УДК 516.642.7

Об одном классе усложненных квадратурных формул типа дискретных особенностей для сингулярных интегралов с ядром Коши

К. Р. Купатадзе, Д. Г. Саникидзе
Институт вычислительной математики им. Н И. Мусхелишвили, Грузия

Предлагаются определенные квадратурные схемы типа дискретных особенностей, имеющие повышенную алгебраическую степень точности по сравнению с известными ранее аналогичными схемами. Даны оценки порядка приближения на конкретных классах плотностей рассматриваемых сингулярных интегралов.

Ключевые слова: *сингулярный интеграл, квадратурная формула, оценка точности.*

Запропоновано певні квадратурні схеми типу дискретних особливостей, що мають підвищений алгебраїчний ступень точності у порівнянні з аналогічними схемами, які були раніше відомі. Дано оцінки ступеня наближення на конкретних класах функцій щільності сингулярних інтегралів, що розглядаються.

Ключові слова: *сингулярний інтеграл, квадратурна формула, оцінка точності.*

Certain quadrature schemes of discrete singularities type with higher algebraic rate of accuracy comparing with similar schemes known earlier are offered. Approximation rate estimates are given for concrete classes of densities of the considered singular integrals.

Key words: singular integral, quadrature formula, error estimate.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В теории и приложениях методов аппроксимации сингулярных интегралов с ядром Коши видное место за последние годы занимает метод, известный ныне под названием метода дискретных особенностей (МДО), или, по иному, метода дискретных вихрей. Развитию этого метода и различных других его модификаций в значительной мере способствовала вышедшая в 1985 году монография С. М. Белоцерковского и И. К. Лифанова [1]. За этой монографией по аналогичным и смежным вопросам последовали ряд других изданий (см., напр., [2], [3]) и множество научных статей различных авторов.

Имеющиеся ниже рассмотрения в большей степени относятся к применению некоторых уточненных схем типа МДО в случае интегралов вида (рассматриваемых в смысле главного значения по Коши)

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt \qquad (a < t_0 < b) \tag{1}$$

для тех или иных классов гладких на отрезке $[a,b]$ функций φ.

С точки зрения некоторых иных, но в определенной степени родственных с упомянутым подходов ранее в ряде работ (см., напр., статью [4], а также, монографию [5], гл. II) рассматриваются и более общие интегралы вида

$$\int_a^b \frac{\rho(t)\varphi(t)}{t-t_0}dt \qquad (0<t_0<1) \tag{2}$$

с фиксированными весовыми функциями $\rho(t)$. Исходя из того, что возможность построения рассмотренных в [4], [5] формул достигается на основе определенным образом возможного выбора значений параметра сингулярности t_0, их также можно, по-видимому, отнести к числу формул типа МДО. Позже мы еще раз сошлемся на квадратурные формулы для интегралов вида (2). Тем не менее, основные наши рассмотрения в данной заметке будут относиться к рассмотрению ряда вопросов теории и применения построенной ниже одной конкретной квадратурной схемы МДО повышенной степени точности преимущественно для сингулярных интегралов (1). Рассматриваемая квадратурная схема далее используется, как в [1] (гл.1, §3), для построения усложненного (по терминологии из [6]) квадратурного процесса для таких интегралов.

Отметим, что существующие ныне в литературе вычислительные схемы, построенные на основе МДО, обладают значительной простотой, и, тем самым, удобством их реализации. Тем не менее, существенно, что известные по настоящее время такие квадратурные схемы построены на основе применения известной формулы прямоугольников для обычных (регулярных) интегралов и их степень точности, как правило, невелика. Это обстоятельство естественным образом отражается и приведенными в [1] соответствующими оценками. По самому построению указанного в [1] квадратурного процесса данные там оценки погрешности справедливы при значениях параметра сингулярности t_0, представляющих серединные точки соответствующих отрезков сингулярности (собственно, в точках, в которых сам построенный упомянутым образом квадратурный процесс и рассматривается). Тем самым, построенная таким образом сумма принимается за приближенное значение данного сингулярного интеграла именно при соответствующих значениях параметра t_0.

В связи со сказанным выше естественен вопрос о нахождении возможности построения формул типа дискретных особенностей, имеющих более высокую степень точности, вместе с изучением также возможности аппроксимации интегралов вида (1) также при других значениях параметра сингулярности t_0. Дальнейшие рассмотрения настоящей заметки относятся к изучению этих вопросов.

