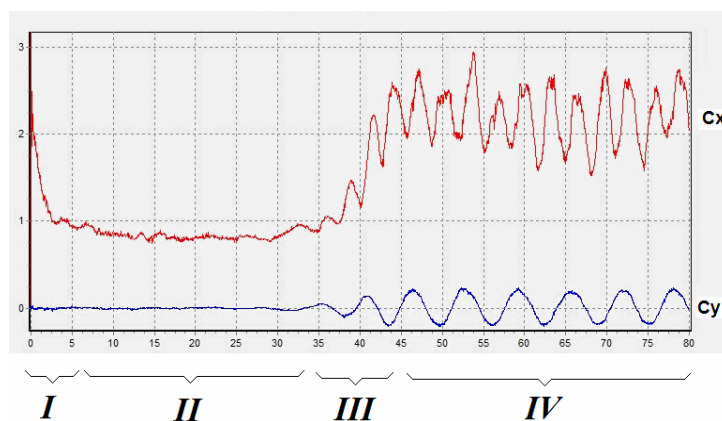


Рис.22. Зависимость коэффициента сопротивления $C_x(t)$ и коэффициента поперечной силы $C_y(t)$ от времени t при поперечном обтекании пластинки конечной (0.1) толщины. Видно, что осредненная в диапазоне безразмерного времени от 60 до 80 величина коэффициента сопротивления $\overline{C_x(t)} = 2$.

На Рис.22 представлена зависимость коэффициента сопротивления пластинки $C_x(t)$ от времени. Видно, что поведение коэффициента сопротивления $C_x(t)$ пластинки и коэффициента поперечной силы $C_y(t)$ проходит несколько стадий: I-начальная стадия формирования двух симметричных вихрей за пластинкой, II-стадия симметричного обтекания, III стадия разрушения симметрии и перехода к периодическому формированию вихрей за пластинкой, IV стадия периодического течения (с формированием дорожки Кармана сразу за пластинкой). Стадия хаотического движения должна определяться нарушением периодичности в поведении коэффициента $C_y(t)$.

4. Выводы

Подтвержден факт и выявлены причины того, что коэффициент мгновенного давления в критической точке при нестационарном обтекании поверхности конструкций произвольной геометрической формы течения, в общем, не всегда равен единице.

Выявлено, что даже коэффициент осредненного давления в носовой критической точке при нестационарном обтекании поверхности конструкций произвольной геометрической формы течения тоже не всегда равен единице, причем не только по причине не достаточной протяженности периода осреднения. Основной причиной является нестационарный характер обтекания, вызванный либо отрывными явлениями, либо изменениями характеристик течения на бесконечности, либо нестационарными движениями поверхности самой обтекаемой конструкций (§37[15]).

Кроме того, важно выявлять длительность устойчивых режимов и минимально необходимый интервал времени для получения необходимых осредненных кинематических и динамических характеристик в интересующем исследователя режиме течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айрапетов А.Б., Соловьева Е.В. Экспериментальное моделирование аэродинамических нагрузок и устойчивости высоких архитектурных и строительных конструкций и систем в ветровом потоке // Труды ЦАГИ, 80 лет ЦАГИ. Актуальные проблемы аэроакустики, гидродинамики и промышленной аэродинамики.-1999. вып. 2634. С. 236-243.
2. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел.-М.:Наука, ГРФМЛ, 1988.-232с.
3. Березин М.А., Катюшин В.В. Атлас аэродинамических характеристик строительных конструкций.– Новосибирск, Олден-полиграфия, 2003.-130с.
4. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа.-М.: Мир, 1986.-113с.
5. Головенко А.Д., Клименкова И.А., Черній Д.И. Численное моделирование динамических полей при нестационарных аэрационных процессах в массивах разновысотной застройки.//Вісник Харківського національного університету.-2010. Вип. 13, № 890.- с.37-46.
6. Горлин С.М. Экспериментальная аэродинамика.-М.: Высшая школа, 1970.
7. ДБН В.2.2-24:2009 Будинки і споруди. Проектування висотних житлових і громадських будинків. Київ: Мінрегіонбуд України, 2009.-105с.
8. ДБН В.1.2-2:2006 Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования.-Киев: Минстрой Украины, 2006.-36с.
9. Довгий С.А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений.– К.: Наукова думка, 2002.-343с.
10. Желанников А.И., Михайлов А.А. Динамическое нагружение плохообтекаемых тел // Труды Военно-воздушной инженерной академии имени профессора Н.Е.Жуковского-1986.-Вып. 1313.-с.157-164.

11. Рекомендации по оценке аэрации территории в жилой застройке Москвы./ Отв.ред. И.К.Лифанов.-М.: МАКС Прогресс, 2006.-2-е изд., перераб.и доп.-160с.
12. Реттер Э.И. Архитектурно-строительная аэродинамика.-М.: Стройиздат, 1986.-194с.
13. Случановская З.П. Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты.//Сборник научных трудов Института механики МГУ-1973.№24.-с.52-60.
14. СНиП 2.01.07-85* Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР. М.:ЦИТП Госстроя СССР, 1986.-61с.
15. Федяевский К.К., Войткунский Я.И.,Фаддеев Ю.И. Гидромеханика.- Ленинград, Судостроение, 1988.-568с.
16. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами //Обчислювальна та прикладна математика – 1997. Вип. 2(82).– С.112-123.
17. Черний Д.И. Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007.-С.319-322.
18. Черний Д.И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами. // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007.- С.315-318.
19. 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM-2004).- Abstracts and CD-ROM Proceedings., International Union of Theoretical and Applied Mechanics(IUTAM), IPPT PAN, Warszawa-2004, 446p.