УДК 519.9

Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

В статье рассматривается кубатурная формула вычисления 2 D коэффициентов Фурье на классе функций, у которых смешанные производные второго или четвертого порядка постоянны, с использованием интерлинации функций. Информация о функции задана её следами на системе взаимно-перпендикулярных прямых. Доказывается, что кубатурная формула является оптимальной по точности на этом классе функций.

Ключевые слова: интерлинация, сплайн-интерполяция, сплайн-интерлинация, оптимальная по точности кубатурная формула, 2 D коэффициенты Фурье

В статті розглядається кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є на класі функцій, у яких мішані похідні другого або четвертого порядку сталі, з використанням інтерлінації функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доводиться, що кубатурна формула є оптимальною за точністю.

Ключові слова: інтерлінація, сплайн-інтерполяція, сплайн-інтерлінація, оптимальна за точністю кубатура формула, 2 D коефіцієнти Фур'є.

The paper is devoted to formula of the evaluating of two dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interlineation on the class of function with constant derivatives on the lines. Information about functions is a set of traces of functions on the perpendicular lines. This formula is optimal by exactness.

Key words: Interlineation, spline-interpolation, spline-interlineation, optimal by exactness cubature formula, two dimensions of Fourier's coefficients.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

При наближені функцій двох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, значення функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій відповідно [1] на різних класах функцій. Важливим кроком в розв'язанні такої задачі є обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій (інформація про $f(x,y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих). Актуальним є і застосування теорії оптимальних алгоритмів при розв'язанні даної задачі, тобто використання оптимальних або близьких до них кубатурних формул обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є.

2. Дослідження авторів

В цифровій обробці сигналів все частіше розглядається новий сітковий інформаційний оператор-інтерполянт побудований з використанням інтерлінанту [1]. На його основі будуються нові кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації на різних класах функцій [2]. Основною перевагою цих кубатурних формул є на порядок зменшене використання значень підінтегральної функцій порівняно з класичними формулами для досягнення заданої точності.

Важливими результатами авторів є побудова кубатурних формул обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію задана на лініях. В роботі [3] розглядаються оптимальні за порядком точності кубатурні формули на класі функцій з обмеженими мішаними похідними на лініях ректангуляції, в [4], [5] розглядаються кубатурні формули на класі функцій, в якому мішані похідні другого або четвертого порядку функції двох змінних на лініях обмежені або дорівнюють одиниці відповідно, але не доводилась оптимальність за точністю таких кубатурних формул.

3. Нерозв'язані проблеми та цілі роботи

На класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що $f^{(p,p)}(x,y)=M$, $p=1,2$, побудована кубатурна формула наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій (випадок, коли інформація про функцію задана на лініях) [5]. Не було доведено, що така кубатурна формула є оптимальною за точністю. Для досягнення цієї мети поставлена наступна задача. Довести, що похибка обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є кубатурною формулою на класі функцій з постійними мішаними похідними другого або четвертого порядку, дорівнює нулю.

4. Оптимальна за точністю кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій

Використання нових інформаційних операторів зумовлює новий підхід до отримання оцінок в теорії оптимальних алгоритмів. В цифровій обробці сигналів в якості множини кубатурних формул для наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючої функції двох змінних $I(f,\omega)$ розглядають множину кубатурних формул ℓ_N, що використовують інформація про функцію не більше ніж на N лініях або площинах відповідно. Якщо $R(f,\omega,\ell_N)$ похибка наближеного обчислення $I(f,\omega)$ кубатурною формулою $\ell_N: R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$, то похибкою кубатурної формули ℓ_N на класі F називають величину $R(f,\omega,\ell_N)=\sup\limits_{f(x)\in F}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Оптимальною похибкою чисельного інтегрування на класі називають $R_N(F,\omega)=\inf\limits_{\ell_N\in L_N}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Щоб отримати оцінку знизу величини $R_N(F,\omega)$ спочатку для фіксованої кубатурної формули ℓ_N отримують оцінку знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$. Якщо ця оцінка знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$ не залежить від кубатурної формули ℓ_N, то ця ж оцінка справедлива і для величини $R_N(F,\omega)$. Для отримання оцінок знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$ використовують метод "капелюхів". Кубатурна формула ℓ_N^*, на якій досягається $R_N(F,\omega)$, називається оптимальною за точністю.

Розглянемо допоміжні функції, які використовуються для побудови кубатурної формули наближення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних.