2. Построение схем типа МДО повышенной степени точности

Проследив более детально схему построения квадратурной формулы дискретных вихрей в [1], убеждаемся, что в соответствующем построении существенным фактором является равенство коэффициентов квадратурной формулы, имеющее в данном случае место в формуле прямоугольников. Это обстоятельство наводит на соображение, что для построения квадратурных формул типа МДО повышенной точности использовать более точные, чем формула прямоугольников, квадратурные формулы для обычных (регулярных) интегралов с равными коэффициентами.

Согласно теории квадратурных формул (см., напр., [7], гл. 13; [8], гл. 10), таковыми (в случае постоянной весовой функции) являются известные формулы Чебышева. Эти формулы возможны лишь при определенном числе узлов N, в частности, при $N=\overline{1,7}$ и $N=9$. Здесь мы более детально будем рассматривать случай $N=4$. Для этого выпишем соответствующую формулу для некоторой функции $\varphi(t)$:

$$\int_a^b \varphi(t)dt \approx \frac{b-a}{4}\left\{\varphi\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}t_1\right)+\varphi\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_1\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}t_2\right)+\varphi\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_2\right)\right\}$$

с данными значениями t_1, t_2. (см., напр., [7]). Формула эта является точной всякий раз, когда функция $\varphi(t)$ представляет произвольный многочлен степени ≤ 3.

Учитывая сказанное и заменив $\varphi(t)$ на $\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$, в соответствии мы будем рассматривать следующую квадратурную формулу (для упрощения записей полагаем $a=0, b=1$):

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \approx \frac{1}{4}\left\{\frac{\varphi(1/2-t_1/2)-\varphi(t_0)}{1/2-t_1/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_1/2)-\varphi(t_0)}{1/2+t_1/2-t_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(1/2-t_2/2)-\varphi(t_0)}{1/2-t_2/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_2/2)-\varphi(t_0)}{1/2+t_2/2-t_0}\right\}. \tag{3}$$

Последняя формула является точной, когда $\varphi(t)$ _ произвольный многочлен степени ≤ 4. Теперь в сумме в правой части (3) будем выбирать t_0 по условию

$$\frac{1}{1/2-t_1/2-t_0}+\frac{1}{1/2+t_1/2-t_0}+\frac{1}{1/2-t_2/2-t_0}+\frac{1}{1/2+t_2/2-t_0}=0. \tag{4}$$

Одним из таких значений t_0, как это непосредственно следует из (4), является 1/2, остальные же корни уравнения (4), как показывают элементарные преобразования, могут быть найдены из решения следующего квадратного уравнения

$$(t_0-1/2)^2-\frac{t_1^2+t_2^2}{8}=0.$$

Используя приведенные в [7] значения $t_1 = 0.187592$, $t_2 = 0.794654$, в результате для решения последнего уравнения мы для $t_0 = t_{01}, t_{02}$ получаем значения (сохраняя по 7 десятичных знаков в вычислениях) $t_{01} \approx 0.2113255$, $t_{02} \approx 0.7886745$, находящиеся внутри отрезка [0, 1] (и равноудаленные от его концов). Тем самым, при значениях $t_0 = 1/2$, $t_0 = t_{01}, t_{02}$ квадратурная формула (3) принимат вид

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \approx \frac{1}{4}\left\{\frac{\varphi(1/2-t_1/2)}{1/2-t_1/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_1/2)}{1/2+t_1/2-t_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(1/2-t_2/2)}{1/2-t_2/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_2/2)}{1/2+t_2/2-t_0}\right\},$$

или, иначе (см. [9], §13)

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \approx \varphi(t_0)\left[\ln\frac{1-t_0}{-t_0}-\pi i\right]+\frac{1}{4}\left\{\frac{\varphi(1/2-t_1/2)}{1/2-t_1/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_1/2)}{1/2+t_1/2-t_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(1/2-t_2/2)}{1/2-t_2/2-t_0}+\frac{\varphi(1/2+t_2/2)}{1/2+t_2/2-t_0}\right\} \tag{5}$$

при надлежащем выборе (см. там же) ветви логарифма. В частности, при $t_0 = 1/2$ последнее выражение обращается в нуль и, тем самым, имеем квадратурную формулу для интеграла (1)

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-1/2}dt \approx \frac{1}{4}\left\{\frac{\varphi(1/2-t_1/2)}{-t_1/2}+\frac{\varphi(1/2+t_1/2)}{t_1/2}+\frac{\varphi(1/2-t_2/2)}{-t_2/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(1/2+t_2/2)}{t_2/2}\right\}, \tag{6}$$

представляющую четырехточечный аналог формулы классической схемы метода дискретных вихрей. Можно проследить, что (6) переходит в точное равенство для $\varphi(t)$ _ произвольных многочленов степени ≤ 4. Аналогичное справедливо и для более общей формулы (5). К тому же следует подчеркнуть, что квадратурная сумма в (5) обладает аппроксимирующим свойством не только при $t_0 = 1/2$, а еще и при других двух значениях t_{01}, t_{02} параметра сингулярности t_0.

