УДК 517.956

Некорректность задачи с отходом от характеристики для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта

Т. Т. Шерияздан
Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, Казахстан

В работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта рассматривается задача Дарбу с отходом от характеристики. Доказана, что эта задача имеет бесчисленное множество решений.

Ключевые слова: *многомерные гиперболические уравнения, отход от характеристики, краевая задача, оператор Геллерстедта*

Для багатовимірних гіперболічних рівнянь,що вироджуються, з оператором Гелерстедта, розглядається задача Дарбу з відходом від характеристик. Доведено, що ця задача має нескінченну множену роз в'язків.

Ключеві слова: *багатовимірні гіперболічні рівняння, відхід від характеристик, крайова задача, оператор Гелерстедта*

In work for degenerating multidimensional hyperbolic equations with Gellerstedt operator it is considered problem Darboux with departure from characteristics. It is proved that this problem has an uncountable ensemble of the solutions.

Key words: *multidimensional hyperbolic equations, departure from characteristics, boundary value problem, Gellerstedt operator*

В [1,2] для уравнения колебания струны изучалась краевая задача с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений.

Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, . . . , x_m, t)$, ограниченная плоскостью $t = 0$ и при $t > 0$ коноидами

$$K_0 : r = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \ 0 \le r \le r_0 = const < \frac{1}{2},$$

$$K_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \ r_0 \le r \le r_1,$$

$$K_1 : r = 1 - \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \ r_1 \le r \le 1,$$

где $r = |x|$ - длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $p = const > 0$, $0 < \beta = const < 1$, $r_1 = (1 - r_0 + r_0\beta)/(1+\beta)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S, S_0, S_β, S_1 соответственно.

В области D_β рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$\Delta_x u$ – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

Заметим, что поверхности K_0, K_1 являются характеристиками уравнения (1).

В качестве многомерных аналогов краевых задач с отходом от характеристики рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau(x), \quad u\big|_{S_0} = \sigma_0(x), \quad u\big|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x), \tag{2}$$

или

$$u_t\big|_S = \nu(x), \quad u\big|_{S_0} = \sigma_0(x), \quad u\big|_{S_\beta} = \sigma_\beta(x), \tag{3}$$

которая как отмечена в [3] на плоскости возникает при исследовании трансзвуковых проблем.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Пусть Ω_β – проекция области D_β на плоскость (r, t) с границами

$$\Gamma_0 : r = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \quad 0 \leq r \leq r_0, \ 0 \leq t \leq t_0,$$

$$\Gamma_\beta : \beta(r - r_0) + r_0 = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \ r_0 \leq r \leq r_1, \ t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$\Gamma_1 : r = 1 - \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}, \ r_1 \leq r \leq 1, \ 0 \leq t \leq t_1, \ \Gamma : t = 0, \ 0 \leq r \leq 1;$$

$\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$ - пространства Соболева.

Имеет место ([4])

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_{in}^k(r,t)$, $\tilde{c}_{in}^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\tau}_n^k(r)$, $\overline{\nu}_n^k(r)$, $\overline{\sigma}_{0n}^k(r)$, $\overline{\sigma}_{\beta n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций

$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta),\ a_i\dfrac{x_i}{r}\rho,\ b(r,\theta,t)\rho,\ c(r,\theta,t)\rho,\ \rho(\theta),\ i=1,...,m,\ \tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta),\ \sigma_0(r,\theta),$ $\sigma_\beta(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$B^l(S)=\left\{f(r,\theta): f\in W_2^l(S),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^2((0,1))}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|f_n^k(r)\right\|^2_{C^1([0,1])}\right)\cdot\exp 2\left(n^2+n(m-2)\right)<\infty,\ l\geq m-1\right\}.$$

Пусть $a_i(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t)\in W_2^l(D_\beta)\subset C(\overline{D}_\beta),\ i=1,2,...,m,\ l\geq m+1$ и $\tau(r,\theta)=r^3\tau^*(r,\theta),\ \nu(r,\theta)=r^3\nu^*(r,\theta),\ \sigma_0(r,\theta)=r^2\sigma^*(r,\theta),\ \ \tau^*(r,\theta),\ \nu^*(r,\theta)\in B^l(S),$ $\sigma_\beta(r,\theta)\in B^l(S_\beta),\ \sigma_1(r,\theta)\in B^l(S_1)$.

