УДК 519.63

# Обчислювальна схема методу скінчених елементів з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач

Т. А. Баранова[1], О. М. Литвин[2], К. В. Носов[3]
[1]*Національний технічний університет «ХПІ»*
[2]*Українська інженерно-педагогічна академія*
[3]Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

У статті пропонується схема для наближеного розв’язання еліптичних крайових задач у частинних похідних парного порядку методом скінчених елементів для областей спеціального вигляду. Знаходження наближеного розв’язку ґрунтується на варіаційних принципах, причому знаходженню підлягають як вузлові параметри, так і координатні функції, які утворюють наближений розв’язок. На відміну від раніше пропонованих схем, з кожним вузлом сітки пов’язується своя система координатних функцій, що дозволяє отримати більш високу точність наближення.

***Ключові слова:*** *еліптичні задачі, варіационі методи, метод скінечних елементів, оптимальні координатні функції, інтегро-диференціальні рівняння.*

В статье предложена схема для приближенного решения эллиптических краевых задач в частных производных четного порядка методом конечных элементов для областей специального вида. Нахождение приближенного решения основано на вариационных принципах, причем нахождению подлежат как узловые параметры, так и координатные функции, формирующие приближенное решение. В отличии от предложенных раннее схем, с каждым узлом сетки связывается своя система координатных функций, что позволяет получить более высокую точность приближения.

***Ключевые слова:*** *эллиптические задачи, вариационные методы, метод конечных элементов, оптимальные координатные функции, интегро-дифференциальные уравнения.*

In the paper the schema for approximate solution of elliptic boundary problems in partial derivatives of even order by the finite element method for special shaped domains is suggested. Calculation of approximate solution is based upon variational principles, and node parameters and coordinate functions, which both form a solution, are calculated. In contrast to earlier suggested schemas, in this case a specified system of coordinate functions corresponds to each node of mesh. This fact allows to obtain higher precision of approximation.

***Key words:*** *elliptic problems, variational method, finite element method, optimal coordinate functions, integro-differential equations.*

## 1. Вступ

При математичному моделюванні стаціонарних процесів різної фізичної природи, серед яких можна назвати стаціонарний розподіл тепла, дифузію, електростатичні та електромагнітні явища, деформаційні процеси, часто виникає необхідність у розв’язанні крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь. Для розв’язання цих крайових задач застосовуються різні аналітичні та наближені методи. При цьому застосування перших можливо лише у випадках найпростіших областей та диференціальних операторів, а останні, наближенні методи, посідають основне місце. Найбільш відомими наближеними методами є метод скінченних різниць, варіаційні та проекційні методи (методи Релея-Рітця,

© Баранова Т. А., Литвин О. М., Носов К. В., 2011

Бубнова-Гальоркіна, Канторовича), метод інтегральних співвідношень Дородніцина, спектральні методи. Метод скінченних елементів (МСЕ) для еліптичних задач, який є частинним випадком варіаційних методів, посідає одне з найважливіших місць серед наближених методів для задач цього класу.

При побудові схем МСЕ виникає задача вибору системи координатних функцій, за допомогою яких будується наближений розв’язок. Використання тієї чи іншої системи координатних функцій підпорядковується задачам забезпечення потрібного класу диференційованості шуканого наближеного розв’язку в області інтегрування та досягнення необхідного порядку збіжності наближеного розв’язку до точного (при подрібненні сітки). В залежності від способів розбиття області на елементи різної геометричної форми та умов задачі в роботах різних авторів (наприклад, Р. Варга, Ж. Деклу, Г.І. Марчук, С.Г. Міхлін, С.Б.Стечкін, Ю.Н. Суботін, Г.Стренг, Дж. Фікс, Ф.С’ярле, Г. Біркгофф, М. Шульц) досліджені різні системи координатних функцій. Завдяки простоті обчислення, в тому числі на ЕОМ, і відомим аналітичним властивостям, найбільш широкого розповсюдження набули поліноміальні інтерполянти різного типу — Зламала, Женішека, елементи Клафа-Точера та інші. Коригування степені поліноміальних інтерполянтів та/або згущення сітки розбиття в околі точок з особливостями точного розв’язку з метою отримання кращого наближення, що враховує особливу поведінку згаданого точного розв’язку, покладено в основу адаптивних схем МСЕ [1-2].