Соответствующая реализация, очевидно, в отличие от (6), требует дополнительно вычисления значений $\varphi(t_{01})$, $\varphi(t_{02})$. В ином случае вместо непосредственного вычисления этих величин возможно применение четырехточечной интерполяции функции φ по входящим в соответствующую квадратурную сумму ее значениям в узлах. Тем самым, исходя из (5), при значениях $t_0 = t_{01}, t_{02}$ будем иметь следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \approx L_4(\varphi;t_0)\ln\frac{1-t_0}{t_0} + \frac{1}{4}\left\{\frac{\varphi(1/2-t_1/2)}{1/2-t_1/2-t_0} + \frac{\varphi(1/2+t_1/2)}{1/2+t_1/2-t_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi(1/2-t_2/2)}{1/2-t_2/2-t_0} + \frac{\varphi(1/2+t_2/2)}{1/2+t_2/2-t_0}\right\},$$

где $L_4(\varphi;t_0)$ $(t_0 = t_{01}, t_{02})$ – упомянутый многочлен (степени ≤ 3), осуществляющий упомянутую интерполяцию функции $\varphi(t_0)$ в сингулярных точках t_{01}, t_{02}.

Дальнейшим вопросом является изучение точности предложенных выше квадратурных формул для сингулярных интегралов. Приступая к этому вопросу, прежде будем исходить из приведенной выше обычной квадратурной формулы Чебышева. Воспользовавшись известным представлением остаточного члена квадратурных формул (см., напр., [6]), будем основываться на том, что указанная выше формула Чебышева является точной всякий раз, когда подинтегральная функция $\varphi(t)$ представляет произвольный многочлен степени ≤ 3. Тем самым легко проследить, что квадратурная формула (3) является точной для многочленов $\varphi(t)$ степени ≤ 4. Аналогичное справедливо и для формулы (5) и также для (6) (заметив, что в последней значения $\varphi(t)$ могут быть заменены везде через соответствующие значения $\varphi(t)-\varphi(t_0)$).

Учитывая сказанное, для представления остаточных членов этих формул воспользуемся разложением функции $\varphi(t)$ в окрестности точки t_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральном виде. На основании этого, при условии принадлежности $\varphi(t)$ классу функций с ограниченной интегрируемой r–ой $(1 \le r \le 5)$ производной, для их остаточных членов при указанных значениях r справедливы оценки вида

$$M_r \sup_{0\le t\le 1}\left|\varphi^{(r)}(t)\right| \quad (M_r = const).$$

В случае соответствующих формул с отрезком интегрирования $[a,b]$ оценки эти принимают вид

$$M_r(b-a)^{r-1}\sup_{a\le t\le b}\left|\varphi^{(r)}(t)\right| \quad (1 \le r \le 5)\,. \tag{7}$$

Теперь, подобно тому, как в [1], займемся вопросом построения усложненной квадратурной формулы на основе формул (5), (6). Разбивая отрезок $[a,b]$ на n равных между собой отрезков $[a_\sigma, a_{\sigma+1}]$ ($\sigma=\overline{0,n-1}$; $a_0=a$, $a_n=b$), представим рассматриваемый сингулярный интеграл (1) суммой интегралов по указанным отрезкам. Для определенности рассмотрим более детально случай применения формулы (6) (когда t_0 пробегает серединные точки рассматриваемых отрезков $[a_\sigma, a_{\sigma+1}]$). Оценки, соответствующие значениям $t_0=t_{01}, t_{02}$, не отличаются существенно от получаемых в упомянутом случае. Полагая, что $\sigma=\nu$ соответствует тому частичному отрезку $[a_\nu, a_{\nu+1}]$, для которого $t_0=(a_\nu+a_{\nu+1})/2$, то остальные интегралы в соответствующей сумме, очевидно, представляют интегралы типа Коши. Вычисление сингулярных интегралов для таких t_0 может быть осуществлено применением формулы (6).

