УДК 519.832.4

# Сім типів розв'язку однієї антагоністичної строго опукло-вгнутої гри з добутком стратегій гравців у ядрі

В. В. Романюк
*Хмельницький національний університет, Україна*

Представлено сім типів розв'язку однієї антагоністичної строго випукло-вгнутої гри, ядро якої складається з суми зважених квадратів стратегій гравців, зваженого добутку цих стратегій та зваженої стратегії другого гравця. Виявлено, як кожен з типів отриманих розв'язків визначається відповідними співвідношеннями у ядрі гри.

***Ключові слова:*** *антагоністична гра, строга опукло-вгнутість, ядро гри.*

Представлено семь типов решения одной антагонистической строго выпукло-вогнутой игры, ядро которой состоит из суммы взвешенных квадратов стратегий игроков, взвешенного произведения этих стратегий и взвешенной стратегии второго игрока. Выявлено, как каждый из типов полученных решений определяется соответствующими соотношениями в ядре игры.

***Ключевые слова:*** *антагонистическая игра, строгая выпукло-вогнутость, ядро игры.*

There have been represented seven types of the solution of an antagonistic strictly convex-concave game, which kernel consists of the sum of the weighted squares of strategies of the players, the weighted product of those strategies and the weighted strategy of the second player. It has been revealed, how each of the types of the obtained solutions is determined by the corresponding relationships within the game kernel.

***Key words:*** *antagonistic game, strict convex-concavity, game kernel.*

## 1. Вступ

Ігрове математичне моделювання конфліктно-керованих соціальних і техніко-економічних систем відіграє вагому роль при їх дослідженні та прогнозуванні їх розвитку. Як правило, фундаментальними моделями таких систем є континуальні нескінченні антагоністичні ігри. Серед континуальних нескінченних антагоністичних ігор чільне місце займають ігри на одиничних гіперкубах. У частинному випадку множинами $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$ та $\boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$ чистих стратегій першого і другого гравців відповідно є одиничні сегменти $\boldsymbol{X} = [0;1] = X$ й $\boldsymbol{Y} = [0;1] = Y$. Однак і у разі такого звуження області визначення ядра нескінченної гри існування узагальнених методів знаходження ситуацій рівноваги не гарантоване.

## 2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Однією з найбільш основних і відомих задач, що моделюються як нескінченна гра, є задача про конкуренцію двох фірм на двох ринках збуту, котра полягає у знаходженні раціонального інвестування у кожен ринок для кожної фірми [1, 2]. У загальному виді така задача вирішується на основі розв'язку опуклої антагоністичної гри з довільним ядром [3, 4]. Однак, скажімо, для неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри з ядром [5, 6]

$$H(x, y) = ax^2 + gxy + cy + hy^2 + k , \tag{1}$$

яке задається на одиничному квадраті $D_H = X \times Y = [0; 1] \times [0; 1]$, де $x \in X = [0; 1]$ та $y \in Y = [0; 1]$ є чистими стратегіями першого та другого гравців відповідно, $k \in \mathbb{R}$, і коефіцієнти $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, цей розв'язок необхідно ще знайти [7, 8]. Чисті стратегії гравців відображають об'єми інвестування у кожен ринок. Після визначення усіх ситуацій рівноваги у такій грі можна буде формулювати рекомендації конкурентам щодо їх оптимального поводження на ринках [9]. Подібні нескінченні ігри є моделями досить широкого класу конфліктних процесів, у якому його учасники "рухаються" у межах деякої неперервної лінії відомої довжини, котра нормується до одиничного сегмента з лівим кінцем у початку координат. Зокрема, цією відомою лінією може бути період часу, протягом якого необхідно приймати рішення або здійснювати певну дію, континуальний набір даних, з яких вимагається вибрати найбільш релевантні, а також інші подібні речі [1, 2, 10].

**3. Формулювання завдання дослідження**

Завданням цього дослідження є визначення розв'язку $\mathcal{S} = \{\mathcal{X}_{\mathrm{opt}}, \mathcal{Y}_{\mathrm{opt}}, V_{\mathrm{opt}}\}$ неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри з ядром (1) при вказаних його параметрах, де $\mathcal{X}_{\mathrm{opt}}$ та $\mathcal{Y}_{\mathrm{opt}}$ є множинами оптимальних стратегій першого та другого гравців відповідно, а $V_{\mathrm{opt}}$ є значенням гри.

**4. Повне розв'язування заданої неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри**

Перш за все зауважимо, що оскільки гра є строго опуклою, то $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\dfrac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} > 0$, звідки $\dfrac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$, тобто коефіцієнт $h > 0$. До того ж, для строго вгнутої гри $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\dfrac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} < 0$, звідки $\dfrac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} = 2a < 0$, тобто коефіцієнт $a < 0$.