Тогда справедлива

Теорема. *Задача* 1 *имеет бесчисленное множество решений.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнения (1) имеет вид ([5,6])

$$t^p u_{rr}+\frac{m-1}{r}t^p u_r-\frac{t^p}{r^2}\delta u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0, \tag{5}$$

$$\delta=-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{q_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ q_1=1,\ q_j=\left(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1}\right)^2,\ j>1.$$

При этом известно ([4]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda=n(n+m-2),\ n=0,1,...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде:

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ - функции, которые будут определены ниже. Подставив (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для u_n^k получим ([5,6]):

$$
\begin{gathered}
t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^k-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^k+\left(\frac{(m-1)}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{(m-1)}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right. \qquad (7)\\
\left.+\left[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^p+\sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0.
\end{gathered}
$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$
t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^k-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^k+\frac{(m-1)}{r}t^p\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \qquad (8)
$$

$$
\begin{gathered}
t^p\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{(m-1)}{r}t^p\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\bar{u}_1^k=\\
=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_1^1\bar{u}_0^1\right),\quad n=1,\quad k=\overline{1,k_n},
\end{gathered} \qquad (9)
$$

$$
\begin{gathered}
t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{(m-1)}{r}t^p\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\bar{u}_n^k=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\right.\\
\left.+\tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+\left[\tilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\ k=\overline{1,k_n},\ n=2,3\ldots .
\end{gathered} \qquad (10)
$$

Нетрудно убедиться, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$ - решение системы (8)-(10), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([4]), из краевых условий (2), (3), с учетом леммы, соответственно запишутся в виде:

$$
\begin{gathered}
\bar{u}_n^k\big|_{\Gamma}=\bar{\tau}_n^k(r),\ 0\le r\le 1,\quad \bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r), 0\le r\le r_0,\\
\bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots .
\end{gathered} \qquad (11)
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{u}_{nt}^k\big|_{\Gamma}=\bar{\nu}_n^k(r),\ 0\le r\le 1,\ \bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_{0n}^k(r),\ 0\le r\le r_0,\\
\bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_\beta}=\bar{\sigma}_{\beta n}^k(r),\ r_0\le r\le r_1,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots .
\end{gathered} \qquad (12)
$$

Таким образом, задача 1 сведена к системе краевых задач с отходом от характеристики в области Ω_β для уравнений (8)-(10). Теперь будем находить решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$t^p \bar{u}^k_{nrr} - \bar{u}^k_{ntt} + \frac{(m-1)}{r} t^p \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \bar{u}^k_n = f^k_n(r,t), \tag{13}$$

где $f^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f^1_0(r,t) \equiv 0$. Выполнив в (13) замену переменных $\bar{u}^k_n(r,t) = r^{(1-m)/2} \cdot u^k_n(r,t)$ и положив затем $r = r,\ x_0 = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}$, получим

$$L_\alpha u^k_{\alpha,n} \equiv u^k_{\alpha,nrr} - u^k_{\alpha,nx_0x_0} + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u^k_{\alpha,n} = f^k_{\alpha,n}(r,x_0), \quad (14_\alpha)$$

$$0 < \alpha = \frac{2}{2+p} < 1,\ f^k_{\alpha,n}(r,x_0) = r^{(m-1)/2} \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} f^k_n\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right].$$

При этом краевые условия (11), (12) запишутся в виде

$$\begin{gathered} u^k_{\alpha,n}(r,0) = \tau^k_n(r),\ 0 \le r \le 1,\ u^k_{\alpha,n}(r,r) = \sigma^k_{0n}(r),\ 0 \le r \le r_0, \\ u^k_{\alpha,n}(r, \beta(r - r_0) + r_0) = \sigma^k_{\beta n}(r),\ r_0 \le r \le r_1,\ \ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1...; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u^k_{\alpha,n} = \nu^k_n(r),\ u^k_{\alpha,n}(r,r) = \sigma^k_{0n}(r),\ 0 \le r \le r_0, \\ u^k_{\alpha,n}(r, \beta(r - r_0) + r_0) = \sigma^k_{\beta n}(r),\ r_0 < r \le r_1,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1..., \end{gathered} \tag{16}$$