Что касается интегралов типа Коши, то мы в данном случае (в отличие от рассмотренного в [1]) их вычисление будем основывать на определенной аппроксимации плотности $\varphi(t)$ в этих интегралах. Тем самым наши последующие рассмотрения будут относиться к построению вычислительной схемы для входящих в сумму

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int_{a_\sigma}^{a_{\sigma+1}}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \qquad (\sigma\neq\nu) \tag{8}$$

интегралов. Обозначим через $L_{n\sigma}(\varphi;t)$ при соответствующих σ интерполяционный многочлен относительно t, построенный по значениям функции $\varphi(t)$ в четырех узлах, представляющих узлы (абсциссы) соответствующей отрезку $[a_\sigma, a_{\sigma+1}]$ квадратурной формулы Чебышева. Тем самым, за приближенные значения интегралов типа Коши по отрезкам $[a_\sigma, a_{\sigma+1}]$ ($\sigma\neq\nu$) будем принимать интегралы

$$\int_{a_\sigma}^{a_{\sigma+1}}\frac{L_{n\sigma}(\varphi;t)}{t-t_0}dt$$

при соответствующих значениях σ. Для вычисления этих интегралов воспользуемся преобразованием

$$\int_{a_\sigma}^{a_{\sigma+1}}\frac{L_{n\sigma}(\varphi;t)}{t-t_0}dt = L_{n\sigma}(\varphi;t)\ln\frac{a_{\sigma+1}-t_0}{a_\sigma-t_0}+\int_{a_\sigma}^{a_{\sigma+1}}\frac{L_{n\sigma}(\varphi;t)-L_{n\sigma}(\varphi;t_0)}{t-t_0}dt,$$

где интегралы в правой части для указанных σ вычисляются элементарным образом. Под $\ln\frac{a_{\sigma+1}-t_0}{a_\sigma - t_0}$ подразумевается (см. [9], гл.I) соответствующее значение функции $\ln\frac{a_{\sigma+1}-z}{a_\sigma - z}$ (голоморфной на плоскости с разрезом по $[a,b]$), исчезающей на бесконечности.

Остановимся теперь вкратце на оценках порядка точности построенной усложненной квадратурной формулы, обращаясь, в первую очередь, к формулам для сингулярных интегралов на отрезках $[a_\nu, a_{\nu+1}]$:

$$\int\limits_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt .$$

Используя оценки остаточных членов, содержащих выражение вида (7), то относительно соответствующей погрешности можно утверждать оценку $O(n^{-4})$, выполняющуюся равномерно относительно $\nu = \overline{0, n-1}$. Что касается оценки аппроксимации погрешности интегралов типа Коши в рассматриваемой усложненной квадратурной сумме (основанной на аппроксимации плотности $\varphi(t)$ соответствующими интерполяционными многочленами $L_{n\sigma}(\varphi; t_0)$), то аналогичным же подходом можно убедиться, что погрешность указанной выше аппроксимации суммы интегралов (8) имеет оценку $O(n^{-4}\ln n)$ $(n>1)$, равномерную относительно t_0 и ν (при этом соответствующая оценка на рассматриваемых отрезках содержит величину вида $\sup\left|\varphi^{(4)}(t)\right|$).

В самом начале уже упоминалось о квадратурных формулах, в определенной степени принадлежащих классу формул типа МДО для интегралов вида (2) (частным случаем которых является рассматриваемый здесь интеграл (1)). Эти формулы являются формулами типа Гаусса (имеют наивысшую алгебраическую степень точности) и справедливы также в определенном множестве значений точек сингулярности t_0. Наиболее простой из таких формул является квадратурная формула, соответствующая чебышевскому весу $\rho(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}$. Ее узлами являются нули известного полинома Чебышева (первого рода), а множество точек сингулярности составляют нули полинома Чебышева второго рода (на единицу меньшей степени).

В случае постоянного веса $\rho(t) \equiv 1$ соответствующая квадратурная формула для интеграла (1) содержит в качестве узлов и коэффициентов узлы и коэффициенты, представляющие соответственно узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса при постоянной весовой функции. Множество точек сингулярности, в которых соответствующая формула справедлива, опреджеляется более сложным образом (см., напр., [4, 5]).

Ради полноты отметим, что для аналогичных сингулярных интегралов в заметке [10] предложены квадратурные формулы другой структуры. Они имеют интерполяционную (но не наивысшую) алгебраическую степень точности. Однако, эти формулы применимы к приближенному вычислению соответствующих интегралов при произвольных фиксированных значениях параметра сингулярности t_0 из интервала интегрирования.

Работа выполнена при поддержке гранта GNSF/ST08/3-390.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256с.
2. Лифанов И.К.. Метод сингулярных интегральных уранений и численный эксперимент. – М.: Янус, 1995. – 519с.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. –М.: Янус-К, 2001. – 508с.
4. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. //Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений». – Москва, 1964. – С. 64-74.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова Думка, 1976. – 443с.
6. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 255с.
7. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. – М.: Гостехиздат, 1953. – 527с.
8. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500с.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гостехиздат, 1962. – 599с.
10. Саникидзе Д.Г. О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами // Изв.АН Арм.ССР, матем. - 1970. - 5, № 4. - С.371-384.

Надійшла – 29.03.2011.