**Випадок 1.** $g > 0$, $c > 0$. Максимум ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ залежить від того, чи максимум ядра (1) по змінній $x$ належить сегменту $X$. Перша похідна ядра (1) по змінній $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + gxy + cy + hy^2 + k\right) = 2ax + gy \tag{2}$$

перетворюється у нуль у точці $x = x_{\max} = -\dfrac{gy}{2a}$. Точка $x_{\max} = -\dfrac{gy}{2a} \geqslant 0$ при $gy \geqslant 0$, тобто коли $y \in Y$; при цьому точка $x_{\max} = -\dfrac{gy}{2a} \leqslant 1$ при $2a + gy \leqslant 0$, тобто коли $y \leqslant -\dfrac{2a}{g}$. Таким чином, $x_{\max} = -\dfrac{gy}{2a} \in X$ при $y \in \left[0; -\dfrac{2a}{g}\right]$. Але значення

$-\dfrac{2a}{g} > 0$ та $-\dfrac{2a}{g} \leqslant 1$ при $2a+g \geqslant 0$, тобто $-\dfrac{2a}{g} \in (0;\, 1]$ при $2a+g \geqslant 0$.

**Випадок 1.1.** $g>0$, $c>0$; $2a+g<0$. Оскільки $-\dfrac{2a}{g}>1$, то $x_{\max} = -\dfrac{gy}{2a} \in X$ при $y \in Y \subset \left[0;\, -\dfrac{2a}{g}\right]$. Тоді максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ є парабола

$$\max_{x\in X} H(x,\, y) = H(x_{\max},\, y) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, y\right) = a\left(-\frac{gy}{2a}\right)^2 + g\left(-\frac{gy}{2a}\right)y + cy + hy^2 + k =$$

$$= hy^2 - \frac{g^2}{4a}y^2 + cy + k = \frac{4ah-g^2}{4a}y^2 + cy + k\,. \tag{3}$$

Так як $\dfrac{4ah-g^2}{4a} > 0$, то вона має точку глобального мінімуму. Перша похідна функції $H(x_{\max},\, y)$ по змінній $y$

$$\frac{d}{dy}H(x_{\max},\, y) = \frac{d}{dy}H\left(-\frac{gy}{2a},\, y\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{4ah-g^2}{4a}y^2 + cy + k\right) = \frac{4ah-g^2}{2a}y + c \tag{4}$$

перетворюється у нуль у точці $y = y_{\min} = \dfrac{2ac}{g^2-4ah}$, причому $\dfrac{2ac}{g^2-4ah} < 0$. Тоді $y_{\min} < 0$ і для параболи $H(x_{\max},\, y)$ має місце параболічна подвійна нерівність

$$H(x_{\max},\, y_{\min}) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) < H(x_{\max},\, 0) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, 0\right) =$$

$$= H(0,\, 0) < H(x_{\max},\, 1) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, 1\right) = H\left(-\frac{g}{2a},\, 1\right). \tag{5}$$

Відповідно цій нерівності мінімум параболи (3) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) = \min_{y\in Y} H(x_{\max},\, y) = \min_{y\in Y} H\left(-\frac{gy}{2a},\, y\right) =$$

$$= \min\left\{H\left(-\frac{gy}{2a},\, 0\right),\, H\left(-\frac{gy}{2a},\, 1\right)\right\} = H\left(-\frac{gy}{2a},\, 0\right) = H(0,\, 0) = k = V_{\mathrm{opt}} \tag{6}$$

досягається у точці $y = y_{\mathrm{opt}} = 0$, тобто на множині оптимальних чистих стратегій другого гравця $Y_{\mathrm{opt}} = \{0\} = \{y_{\mathrm{opt}}\}$. Звідси множина $\mathscr{Y}_{\mathrm{opt}} = Y_{\mathrm{opt}}$. Множину оптимальних чистих стратегій першого гравця $X_{\mathrm{opt}}$ спочатку намагаються визначити за коренями $x_1$ та $x_2$ квадратного рівняння [1, 7, 8, 10]

$$V_{\mathrm{opt}} = H(x,\, y_{\mathrm{opt}})\,. \tag{7}$$

Для даного випадку коренями відповідного рівняння (7)

$$V_{\mathrm{opt}} = H(0,\, 0) = k = ax^2 + k = H(x,\, 0) = H(x,\, y_{\mathrm{opt}}) \tag{8}$$