где $\tau^k_n(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\tau}^k_n(r),\ \nu^k_n(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\nu}^k_n(r),\ \sigma^k_{0n}(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\sigma}^k_{0n}(r),$ $\sigma^k_{\beta n}(r) = r^{(m-1)/2} \bar{\sigma}^k_{\beta n}(r).$

Наряду с уравнением (14_α), рассмотрим уравнение

$$L_0 u^k_{0,n} \equiv u^k_{0,nrr} - u^k_{0,nx_0x_0} + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u^k_{0,n} = f^k_{0,n}(r,x_0). \quad (14_0)$$

Как показано в [5,6], существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (14_α) и (14_0).

Утверждения 1. Если $u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$ - решение задачи Коши для уравнения (14_0), удовлетворяющее условию

$$u^{k,1}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r),\ \ \frac{\partial}{\partial x_0} u^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{17}$$

то функция

$$u^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r, \xi x_0)(1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} d\xi \equiv \frac{\gamma_\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) D^{-\alpha/2}_{0x_0^2}\left[\frac{\omega^{k,1}_{0,n}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{18}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (14_α) с условием (17).

Утверждение 2. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ - решение задачи Коши для уравнения (14_0), удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\cdot\ldots\cdot(2q+1-\alpha)},\quad \frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{19}$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$\begin{gathered} u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-\alpha+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)\left(1-\xi^2\right)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv \\ \equiv\gamma_{2-\alpha+2q}\,2^{q-1}\,\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\alpha/2-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \end{gathered} \tag{20}$$

является решением уравнения (14_α) с начальными данными

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,2}=\nu_n^k(r), \tag{21}$$

где $\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$, $\Gamma(z)$– гамма - функция, D_{0t}^α – оператор Римана-Лиувилля ([7]), а $q\ge 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q\ge m-1$.

При этом функции $f_{\alpha,n}^k(r,x_0)$, $f_{0,n}^k(r,x_0)$ связаны формулами (18) в случае утверждения 1 и формулами (20) в случае утверждения 2.

Теперь будем решать задачу (14_α), (15). Ее решение ищем в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$, где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ - решение задачи Коши (14_α), (17), а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ - решение краевой задачи для уравнения

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^{k,2}=0 \tag{22_α}$$

с условием

$$\begin{gathered} u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\ 0\le r\le 1,\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\ r)=\sigma_{0n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,1}(r,r),\ 0\le r\le r_0, \\ u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\sigma_{\beta n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta(r-r_0)+r_0),\ r_0\le r\le r_1, \\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots. \end{gathered} \tag{23}$$

Учитывая формулы (18), (20), а также обратимость оператора D_{0t}^α [7], задачи (14_α), (17) и (22_α), (23), соответственно сводим к задаче Коши (14_0), (17) и к задаче для

$$L_0 u_{0,n}^{k,2}=0 \tag{22_0}$$

с данными

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,2}(r,0) = 0,\ 0 \le r \le 1,\ u_{0,n}^{k,2}(r,r) = \varphi_{1n}^k(r),\ 0 \le r \le r_0,$$
$$u_{0,n}^{k,2}(r, \beta(r - r_0) + r_0) = \varphi_{2n}^k(r),\ r_0 \le r \le r_1,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1..., \tag{24}$$

где $\varphi_{1n}^k(r), \varphi_{2n}^k(r)$ - функции, соответственно, выражающиеся через $\tau_{1n}^k(r)$, $\sigma_{0n}^k(r)$, $0 \le r \le r_0$ и $\tau_n^k(r), \sigma_{\beta n}^k(r)$, $r_0 \le r \le r_1$.

Далее используя утверждение 1 и 2, устанавливается, что задача (14_α), (15) имеет также бесчисленное множество решений.