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1\end{cases}\qquad H_{10}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_1}{-\Delta}, & y_0\le y<y_1,\\ 0, & y\ge y_1\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1},\\ \dfrac{x-x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1}\le x<x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1},\end{cases}\qquad H_{1j}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{j-1}\\ \dfrac{y-y_{j-1}}{\Delta}, & y_{j-1}\le y<y_j\\ \dfrac{y-y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j\le y<y_{j+1},\\ 0, & y\ge y_{j+1}\end{cases},$$

$$k,j=\overline{1,\ell-1};$$

$$h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1}\\ \dfrac{x-x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1}\le x<x_\ell,\end{cases}\qquad H_{1\ell}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{\ell-1}\\ \dfrac{y-y_{\ell-1}}{\Delta}, & y_{\ell-1}\le y<y_\ell,\end{cases}$$

$$x_k=k\Delta,\ y_j=j\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell}.$$

Тоді оператор-інтерлінант

$$Of(x,y)=\sum_{k=0}^{\ell}h_{1k}(x)f(x_k,y)+\sum_{j=0}^{\ell}H_{1j}(y)f(x,y_j)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}f(x_k,y_j)h_{1j}(x)H_{1j}(y),$$

має наступні властивості

1. $Of(x_k,y)=f(x_k,y),\quad k=\overline{0,\ell},\quad Of(x,y_j)=f(x,y_j),\quad j=\overline{0,\ell}$;
2. $|f(x,y)-Of(x,y)|=O\left(\dfrac{1}{\ell^{2p}}\right)=O(\Delta^{2p})\quad p=1,2\quad \forall(x,y)\in D$.

Для обчислення інтегралів

$$I_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy,$$

$$I_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\cos(2\pi mx)\cos(2\pi ny)\,dxdy$$

пропонуються формули, побудовані заміною функції $f(x,y)$ оператором інтерлінантом $Of(x,y)$:

$$\Phi_1^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Of(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)dxdy$$

$$\Phi_2^2(m,n)=\int_0^1\int_0^1 Of(x,y)\cos(2\pi mx)\cos(2\pi ny)dxdy\,.$$

Підставимо вираз для оператора-інтерлінанта. Отримаємо кубатурні формули наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій, коли інформація про функцію задана на лініях – системі взаємно-перпендикулярних прямих

$$\Phi_1^2(m,n)=\sum_{k=0}^{\ell}\int_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)dx\int_0^1 f(x_k,y)\sin(2\pi ny)dy+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell}\int_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)dy\int_0^1 f(x,y_j)\sin(2\pi mx)dx-$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)dx\int_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)dy\ ,$$

$$\Phi_2^2(m,n)=\sum_{k=0}^{\ell}\int_0^1 h_{1k}(x)\cos(2\pi mx)dx\int_0^1 f(x_k,y)\cos(2\pi ny)dy+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell}\int_0^1 H_{1j}(y)\cos(2\pi ny)dy\int_0^1 f(x,y_j)\cos(2\pi mx)dx-$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k,y_j)\int_0^1 h_{1k}(x)\cos(2\pi mx)dx\int_0^1 H_{1j}(y)\cos(2\pi ny)dy\ .$$

Покажемо, що дані кубатурні формули є оптимальними за точністю. Розглянемо допоміжні леми.

Лема 1. Якщо $x_k=k\Delta,\ \Delta=\dfrac{1}{\ell},\ k=\overline{0,\ell}$, то

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\sin 2\pi mx dx=0\,.$$

Доведення. Застосовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\sin 2\pi mx dx=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}\left(-\sin 2\pi mx_k-\sin 2\pi mx_{k+1}\right)+\frac{1}{2\pi^2m^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin 2\pi mx dx\,.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}\left(-\sin 2\pi m x_k-\sin 2\pi m x_{k+1}\right)+\frac{1}{2\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\sin 2\pi m x dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\left(\sin 2\pi m x_k+\sin 2\pi m x_{k+1}\right)+\frac{1}{2\pi^2m^2}\int\limits_0^1\sin 2\pi m x dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\left(\sin 2\pi m x_0+2\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k+\sin 2\pi m x_\ell\right)=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}2\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k .$$

Скориставшись формулою [6]

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq 2\pi r,\quad r\in Z$$

при $\alpha=\frac{2\pi m}{\ell}$, $n=\ell-1$, отримаємо $\sum\limits_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k=0$, що доводить лему 1.

Лема 2. Якщо $x_k=k\Delta,\quad \Delta=\frac{1}{\ell},\quad k=\overline{0,\ell}$, то

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi m x dx=0 \text{, при } m\neq\ell .$$

Доведення. Проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi m x dx=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}\left(-\cos 2\pi m x_k-\cos 2\pi m x_{k+1}\right)-\frac{1}{2\pi^2m^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\cos 2\pi m x dx .$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}\left(-\cos 2\pi m x_k-\cos 2\pi m x_{k+1}\right)-\frac{1}{2\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\cos 2\pi m x dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\left(\cos 2\pi m x_k+\cos 2\pi m x_{k+1}\right)+\frac{1}{2\pi^2m^2}\int\limits_0^1\cos 2\pi m x dx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\left(\cos 2\pi m x_0+2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi m x_k+\cos 2\pi m x_\ell\right)=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi m x_k+1\right).$$

Скориставшись формулою [6]

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+...+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq 2\pi r,\quad r\in Z,$$

при $\alpha=\frac{2\pi m}{\ell}$, $n=\ell-1$, отримаємо $\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi m x_k=-1$, що доводить лему 2.