є $x_1 = x_2 = 0$, тому $x_1 = x_2 \in X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \{0\}$. Отже, у розглянутому випадку множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \{\{0\}, \{0\}, k\}. \tag{9}$$

**Випадок 1.2.** $g > 0$, $c > 0$; $2a + g \geqslant 0$. Так як $a + gy > 0$ при $y > -\frac{a}{g} > 0$, причому $-\frac{a}{g} < -\frac{2a}{g} \in (0; 1]$, то максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ є функція

$$\max_{x \in X} H(x, y) =$$
$$= \begin{cases} H(x_{\max}, y) = H\left(-\frac{gy}{2a}, y\right) = \frac{4ah - g^2}{4a} y^2 + cy + k, \; y \in \left[0; -\frac{2a}{g}\right], \\ \max\{H(0, y), H(1, y)\} = H(1, y) = a + gy + cy + hy^2 + k, \; y \in \left[-\frac{2a}{g}; 1\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Для визначення мінімуму параболи $H(1, y)$ як частини функції (10) на сегменті $\left[-\frac{2a}{g}; 1\right]$ необхідно спочатку знайти точку глобального мінімуму $y_{\min}^{\langle 1 \rangle}$ цієї параболи і з'ясувати, чи $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} \in \left[-\frac{2a}{g}; 1\right]$. Перша похідна параболи $H(1, y)$ по змінній $y$

$$\frac{d}{dy} H(1, y) = \frac{d}{dy}\left(a + gy + cy + hy^2 + k\right) = g + c + 2hy \tag{11}$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} = -\frac{g+c}{2h}$, причому

$$H\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) = H\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a + g\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + c\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + k =$$
$$= a - \frac{(g+c)^2}{2h} + \frac{(g+c)^2}{4h} + k = a - \frac{(g+c)^2}{4h} + k. \tag{12}$$

Проте при даному співвідношенні коефіцієнтів ядра гри $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} = -\frac{g+c}{2h} < 0$, тому тут для параболи $H(1, y)$ має місце параболічна потрійна нерівність

$$H\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = H\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) < H(1, 0) < H\left(1, -\frac{2a}{g}\right) < H(1, 1), \tag{13}$$

а для параболи $H(x_{\max}, y)$ має місце параболічна потрійна нерівність

$$H(x_{\max}, y_{\min}) = H\left(-\frac{gy}{2a}, \frac{2ac}{g^2 - 4ah}\right) < H\left(-\frac{gy}{2a}, 0\right) = H(0, 0) < H\left(-\frac{gy}{2a}, -\frac{2a}{g}\right) =$$

$$=H\left(1,-\frac{2a}{g}\right)<H\left(-\frac{gy}{2a},1\right)=H\left(-\frac{g}{2a},1\right). \tag{14}$$

Згідно з цими нерівностями, а також згідно з очевидною рівністю

$$H\left(x_{\max},-\frac{2a}{g}\right)=H\left(-\frac{gy}{2a},-\frac{2a}{g}\right)=H\left(1,-\frac{2a}{g}\right), \tag{15}$$

мінімум функції (10) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,\,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{2a}{g}\right]}H(x_{\max},\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a}{g};\,1\right]}H(1,\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{H\left(-\frac{gy}{2a},0\right),H\left(-\frac{gy}{2a},-\frac{2a}{g}\right)\right\},\min\left\{H\left(1,-\frac{2a}{g}\right),H(1,1)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{H(0,0),H\left(1,-\frac{2a}{g}\right)\right\}=H(0,0)=k=V_{\mathrm{opt}} \tag{16}$$

досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}}=\{0\}=\{y_{\mathrm{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}$. Тоді тут із рівняння (8) відразу слідує розв'язок гри (9).

**Випадок 2.1.** $g>0$, $c<0$; $2a+g<0$. Тут $x_{\max}=-\frac{gy}{2a}\in X$ при $y\in Y\subset\left[0;\,-\frac{2a}{g}\right]$, і максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ є парабола (3), точка глобального мінімуму якої $y_{\min}=\frac{2ac}{g^2-4ah}>0$. А взагалі, ця точка $y_{\min}=\frac{2ac}{g^2-4ah}\in(0;\,1]$ при $2a(c+2h)-g^2\leqslant 0$, а $y_{\min}>1$ при $2a(c+2h)-g^2>0$.