Следовательно, сначала решив задачу (8), (11) $(n=0)$, а затем (9), (11) $(n=1)$ и т.д. найдем последовательно все $\overline{u}_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0,1,...$

Итак, показано, что

$$\int_H \rho(\theta) Lud H = 0 . \tag{25}$$

Теперь область D_β разобьем на две области $D_\beta = D_{1\beta} + D_{2\beta}$,

$$D_{1\beta} = \left\{ (r,\theta,t):\ \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi < r < 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi,\ 0 < t < t_0 \right\},$$

$$D_{2\beta} = \left\{ (r,\theta,t):\ \left(\int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi + (\beta - 1) r_0 \right) \Big/ \beta < r < 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi,\ t_0 < t < t_1 \right\}.$$

Пусть $f_i(r,\theta,t) = R_i(r)\rho(\theta)T_i(t)$, $i = 1,2$, причем $R_1(r) \in V_1$, V_1- плотна в $L_2\left(\left(\int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi,\ 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi\right)\right)$, $T_1(t) \in V_2$, V_2 – плотна в $L_2((0,t_0))$, $R_2(r) \in M_1$, M_1 – плотна в $L_2\left(\left(\left((\beta-1)r_0 + \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\right) \Big/ \beta,\ 1 - \int_0^t \sqrt{g(\xi)}\, d\xi\right)\right)$, $T_2(t) \in M_2$, M_2– плотна в $L_2((t_0,t_1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$– плотна в $L_2(H)$. Тогда $f_1(r,\theta,t) \in V$, $f_2(r,\theta,t) \in M$, $V = V_1 \otimes H \otimes V_2$ – плотна в $L_2(D_{1\beta})$, $M = M_1 \otimes H \otimes M_2$– плотна в $L_2(D_{2\beta})$.

Пусть далее $f(r,\theta,t) = \begin{cases} f_1(r,\theta,t), & (r,\theta,t) \in D_{1\beta}, \\ f_2(r,\theta,t), & (r,\theta,t) \in D_{2\beta}. \end{cases}$

Тогда $f(r,\theta,t) \in G$, $G = V \otimes M$ – плотна в $L_2(D_\beta)$ ([8]).

Отсюда для u из (25) следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lud D_\beta = \int_{D_{1\beta}} f_1(r,\theta,t) Lud D_{1\beta} + \int_{D_{2\beta}} f_2(r,\theta,t) Lud D_{2\beta} = 0,$$

и $Lu = 0$, $\forall (r,\theta,t) \in D_\beta$.

Таким образом, доказана, что задача (1), (2) имеет бесчисленное множество решений вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2}\, u_n^k(r,t)\, Y_{n,m}^k(\theta), \tag{26}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (6). Тогда она сведется к задаче (14_α), (16). Решение задачи (14_α), (16) ищем в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$, где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ – решение задачи Коши (14_α), (21), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ – решение краевой задачи для уравнения (22_α) с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,1}(r,0)=0,\ 0<r<1,\ u_{\alpha,n}^{k,1}(r,r)=\sigma_{0n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,2}(r,r),\ 0\le r\le r_0,$$

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta(r-r_0)+r_0)=\sigma_{\beta n}^k(r)-u_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta(r-r_0)+r_0), r_0\le r\le r_1, \tag{27}$$

$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ \ldots .$$

Учитывая формулы (20), (18), задачи (14_α), (21) и (22_α), (27), соответственно сведем к задаче Коши (14_0), (19) и к задаче (22_α), (24).

Таким образом, задача (1), (3) также имеет бесчисленное множество решений вида (26), где $u_n^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta)$, $\sigma_0(r,\theta)$, $\sigma_\beta(r,\theta)$, аналогично [5,6], можно показать, что полученные решения $u(r,\theta,t)$ (38) принадлежат искомому классу.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа, М.: Изд-во АН СССР, 1954 – 164с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981 – 448 с.
3. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике, М.: Наука, 1973 – 711с.
4. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 – 254 с.
5. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений, Алматы: Галым, 1994 – 170 с.
6. Алдашев С. А. Вырождающихся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007 – 139 с.

7. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа,

1985 – 301 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 – 545 с.

Надійшла у першій редакції 03.03.2011, в останній - 02.05.2011.