Теорема 1. Кубатурна формула $\Phi_1^2(m,n)$ є оптимальною за точністю для обчислення $I_1^2(m,n)$.

Доведення. Маємо наступну оцінку

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Of(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left(f(x,y)-Of(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}f^{(p,p)}(\xi,\eta)G_{1k}(x,\xi,p)G_{2j}(y,\eta,p)d\xi d\eta\times$$

$$\times\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}G_{1k}(x,\xi,p)G_{2j}(y,\eta,p)d\xi d\eta\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy,$$

$$G_{1k}(x,\xi,p)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_k<\xi<x,\\[2mm] \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}\qquad p=1,2,$$

$$G_{2j}(y,\eta,p)=\begin{cases}\dfrac{y_{j+1}-y}{y_{j+1}-y_j}\dfrac{(y_j-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}, & y_j<\eta<y,\\[2mm] \dfrac{y_j-y}{y_{j+1}-y_j}\dfrac{(y_{j+1}-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}, & y<\eta<y_{j+1},\end{cases}\qquad p=1,2.$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}G_{1k}(x,\xi,p)d\xi\sin 2\pi mx=0$, оскільки при $p=1$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}G_{1k}(x,\xi,p)d\xi=\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x}d\xi+\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x}^{x_{k+1}}d\xi=$$

$$= \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k)+\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x)=0,$$

а при $p=2$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,p)d\xi = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x}(x_k-\xi)d\xi+\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_k-\xi)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x}-\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_{k+1}-\xi)^2}{2}\Bigg|_{x}^{x_{k+1}}=$$

$$=-\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_k-x)^2}{2}+\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2}=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x)(x_k-x)}{2(x_{k+1}-x_k)}\left(-(x_k-x)+x_{k+1}-x\right)=\frac{(x_{k+1}-x)(x_k-x)}{2}.$$

Отже, згідно лемі 1 $\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,p)d\xi \sin 2\pi m x dx=0$. Аналогічно доводиться, що $\sum_{j=0}^{\ell-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} G_{2j}(y,\eta,p)d\eta \sin(2\pi n y)dy=0$.

Таким чином, $\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=0$ і формула $\Phi_1^2(m,n)$ є оптимальною за точністю.

Теорема 2. Кубатурна формула $\Phi_2^2(m,n)$ є оптимальною за точністю для обчислення $I_2^2(m,n)$ при $m\neq\ell$.

Доведення базується на лемі 2 та аналогічне доведенню теореми 1.

5. Обчислювальний експеримент та оцінки точності наближення

Для $f(x,y)=xy$, $p=1$, $M=1$ результати обчислень наводяться в Табл.1.

Табл.1.

m	n	ℓ	$I_1^2(m,n)$	$\Phi_1^2(m,n)$	$\rho\left(I_1^2,\Phi_1^2\right)$
2	3	10	0.004221715985097	0.004221715985097	0
		20	0.004221715985097	0.004221715985097	0
		30	0.004221715985097	0.004221715985097	0

Для $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{4}$, $p=2$, $M=1$ результати обчислень наводяться в Табл.2.

Табл.2.

m	n	ℓ	$I_1^2(m,n)$	$\Phi_1^2(m,n)$	$\rho\left(I_1^2,\Phi_1^2\right)$
2	3	10	0.001055428996274	0.001055428996274	0
		30	0.001055428996274	0.001055428996274	0

9	8	10	0.000117269888481	0.000117269888481	0
		70	0.000117269888481	0.000117269888481	0

Результати обчислень підтверджують теоретичні висновки.

6. Висновки за результатами та подальші дослідження

В статті розглядаються кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є на класі функцій, у яких мішані похідні другого та четвертого порядку сталі, з використанням інтерлінації функцій. Інформація про функцію задана на лініях – слідах функції на взаємно-перпендикулярних прямих. Доведено, що кубатурна формула є оптимальною за точністю. Дані результати будуть істотно використані при побудові оптимальних за точністю кубатурних формул обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на відповідних класах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.
2. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. –Харків, 2009. -136 с.
3. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доповіді НАН України.-Київ, N 6, 2006 р.- С. 9-13.
4. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18-21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211–213.
5. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАН України. - 2010. N 3, - С. 24-29.
6. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Москва. Наука, 1982. -335 с.

Надійшла – 27.03.2011.