**Випадок 2.1.1.** $g>0$, $c<0$; $2a+g<0$; $2a(c+2h)-g^2\leqslant 0$. Очевидно, що мінімум параболи (3) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,\,y)=\min_{y\in Y}H(x_{\max},\,y)=\min_{y\in Y}H\left(-\frac{gy}{2a},\,y\right)=H\left(-\frac{gy}{2a},\,y_{\min}\right)=$$

$$=H\left(-\frac{gy}{2a},\frac{2ac}{g^2-4ah}\right)=\frac{4ah-g^2}{4a}\cdot\frac{4a^2c^2}{\left(g^2-4ah\right)^2}+\frac{2ac^2}{g^2-4ah}+k=-\frac{ac^2}{g^2-4ah}+$$

$$+\frac{2ac^2}{g^2-4ah}+k=\frac{ac^2}{g^2-4ah}+k=H\left(\frac{gc}{4ah-g^2},\frac{2ac}{g^2-4ah}\right)=V_{\mathrm{opt}} \tag{17}$$

досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}}=\left\{\frac{2ac}{g^2-4ah}\right\}=\{y_{\mathrm{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}$. Далі виписуємо відповідне рівняння (7):

$$V_{\mathrm{opt}}=H\left(\frac{gc}{4ah-g^2},\frac{2ac}{g^2-4ah}\right)=\frac{ac^2}{g^2-4ah}+k=$$

$$= ax^2 + gx\frac{2ac}{g^2-4ah} + \frac{2ac^2}{g^2-4ah} + h\frac{4a^2c^2}{\left(g^2-4ah\right)^2} + k =$$

$$= ax^2 + x\frac{2acg}{g^2-4ah} + \frac{2ac^2g^2-4a^2c^2h}{\left(g^2-4ah\right)^2} + k = H\left(x,\ \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) = H\left(x,\ y_{\mathrm{opt}}\right); \quad (18)$$

$$ax^2 + x\frac{2acg}{g^2-4ah} + \frac{2ac^2g^2-4a^2c^2h}{\left(g^2-4ah\right)^2} + k - \frac{ac^2}{g^2-4ah} - k = ax^2 + x\frac{2acg}{g^2-4ah} +$$

$$+\frac{ac^2g^2}{\left(g^2-4ah\right)^2} = a\left(x^2 + x\frac{2cg}{g^2-4ah} + \frac{c^2g^2}{\left(g^2-4ah\right)^2}\right) = a\left(x + \frac{cg}{g^2-4ah}\right)^2 = 0 . \quad (19)$$

Із рівняння (19) випливає, що коренями рівняння (18) є точки $x_1 = x_2 = -\frac{cg}{g^2-4ah} = \frac{cg}{4ah-g^2}$, тому чисті стратегії $x_1 = x_2 \in X$ та множина $X_{\mathrm{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \left\{\frac{cg}{4ah-g^2}\right\}$. Отже, у розглянутому випадку множина $\mathscr{X}_{\mathrm{opt}} = X_{\mathrm{opt}} = \left\{\frac{cg}{4ah-g^2}\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{\frac{cg}{4ah-g^2}\right\},\ \left\{\frac{2ac}{g^2-4ah}\right\},\ \frac{ac^2}{g^2-4ah} + k\right\}. \quad (20)$$

**Випадок 2.1.2.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g < 0$; $2a\left(c+2h\right) - g^2 > 0$. Так як $y_{\min} > 1$, то для параболи $H\left(x_{\max},\ y\right)$ має місце параболічна подвійна нерівність

$$H\left(x_{\max},\ 0\right) = H\left(-\frac{gy}{2a},\ 0\right) = H\left(0,\ 0\right) > H\left(x_{\max},\ 1\right) = H\left(-\frac{gy}{2a},\ 1\right) =$$

$$= H\left(-\frac{g}{2a},\ 1\right) > H\left(x_{\max},\ y_{\min}\right) = H\left(-\frac{gy}{2a},\ \frac{2ac}{g^2-4ah}\right). \quad (21)$$

Тоді мінімум параболи (3) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right) = \min_{y\in Y} H\left(x_{\max},\ y\right) = \min_{y\in Y} H\left(-\frac{gy}{2a},\ y\right) =$$

$$= \min\left\{H\left(-\frac{gy}{2a},\ 0\right),\ H\left(-\frac{gy}{2a},\ 1\right)\right\} =$$

$$= H\left(-\frac{gy}{2a},\ 1\right) = H\left(-\frac{g}{2a},\ 1\right) = \frac{4ah-g^2}{4a} + c + k = c + h - \frac{g^2}{4a} + k = V_{\mathrm{opt}} \quad (22)$$

досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}} = \{1\} = \left\{y_{\mathrm{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}$. Виписуємо відповідне рівняння (7):

$$V_{\mathrm{opt}} = H\left(-\frac{g}{2a},\ 1\right) = c + h - \frac{g^2}{4a} + k = ax^2 + gx + c + h + k =$$

$$= H\left(x, 1\right) = H\left(x, y_{\text{opt}}\right); \tag{23}$$

$$ax^2 + gx + c + h + k - \left(c + h - \frac{g^2}{4a} + k\right) = ax^2 + gx + \frac{g^2}{4a} = a\left(x + \frac{g}{2a}\right)^2 = 0. \tag{24}$$

Із рівняння (24) випливає, що коренями рівняння (23) є $x_1 = x_2 = -\frac{g}{2a} \in \left(0; 1\right)$, тому $x_1 = x_2 \in X$ та $X_{\text{opt}} = \left\{x_1\right\} = \left\{x_2\right\} = \left\{-\frac{g}{2a}\right\}$. Таким чином, множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g}{2a}\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{-\frac{g}{2a}\right\}, \left\{1\right\}, c + h - \frac{g^2}{4a} + k\right\}. \tag{25}$$

**Випадок 2.2.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g \geqslant 0$. Максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ є функція (10), а її мінімум на сегменті $Y$ залежить від того, чи $y_{\min} \in \left[0; -\frac{2a}{g}\right]$, $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\frac{2a}{g}; 1\right]$, причому $y_{\min} = \frac{2ac}{g^2 - 4ah} > 0$. Маємо різницю

$$y_{\min} - \left(-\frac{2a}{g}\right) = \frac{2ac}{g^2 - 4ah} - \left(-\frac{2a}{g}\right) = \frac{2ac}{g^2 - 4ah} + \frac{2a}{g} =$$

$$= \frac{2acg + 2ag^2 - 8a^2h}{g\left(g^2 - 4ah\right)} = \frac{2a}{g\left(g^2 - 4ah\right)}\left[g\left(g + c\right) - 4ah\right], \tag{26}$$

з якої випливає, що $y_{\min} \in \left(0; -\frac{2a}{g}\right)$ при $g\left(g + c\right) - 4ah > 0$. З останньої нерівності слідує співвідношення $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{g + c}{2h} < -\frac{2a}{g}$.

**Випадок 2.2.1.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g \geqslant 0$; $g\left(g + c\right) - 4ah > 0$. Оскільки $y_{\min} \in \left(0; -\frac{2a}{g}\right)$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < -\frac{2a}{g}$, то згідно з подвійною параболічною нерівністю

$$H\left(1, -\frac{g + c}{2h}\right) = H\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) < H\left(1, -\frac{2a}{g}\right) =$$

$$= H\left(x_{\max}, -\frac{2a}{g}\right) = H\left(-\frac{gy}{2a}, -\frac{2a}{g}\right) < H\left(1, 1\right) \tag{27}$$

та нерівністю

$$H\left(x_{\max}, y_{\min}\right) = H\left(-\frac{gy}{2a}, \frac{2ac}{g^2 - 4ah}\right) =$$

$$= H\left(\frac{gc}{4ah - g^2}, \frac{2ac}{g^2 - 4ah}\right) < H\left(x_{\max}, -\frac{2a}{g}\right) = H\left(1, -\frac{2a}{g}\right) \tag{28}$$

мінімум функції (10) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) = \min\left\{ \min_{y\in\left[0;\, -\frac{2a}{g}\right]} H(x_{\max},\, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a}{g};\, 1\right]} H(1,\, y) \right\} =$$

$$= \min\left\{ H(x_{\max},\, y_{\min}),\, \min\left\{ H\left(1,\, -\frac{2a}{g}\right),\, H(1,\,1) \right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{ H\left(-\frac{gy}{2a},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right),\, H\left(1,\, -\frac{2a}{g}\right) \right\} =$$

$$= H\left(-\frac{gy}{2a},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) = \frac{ac^2}{g^2-4ah} + k = H\left(\frac{gc}{4ah-g^2},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) = V_{\text{opt}} \qquad (29)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{ \frac{2ac}{g^2-4ah} \right\} = \{ y_{\text{opt}} \} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Далі із рівнянь (18), (19) випливає множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{ \frac{cg}{4ah-g^2} \right\}$ та розв'язок (20) такої гри.

**Випадок 2.2.2.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g \geqslant 0$; $g(g+c) - 4ah \leqslant 0$. Тут маємо точки $y_{\min} \geqslant -\frac{2a}{g}$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \geqslant -\frac{2a}{g}$. Але $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\frac{2a}{g};\, 1\right]$ ще додатково при $g + c + 2h \geqslant 0$.

**Випадок 2.2.2.1.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g \geqslant 0$; $g(g+c) - 4ah \leqslant 0$; $g + c + 2h \geqslant 0$. Маємо точку $y_{\min} \geqslant -\frac{2a}{g}$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\frac{2a}{g};\, 1\right]$, звідки згідно з подвійною параболічною нерівністю

$$H(x_{\max},\, 0) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, 0\right) = H(0,\, 0) > H\left(x_{\max},\, -\frac{2a}{g}\right) = H\left(-\frac{gy}{2a},\, -\frac{2a}{g}\right) =$$

$$= H\left(1,\, -\frac{2a}{g}\right) \geqslant H(x_{\max},\, y_{\min}) =$$

$$= H\left(-\frac{gy}{2a},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) = H\left(\frac{gc}{4ah-g^2},\, \frac{2ac}{g^2-4ah}\right) \qquad (30)$$

мінімум функції (10) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) = \min\left\{ \min_{y\in\left[0;\, -\frac{2a}{g}\right]} H(x_{\max},\, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a}{g};\, 1\right]} H(1,\, y) \right\} =$$

$$= \min\left\{ \min\left\{ H(x_{\max},\, 0),\, H\left(x_{\max},\, -\frac{2a}{g}\right)\right\},\, H\left(1,\, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) \right\} =$$

$$= \min\left\{ H\left(x_{\max},\, -\frac{2a}{g}\right),\, H\left(1,\, -\frac{g+c}{2h}\right) \right\} =$$

$$= H\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a - \frac{(g+c)^2}{4h} + k = V_{\text{opt}} \quad (31)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g+c}{2h}\right\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Виписуємо відповідне рівняння (7):

$$V_{\text{opt}} = H\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a - \frac{(g+c)^2}{4h} + k =$$

$$= ax^2 + gx\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + c\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + k =$$

$$= ax^2 - xg\frac{g+c}{2h} - c\frac{g+c}{2h} + \frac{(g+c)^2}{4h} + k = H\left(x, -\frac{g+c}{2h}\right) = H(x, y_{\text{opt}}); \quad (32)$$

$$ax^2 - xg\frac{g+c}{2h} - c\frac{g+c}{2h} + \frac{(g+c)^2}{2h} - a = a\left(x^2 - x\frac{g(g+c)}{2ah} + \frac{g(g+c)-2ah}{2ah}\right) =$$

$$= a(x-1)\left(x - \frac{g(g+c)-2ah}{2ah}\right) = 0. \quad (33)$$

Із (33) слідує, що коренями рівняння (32) є $x_1 = \frac{g(g+c)-2ah}{2ah}$ та $x_2 = 1$. Але за умовою $g(g+c)-4ah \leqslant 0$ має місце $g(g+c)-2ah < 2ah < 0$, тому $x_1 < 0$, $x_1 \notin X$, $x_2 \in X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_2\} = \{1\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\{1\}, \left\{-\frac{g+c}{2h}\right\}, a - \frac{(g+c)^2}{4h} + k\right\}. \quad (34)$$

**Випадок 2.2.2.2.** $g > 0$, $c < 0$; $2a + g \geqslant 0$; $g(g+c) - 4ah \leqslant 0$; $g + c + 2h < 0$. Маємо точки $y_{\min} \geqslant -\frac{2a}{g}$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} > 1$, звідки згідно з нерівністю (30) та очевидною подвійною параболічною нерівністю

$$H\left(1, -\frac{2a}{g}\right) > H(1, 1) > H\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = H\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) \quad (35)$$

випливає, що мінімум функції (10) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{2a}{g}\right]} H(x_{\max}, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a}{g};\, 1\right]} H(1, y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{H(x_{\max}, 0),\ H\left(x_{\max}, -\frac{2a}{g}\right)\right\},\ \min\left\{H\left(1, -\frac{2a}{g}\right),\ H(1, 1)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{ H\left( x_{\max}, -\frac{2a}{g} \right), H\left(1, 1\right) \right\} = H\left(1, 1\right) = a + g + c + h + k = V_{\text{opt}} \quad (36)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{1\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (7)

$$V_{\text{opt}} = H\left(1, 1\right) = a + g + c + h + k = ax^2 + gx + c + h + k =$$

$$= a\left(x - 1\right)\left( x + \frac{a+g}{a} \right) + a + g + c + h + k = H\left(x, 1\right) = H\left(x, y_{\text{opt}}\right) \quad (37)$$

є $x_1 = 1$ та $x_2 = -\dfrac{a+g}{a}$. Але $a + g \geqslant -a$, тому $x_2 \geqslant 1$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$. Отже, у розглянутому випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \{1\}, a + g + c + h + k \right\}. \quad (38)$$

**Випадок 3.** $g < 0$, $c > 0$. Ясно, що $x_{\max} \leqslant 0$ при $y \in Y$, тому для параболи $H\left(x_{\max}, y\right) = H\left( -\dfrac{gy}{2a}, y \right)$ має місце подвійна параболічна нерівність

$$H\left( -\frac{gy}{2a}, y \right) = H\left(x_{\max}, y\right) \geqslant H\left(0, y\right) > H\left(1, y\right), \quad (39)$$

згідно якої максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ є парабола

$$\max_{x \in X} H\left(x, y\right) = \max\left\{ H\left(0, y\right), H\left(1, y\right) \right\} =$$

$$= \max\left\{ cy + hy^2 + k, a + gy + cy + hy^2 + k \right\} = H\left(0, y\right) = cy + hy^2 + k. \quad (40)$$

Перша похідна параболи $H\left(0, y\right)$ по змінній $y$

$$\frac{d}{dy} H\left(0, y\right) = \frac{d}{dy}\left( cy + hy^2 + k \right) = c + 2hy \quad (41)$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\dfrac{c}{2h}$, причому

$$H\left(0, y_{\min}^{\langle 0 \rangle}\right) = H\left( 0, -\frac{c}{2h} \right) = c\left( -\frac{c}{2h} \right) + h\left( -\frac{c}{2h} \right)^2 + k = -\frac{c^2}{2h} + \frac{c^2}{4h} + k = k - \frac{c^2}{4h}. \quad (42)$$

Проте тут $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\dfrac{c}{2h} < 0$, тому для параболи (40) має місце параболічна подвійна нерівність

$$H\left( 0, -\frac{c}{2h} \right) = H\left(0, y_{\min}^{\langle 0 \rangle}\right) < H\left(0, 0\right) < H\left(0, 1\right), \quad (43)$$

з якої випливає, що мінімум параболи (40) на сегменті $Y$

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} H\left(x, y\right) = \min_{y \in Y} H\left(0, y\right) = \min\left\{ H\left(0, 0\right), H\left(0, 1\right) \right\} = H\left(0, 0\right) = k = V_{\text{opt}} \quad (44)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. А далі із рівняння (8) тут відразу слідує розв'язок гри (9).

**Випадок 4.** $g<0$, $c<0$. Максимумом ядра (1) на сегменті $X$ по змінній $x$ залишається парабола (40), де точка $y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\dfrac{c}{2h}>0$. Якщо $y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\dfrac{c}{2h}>1$, то для параболи (40) буде виконуватись параболічна подвійна нерівність

$$H(0,\,0)>H(0,1)>H\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)=H\left(0,-\frac{c}{2h}\right). \tag{45}$$

**Випадок 4.1.** $g<0$, $c<0$; $c+2h\geqslant 0$. Оскільки точка $y_{\min}^{\langle 0\rangle}\in(0;1]$, то мінімум параболи (40) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,\,y)=\min_{y\in Y}H(0,\,y)=H\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)=H\left(0,-\frac{c}{2h}\right)=k-\frac{c^2}{4h}=V_{\text{opt}} \tag{46}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{-\dfrac{c}{2h}\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Виписуємо відповідне рівняння (7):

$$V_{\text{opt}}=H\left(0,-\frac{c}{2h}\right)=k-\frac{c^2}{4h}=ax^2+gx\left(-\frac{c}{2h}\right)+c\left(-\frac{c}{2h}\right)+h\left(-\frac{c}{2h}\right)^2+k=$$

$$=ax^2-xg\frac{c}{2h}-\frac{c^2}{4h}+k=ax\left(x-\frac{gc}{2ah}\right)+k-\frac{c^2}{4h}=H\left(x,-\frac{c}{2h}\right)=H\left(x,\,y_{\text{opt}}\right). \tag{47}$$

Коренями рівняння (47) є $x_1=\dfrac{gc}{2ah}$ та $x_2=0$. Але $\dfrac{gc}{2ah}<0$, тому $x_1<0$, $x_1\notin X$, $x_2\in X$ та $X_{\text{opt}}=\{x_2\}=\{0\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{0\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S}=\left\{\{0\},\left\{-\frac{c}{2h}\right\},\,k-\frac{c^2}{4h}\right\}. \tag{48}$$

**Випадок 4.2.** $g<0$, $c<0$; $c+2h<0$. Оскільки точка $y_{\min}^{\langle 0\rangle}=-\dfrac{c}{2h}>1$, то із нерівності (45) випливає, що мінімум параболи (40) на сегменті $Y$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,\,y)=\min_{y\in Y}H(0,\,y)=\min\left\{H(0,\,0),\,H(0,1)\right\}=$$

$$=H(0,1)=c+h+k=V_{\text{opt}} \tag{49}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{1\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (7)

$$V_{\text{opt}}=H(0,1)=c+h+k=ax^2+gx+c+h+k=$$

$$=ax\left(x+\frac{g}{a}\right)+c+h+k=H(x,1)=H\left(x,\,y_{\text{opt}}\right) \tag{50}$$

є $x_1=-\dfrac{g}{a}$ та $x_2=0$. Але $-\dfrac{g}{a}<0$, тому $x_1<0$, $x_1\notin X$, $x_2\in X$ та $X_{\text{opt}}=\{x_2\}=\{0\}$. Отже, і у цьому випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{0\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{ \{0\}, \{1\}, c + h + k \right\}. \tag{51}$$

**5. Висновок**

Проаналізувавши отримані сім типів розв'язку неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри з ядром (1), можна підбити такі підсумки. Якщо ядро розглянутої гри містить коефіцієнт $c > 0$, то її розв'язком є множина (9). Якщо у ядрі гри виконуються співвідношення $g > 0$, $c < 0$, $2a + g < 0$, $2a(c + 2h) - g^2 \leqslant 0$ або $c < 0$, $2a + g \geqslant 0$, $g(g + c) - 4ah > 0$, то множина (20) є розв'язком гри. Множина (25) є розв'язком гри при $g > 0$, $c < 0$, $2a + g < 0$, $2a(c + 2h) - g^2 > 0$. При $c < 0$, $2a + g \geqslant 0$, $g(g + c) - 4ah \leqslant 0$, $g + c + 2h \geqslant 0$ розв'язком гри є множина (34), а якщо $c < 0$, $2a + g \geqslant 0$, $g(g + c) - 4ah \leqslant 0$, $g + c + 2h < 0$, то розв'язком гри є множина (38). Якщо у ядрі гри виконується співвідношення $g < 0$, $c < 0$, $c + 2h \geqslant 0$, то множина (48) є розв'язком гри, а при $g < 0$, $c + 2h < 0$ розв'язком гри є множина (51). Таким чином, неперервна антагоністична строго опукло-вгнута гра з ядром (1) має сім типів розв'язків, шість з яких визначаються певним співвідношенням між коефіцієнтами ядра, а розв'язок (20) визначається одним з двох таких співвідношень. Для подальшого дослідження варто розглядати не тільки неперервні антагоністичні моделі конфліктних явищ з іншими ядрами, а й перейти до динамічних моделей. Втім, представлене параметричне розв'язування неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри можна використовувати як динамічну модель, оскільки для будь-яких змін параметрів ядра (1) $a < 0$, $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та $h > 0$ розв'язок гри вже відомий.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.
2. Оуэн Г. Теория игр / Оуэн Г. ; [пер. с англ.]. — 2-е изд. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.
3. Вудбери М. Линейно выпуклые игры / М. Вудбери // Бесконечные антагонистические игры. — М. : Физматгиз, 1963. — С. 442 — 448.
4. Боненбласт Х. Ф. Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша / Х. Ф. Боненбласт, С. Карлин, Л. С. Шепли // Бесконечные антагонистические игры. — М. : Физматгиз, 1963. — С. 337 — 352.
5. Генин М. А. Алгорифмы решения некоторых выпукло-вогнутых и линейно-выпуклых игр / М. А. Генин // Методы вычислений. — Вып. 6. — Л. : Ленингр. ун-т, 1970. — С. 96 — 106.
6. Дрешер М. Решение выпуклых игр методом неподвижных точек / М. Дрешер, С. Карлин // Бесконечные антагонистические игры. — М. : Физматгиз, 1963. — С. 180 — 194.

7. Романюк В. В. Строго випуклі ігри з функціями виграшу, які містять квадрат стратегії другої сторони та зважену стратегію першої або зважений добуток стратегій обох сторін / В. В. Романюк // Всеукраїнський науково-виробничий журнал "Інноваційна економіка". — № 4 (6), 2007. — С. 111 — 115.
8. Романюк В. В. Щодо питання розв'язування деяких випуклих ігор у загальному виді / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2008. — № 1. — Т. 1. — С. 177 — 185.
9. Романюк В. В. Моделирование выхода на рынок двух конкурирующих предприятий с помощью игровой бесшумной дуэли в MATLAB 7.0.1 / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2009. — № 3. — Т. 2. — С. 233 — 238.
10. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. — М. : Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. — 304 с. : ил.


Надійшла у першій редакції 15.10.2010, в останній — 01.04.2011.