Незважаючи на різноманітність схем МСЕ для еліптичних задач з частинними похідними, практичне отримання розв’язку з великою точністю зустрічає серйозні перешкоди у зв’язку із стрімким зростанням обчислювальних витрат та накопиченням похибок округлення при збільшенні ступенів свободи та/або збільшенні степені використовуваних інтерполянтів. Тому розробка обчислювальних схем МСЕ, які при заданому, як правило, відносно невеликому, числі степенів свободи забезпечують мінімальну похибку, залишається цілком актуальною.

Аналіз згаданих схем МСЕ показав, що побудова систем координатних функцій враховує лише деякі властивості крайової задачі (належність узагальненого розв’язку до певного класу, задовільнення головним крайовим умовам тощо) і мало пов’язана з властивостями диференціального оператора задачі. Тому врахування цих властивостей привело до одного з плідних підходів до розв’язання цієї проблеми. Деякі загальні результати відносно вибора скінченновимірного базису для побудови наближених розв’язків крайових задач, зокрема, для МСЕ, отримані у роботах J. J. Goel [3], Г.І. Марчука та В.І. Агошкова [4], С. Г. Міхліна [5], В.В. Смєлова [6] та інших.

Схеми МСЕ з вибором координатних функцій, які є оптимальними з точки зору мінімізації функціоналу енергії варіаційної задачі, що еквівалентна початковій, вперше запропоновані у роботах О. М. Литвина [7-8]. У подальших роботах О. М. Литвина, К. В. Носова, Т. А. Баранової [9-13] були розроблені різні обчислювальні схеми для МСЕ з вибором координатних функцій. Так, у роботі [10] координатні функції наближеного розв’язку будувалися з використанням сплайнів першого степеня, параметри яких визначалися з умови мінімуму функціоналу енергії з використанням методу Гауса-Зейделя. У роботах

[11-12] була розроблена ітераційна схема "фліп-флоп", згідно якої сукупності вузлових параметрів та координатних функцій обчислювалися на окремих кроках ітераційного процесу.

Метою даної роботи є розробка обчислювальної схеми МСЕ з вибором координатних функцій, яка у відомому сенсі є узагальненням попередніх схем [7-13]. Узагальнення торкається використання своєї системи координатних функцій для кожного вузла розбиття сітки. Обчислювальний експеримент, проведений для модельної задачі на кількох областях, підтвердив високу точність запропонованої схеми.

**2. Постановка задачі у загальному випадку**

Розглянемо наступну граничну задача для самоспряженого диференціального оператора:

$$\begin{aligned} &Au(\mathbf{x}) = f(x), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ &\partial^s u / \partial \mathbf{v}^s = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\Omega$ — $n$-вимірний багатогранник, грані якого паралельні координатним площинам, $\mathbf{v}$ — нормаль до $\partial\Omega$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$, $A$ — самоспряжений диференціальний оператор еліптичного типу порядку $2m$:

$$\begin{aligned} &A = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le m} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} (a_{\boldsymbol{\alpha}}(x) D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} u),\ \boldsymbol{\alpha} = (\sim_1, \sim_2, \dots, \sim_n), \\ &|\boldsymbol{\alpha}| = \sim_1 + \sim_2 + \dots + \sim_n,\ D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}} u = \partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u / \partial x_1^{\sim_1} \partial x_2^{\sim_2} \dots \partial x_n^{\sim_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Звичайним чином вводиться розбиття області $\Omega$ на гіперпаралелепіпеди гіперплощинами $x_k = x_{k,i_k}, i_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1,n}$, і далі будується наближений розв'язок з використанням вузлових параметрів у кожній точці розбиття та системи функцій, які забезпечують відповідні характеристики розв'язку. Введемо позначення $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$, $k = \overline{1,n}$. Гіперпаралепипед, що відповідає точці $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, позначимо $\Pi_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}],\ k = \overline{1,n}\}$.

У $\Pi_{\mathbf{i}}$ наближений розв'язок представимо у формі

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{«_1=0}^{1} \dots \sum_{«_n=0}^{1} u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1,\dots,r_n \rangle} \prod_{q=1}^{n} h_{q,\mathbf{i},1-«_q,r_q} \left( \frac{x_q - x_{q,i_q}}{\Delta_{q,i_q}} \right) \Delta_{q,i_q}^{r_q}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\mu} = («_1, «_2, \dots, «_n)$, $\mathbf{i} + \boldsymbol{\mu} = (i_1 + «_1, i_2 + «_2, \dots, i_n + «_n)$, а функцій $h_{q,\mathbf{i},«,p}(\cdot) \in W_2^{2m}[0,1]$ мають властивості:

$$h_{q,\mathbf{i},1-«,p}^{(s)}(¥) = ¢_{«,¥} ¢_{s,p}, « = 0,1; s = \overline{0,m-1};\ p = \overline{0,m-1};\ q = 0,1. \tag{4}$$

Нескладно перевірити, що для $\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$, як і для наближеного розв'язку, запропонованому у [8], виконується умова

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\tilde{u}(\mathbf{x})\Big|_{x_1=x_{1,i_1},\ldots,x_n=x_{n,i_n}} = u_{i_1,\ldots,i_n}^{\langle \sim_1,\ldots,\sim_n\rangle}.$$

для всіх вузлових параметрів $u_{i_1,\ldots,i_n}^{\langle \sim_1,\ldots,\sim_n\rangle}$ області $\Omega$.

Але суттєвим розширенням попередньої схеми [8] є використання для кожного вузлового параметра $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1,\ldots,r_n\rangle}$ окремої системи координатних функцій, що і відображено у (1).

Наближений розв'язок будемо знаходити з умови мінімуму функціоналу енергії задачі (1)

$$J(u) = \int\limits_{\Omega}\left[\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})(D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\mathbf{x})) - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x}$$

по координатним функціям $h_{q,\mathbf{i},«,p}(\cdot)$ та вузловим параметрам $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1,\ldots,r_n\rangle}$.

Повторюючи міркування, аналогічні до наведених у роботі [8] (Теорема 1.1), можна показати, що сталі $u_{i_1,\ldots,i_n}^{\langle \sim_1,\ldots,\sim_n\rangle}$ та координатні функції $h_{q,\mathbf{i},«,p}(\cdot)$, які реалізують мінімум функціоналу енергії, задовольняють системі Рітця

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1,\ldots,i_n}^{\langle \sim_1,\ldots,\sim_n\rangle}} = 0,$$

де $u_{i_1,\ldots,i_n}^{\langle \sim_1,\ldots,\sim_n\rangle}$ пробігають усі вузлові параметри області $\Omega$, та крайовій задачі для системи звичайних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь виду

$$¢_{h_{q,\mathbf{i},1-«_q,r_q}} J(\tilde{u}) = 0,$$

де через ¢ позначена варіація функціоналу $J$ по функціям $h_{q,\mathbf{i},1-«_q,r_q}(\cdot)$. Кожна така варіація представляє собою звичайне нелінійне інтегро-диференціальне рівняння. Крайові умови невідомих функцій, що входять до цих рівнянь, визначаються з умов (4).

### 3. Задача Діріхле для рівняння Пуассона

Проведемо детальне дослідження схеми побудови наближеного розв'язку модельної задачі (задача Діріхле для рівняння Пуассона)

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y)\in G,$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y)\in ô\,\overline{G}.$$

Спираючись на припущення щодо виду області $G$, її можна розбити прямими $x = x_i,\ j=\overline{0,n_x}$ $y = y_j,\ j=\overline{0,n_y}$ на прямокутні елементи $\Pi_{ij} = \{(x,y): x_i \le x \le x_{i+1}; y_j \le y \le y_{j+1}\}$ і вважати, що з кожним вузлом розбиття пов'язується система із 4-х базисних функцій. Тоді наближений розв'язок у $\Pi_{ij}$ можна представити у формі

$$\tilde{u}(x,y) = u_{i,j} h_{1,i,j}\left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}}\right) H_{1,i,j}\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}}\right) +$$
$$+ u_{i+1,j} h_{0,i+1,j}\left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}}\right) H_{1,i+1,j}\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}}\right) + u_{i,j+1} h_{1,i,j+1}\left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}}\right) H_{0,i,j+1}\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}}\right) +$$
$$+ u_{i+1,j+1} h_{0,i+1,j+1}\left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}}\right) H_{0,i+1,j+1}\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}}\right).$$

Функції $h_{1,i,j}(t)$, $h_{0,i,j}(t)$, $H_{1,i,j}(t)$, $H_{0,i,j}(t)$ мають властивості:

1. Вони належать до класу $W_2^1$ (це забезпечує існування функціоналу енергії).

2. Задовольняють граничним умовам: $h_{«,i,j}(¥) = ¢_{«,1-¥}$, $H_{«,i,j}(¥) = ¢_{«,1-¥}$ $¥ = 0,1$, $« = 0,1$.

Для знаходження наближеного розв'язку використовується наступна ітераційна схема. