

УДК 532.536

Перемешивание пассивной жидкости в двумерных течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей

А. А. Гуржий, Д. А. Кобзева, Д. И. Черний

*Институт гидромеханики НАНУ, Украина**Национальный технический университет "КПИ", Украина**Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина*

В работе рассматривается задача адвекции пассивной примеси в двумерном поле скорости нестационарного течения идеальной несжимаемой жидкости, которое развивается в областях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей. Поле скорости течения определяется численно с использованием метода дискретных особенностей, адаптированного к задачам адвекции, которые требуют локального выполнения граничных условий на твердых поверхностях. В работе анализируется пример процесса адвекции выделенной жидкости на морской поверхности в Керченском проливе.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, задача двумерной адвекции, метод дискретных особенностей, численный эксперимент.

У роботі розглядається задача адвекції пасивної домішки в двовимірному полі швидкості нестационарної течії ідеальної нестисливої рідини, яке розвивається в областях з складною геометрією обмежуючих поверхонь. Поле швидкості течії визначається чисельно з використанням методу дискретних особливостей, адаптованого до задач адвекції, які вимагають локального виконання граничних умов на твердих поверхнях. У роботі аналізується приклад процесу адвекції виділеної рідини на морській поверхні в Керченській протоці.

Ключові слова: ідеальна нестислива рідина, задача двовимірної адвекції, метод дискретних особливостей, чисельний експеримент.

The advection problem of passive admixture in two-dimensional velocity field of unsteady flow of an ideal incompressible fluid, which develops in regions with complex geometry of boundary surfaces, is considered in the article. The velocity field of the flow is determined numerically based on the method of discrete features adapted to advection problems, which require local satisfaction of boundary conditions on solid surfaces. An example of an advection process of separated fluid on a sea surface in the Kerch channel is analyzed in this article.

Key words: ideal incompressible fluid, two-dimensional advection problem, method of discrete features, numeral experiment.

1. Введение

Стремительное развитие индустрии и транспорта, всеобщая глобализация формируют сегодня повышенный интерес многих исследователей к вопросам экологии и, в частности, к проблеме обменных процессов и перемешивания в сплошных средах. Эти научные задачи непосредственно связаны с вопросами эволюции и прогнозирования распространения скалярных полей (загрязнений, солености, планктона и др.) в океане, атмосфере, и находят сегодня широкое применение в различных областях аэро- и гидромеханики, биологии, геологии, химии [1-3].

Часто природные катаклизмы и непоследовательная деятельность человека приводят к экологическим авариям, в результате которых различные загрязнения попадают на морскую поверхность и переносятся на большие

расстояния под влиянием течений. Именно в этот момент специалистам по чрезвычайным ситуациям необходимо принимать оперативные решения по ликвидации последствий аварий, опираясь на быстрый и точный прогноз распространения загрязнений.

Большинство задач, связанных с прогнозированием распространения загрязнений, опираются на ставшие уже классическими методы решения задач гидромеханики и требуют значительных вычислительных ресурсов [4,5]. Многие из этих методов принимают во внимание различные физические процессы, происходящие на морской поверхности. Это, в свою очередь, значительно увеличивает продолжительность вычислений. Весьма актуальными в этих случаях являются численные методы решения, которые после получения необходимых данных для заданного морского региона [6] позволяют в режиме, опережающем реальное время, качественно спрогнозировать динамику распространения загрязнения.

В последнее время в вычислительной гидромеханике нашел широкое распространение метод дискретных особенностей [7-10]. Главным его преимуществом по сравнению с другими вычислительными методами является относительная простота в описании двумерных течений, которые развиваются в областях со сложной геометрией границ. Основная идея метода дискретных особенностей сводится к формированию на границах рассматриваемого течения системы точечных вихрей, суперпозиция которых позволяет вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости аппроксимировать циркуляционным течением на рассматриваемой расчетной области [7,8,11].

2. Задача адвекции жидкости

Перемешивание выделенной пассивной жидкости в различных течениях является сложным природным явлением, которое включает два важнейших процесса: деформация пятна в заданном поле скорости, и размыв границ пятна молекулярной диффузией. Анализ геометрических и временных масштабов течений позволяет в некоторых случаях пренебречь диффузионными эффектами, и проблема перемешивания сводится к анализу деформации выделенных областей жидкости в заданном поле скорости. Такая задача в научной литературе получила название *задача об адвекции* [12]. Пассивная жидкая частица всегда перемещается со скоростью внешнего окружающего потока. Поэтому утверждение равенства скорости частицы и скорости внешнего течения приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые называются *уравнениями адвекции* (задача Коши):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Следовательно, адвекция жидкости фактически сводится к анализу траекторий системы лагранжевых частиц в эйлеровом поле скорости [1,3,13]. Главная сложность этой задачи связана с переходом от движения дискретной системы жидких частиц к деформациям непрерывных линий, ограничивающих выделенную жидкость.

Анализ процесса адвекции существенно упрощается, если в начальный момент выделить границу области загрязнения системой пассивных точек

(маркеров) и следить за их эволюцией во времени. Упорядоченное соединение последовательности маркеров для текущего момента времени позволяет сформировать новое положение границы выделенной области течения, которые при интенсивных режимах адвекции претерпевают существенное растяжение.

Самыми распространенными методами анализа деформации контуров при адвекции жидкостей являются интерполяционные методы (например, метод нормированной кубической интерполяции [14]), которые по конфигурации маркеров определяют пространственное положение дополнительных маркеров на данном контуре. Однако, при хаотических режимах адвекции, часто возникают изломы контуров. Интерполяция таких участков непрерывными функциями приводит к появлению больших вычислительных погрешностей, которые возрастают во времени чрезвычайно быстро.

Этот недостаток устранен в методе кусочной сплайн-интерполяции [15], который сначала выделяет гладкие фрагменты контуров и потом на них строит кубический сплайн сглаживающего типа. Сравнение точности интерполяции разными методами показало, что наилучшая интерполяция достигается при использовании метода кусочной сплайн-интерполяции, который используется в дальнейших вычислениях.

3. Адаптивный метод дискретных особенностей к задачам адвекции

Известно [3,16], что наиболее интенсивные режимы адвекции выделенной жидкости происходят в областях, прилегающих к границам. По этой причине в задачах адвекции ставится высокое требование к локальному выполнению граничных условий, которое существенно ограничивает применение метода дискретных особенностей при моделировании процессов переноса скалярных полей в областях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей. В работе [17] предложена методика расчета течений, основанная на методе дискретных особенностей, адаптированном для задач адвекции.

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в области (рис.1), на входе в которую задано распределение скорости $U_0(s)$, где s – поперечная координата. Задача состоит в определении поля скорости $U(x,t)$ течения в области с криволинейной границей.

Известно [18,19], что функция тока $\Psi(x, y)$ течения жидкости, которая наведена системой N точечных вихрей с интенсивностями Γ_i , расположенными в точках (x_i, y_i) , где $i=1, \dots, N$, определяется выражением

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]. \quad (2)$$

Для удовлетворения граничного условия непротекания жидкости в терминах функции тока ($\Psi(x, y)|_s = \text{const}$) вдоль береговой линии, введем систему N точек коллокации и потребуем, чтобы в этих точках значения функции тока, наведенные системой N точечных вихрей, были одинаковы на каждой из границ течения. Для обеспечения гладкости распределения поля скорости у границы течения в предлагаемом численном методе точечные вихри располагаются на расстоянии Δ от границы, как показано на рис.2.

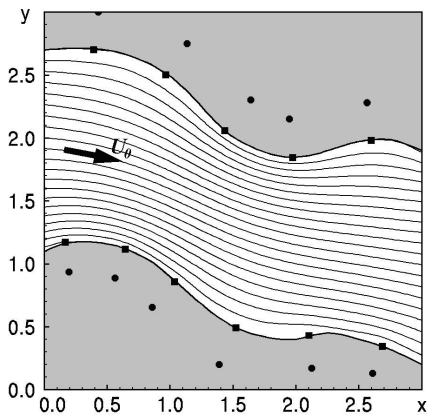


Рис.1. Распределение функции тока в проливе

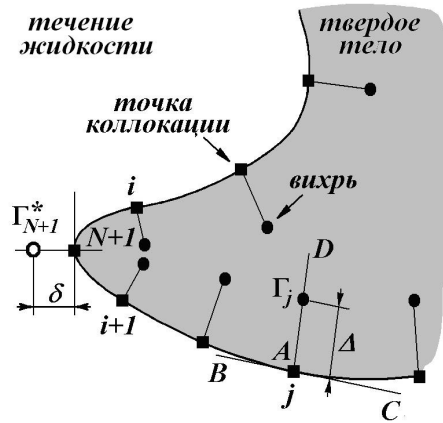


Рис.2. Схема расположения точечных вихрей и точек коллокации на участке границы течения

Удачный выбор определяет успех решения задачи. Количество точек коллокации зависит от изрезанности береговой линии рассматриваемого региона. Следуя [11], напомним рекомендацию при выборе расстояний между точками коллокации: чем меньше радиус кривизны береговой линии, тем чаще должны располагаться точки коллокации.

Разница в значениях функции тока на границах определяется интегралом

$$\Delta\Psi = \int_0^h U(s) ds. \tag{3}$$

где h – расстояние между границами.

Если граница имеет M выступов, то необходимо добавить в рассматриваемую систему еще M точек коллокации, каждой из которых ставится в соответствие подвижный вихрь Рэнкина [19], смещенный на расстояние δ (рис.2). Интенсивности Γ_i вихрей определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений ($i, j=1, \dots, N, N+1, \dots, N+M.$) [17]:

$$\Gamma_i \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] = 4\pi\Psi_j + \sum_{k=1}^K \Gamma_k \ln[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2], \tag{4}$$

где $\Gamma_k = \Gamma_k^{(0)} \exp[-\alpha(t - t_k)]$.

В приведенном выражении K – количество оторвавшихся от выступов вихрей Рэнкина с начальной интенсивностью $\Gamma_k^{(0)}$, оторвавшихся с выступов в момент t_k , α – показатель диссипации интенсивности вихрей [18]. Распределение функции тока определяется суммированием вкладов каждого из вихрей в рассматриваемой системе. Пример распределения функции тока в течении показан на рис.1. Совпадение линий тока с границами области течения свидетельствует о выполнении граничного условия на всех точках границы течения. Последующее дифференцирование выражений (2) по координатам

позволяет определить распределение поля скорости $U(x,t)$ в произвольной точке рассматриваемого течения.

4. Адвекция жидкости в морском проливе

Структура и топология гидродинамических течений в морских проливах, фиордах и заливах во многом зависит от особенностей береговой линии. Строительство дамбы (2003), соединяющей Таманский полуостров с островом Тузла в Керченском проливе, – яркий пример техногенного воздействия, которое вызывало глобальное изменение потока в акватории всего пролива. Возрастание в скорости потока в области фарватера приводит к опасным тенденциям в гидрологии Керченского пролива, повышению опасности судоходства при ухудшении погодных условий. Крушение (11 ноября, 2007) танкера “Волганефть-139” в Керченском проливе привело к экологической катастрофе, в результате которого более чем 1300 т сырой нефти вылилось на поверхность моря.

В качестве примера прогноза распространения локального загрязнения в акватории мелководного Керченского пролива (со сложной береговой линией, с возведенным участком дамбы около острова Тузла), рассматривается модельная задача об адвекции выделенной жидкости в двухсвязной области с кусочно-гладкой границей. Высокая скорость потока (0.4-0.6 м/с), малая глубина (4-8 м) и большой годовой расход (40-50 км³/год) являются основными гидрологическими особенностями пролива. На рис.3 показан спутниковый снимок [20] Керченского пролива с масштабной линейкой, помещенной в нижней части рисунка.



Рис.3. Спутниковый снимок Керченского пролива [20]

Характерными величинами для задачи являются: L – характерный размер сечения пролива, V – характерная скорость (средняя скорость в поперечном сечении пролива).

Береговая линия пролива обладает резкими выступами, на которых формируются крупномасштабные вихревые структуры: в районе г. Керчь, южная оконечность Таманской косы, Западная и Восточная оконечности о. Тузла, западная оконечность возведенной дамбы и выступ в южной части Керченского пролива со стороны Керченского полуострова [21].

Поместим в начальный момент на морской поверхности, перед входом в Керченский пролив, пятно загрязнения в виде круга радиуса $R=0.4$ с центром в точке с координатами $x_c=0.0$, $y_c=2.0$, как показано на рис.4,а.

На начальном этапе процесса адвекции выделенной жидкости на поверхности пролива происходит постепенное вовлечение выделенной жидкости в основное

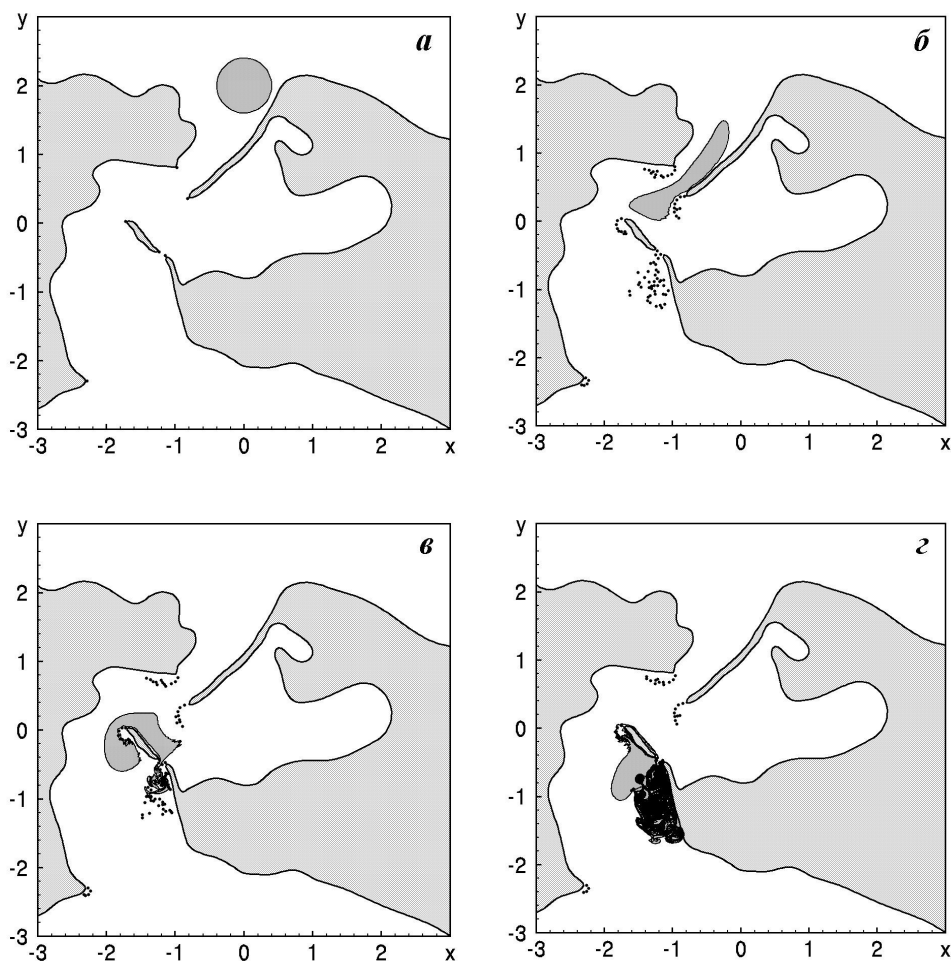


Рис.4. Распространение пятна загрязнения на поверхности Керченского пролива с течением времени: а) $t=0.0$, б) $t=1.5$, в) $t=2.5$, г) $t=3.5$.

течение в области фарватера Керченского пролива. При этом выделенная жидкость вытягивается в направлении пролива. На выступах береговой линии образуется система локализованных вихревых структур. С течением времени выделенная жидкость достигает южной оконечности Таманской косы, вытянувшись в тонкую длинную полосу под влиянием системы крупномасштабных вихрей, сходящих с выступа у г. Керчь и южной оконечности Таманской косы.

Однако приближение выделенной жидкости к о. Тузла существенно притормаживает ее продвижение вдоль Керченского пролива. Около северного побережья о. Тузла начинает формироваться каплеобразная область выделенной жидкости, которая постепенно приближается к острову. Положение выделенной жидкости в характерный момент $t = 1.5$ показан на рис.4,б.

Затем выделенная жидкость начинает обтекать о. Тузла. При этом одна часть проходит между островом и Керченским полуостровом, а другая часть

направляется вдоль северного берега острова в направлении к искусственно возведенной дамбе со стороны Таманского полуострова. При этом последовательность крупномасштабных вихрей, образованная в проливе, образует непроницаемый барьер для выделенной жидкости.

Этот сценарий процесса адвекции продолжается до момента $t = 2.5$ (рис.4,в). Выделенная жидкость разделилась примерно на две части, которые обтекают о.Тузла с противоположных сторон. При этом часть жидкости с северного побережья острова попадает под влияние сильного вихревого течения между о.Тузла и дамбой на Таманском полуострове. С течением времени можно отчетливо заметить регулярную структуру выделенной жидкости, которая обогнула о.Тузла с западной стороны и хаотичную структуру выделенной жидкости, которая протекла между островом и дамбой со стороны Таманского полуострова. Положение выделенной жидкости в момент $t = 3.5$ показано на рис.4,г. Видно, что большая часть выделенной жидкости распространяется вдоль южного побережья Таманского полуострова.

4. Выводы

Рассмотрена задача о двумерной адвекции пассивной примеси морскими течениями с произвольными границами. Численное решение задачи основано на методе дискретных особенностей, адаптированном к двумерным задачам адвекции, который позволяет учесть отрыв крупномасштабных вихревых структур при обтекании выступов береговой линии морскими течениями.

В качестве демонстрационного примера рассмотрено решение задачи об адвекции пассивной примеси морским течением в проливе, береговая линия которого представлена в определенном масштабе. Численное решение задачи не требует больших вычислительных ресурсов и позволяет в первом приближении достаточно быстро получить предварительный прогноз распространения области загрязнения, попавшей на морскую поверхность. Отметим, что расчеты, основанные на адаптированном методе дискретных особенностей, проходят в режиме, который значительно превышает режим реального времени. Предварительные результаты адвекции, полученные указанным выше методом, могут оказать существенную помощь при формировании решений по ликвидации последствий экологических аварий в непосредственной близости к береговым линиям на море и в океане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aref H. The development of chaotic advectons // *Physics of Fluids*. – 2002. – V.14. – p.1315-1325.
2. Mashelkar R.A. Seamless chemical engineering science: the emerging paradigm // *Chem. Eng. Science*. – 1995. – V.50, N.1, – p.1-22.
3. Ottino J.M. *The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport* / Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 683p.
4. Peirson D.H. Interhemispheric transfer of radioactive pollution from nuclear explosions // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. – 1969. – V.A265. – p.295-300.
5. Heaps N.S. A Two-dimensional numerical sea model // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. – 1969. – V.A265. – p.93-197.

6. Коротаев Г.К., Еремеев В.Н. Введение в оперативную океанографию Черного моря / Севастополь: НПЦ “ЭКОСИ-Гидрофизика”, 2006. – 382с.
7. Довгій С.О., Ліфанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування / К.: Наукова думка, 2004. – 510с.
8. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / М.: Наука, 1978. – 351с.
9. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоско-параллельного отрывного обтекания тел / М.: Наука, 1988. – 232с.
10. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Жур. Выч. Математики и Математической Физики. – 1986. – Т.26, N.1. – с.103-113.
11. Горелов Д.Н. К выбору контрольных точек в методе дискретных вихрей // Жур. Прикл. Мех. и Техн. Физ. – 1990. – N.1. – с.167-170.
12. Aref H. Stirring by chaotic advection // JFM. – 1984. – V.143. – p.1-23.
13. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1990. – V.A333. – p.273-288.
14. Mancho A.M. Small D., Wiggins S. A tutorial on dynamical systems concept applied to Lagrangian transport in oceanic flows defined as finite time data sets: Theoretical and computational issues // Phys. Rep. – 2006. – V.437. – p.55-124.
15. Гуржій О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кускової сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доповіді НАН України. – 1996. – N8. – с.54-62.
16. Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей / “Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей” (под ред. Борисова А.В. и др.). – М. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2003. – с.441-467.
17. Гуржий А.А., Черний Д.И. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями // Прикладная гидромеханика. – 2009. – Т.11, N2. – с.30-39.
18. Ламб Г. Гидродинамика / М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 929с.
19. Вилля Г. Теория вихрей. - М.-Л.: Гостехиздат, 1936. – 266с.
20. Google maps (Украина). – Режим доступа: <http://maps.google.com.ua/maps?hl=uk&tab=wl>.
21. Войцеховський С.О., Гаркуша В.І., Витько В.П., Кондратенко О.В., Рябоконеко О.Д., Хорошилов О.В., Черній Д.І. Математична та інформаційна модель гідрологічних процесів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – Вип.4. – с.276-282.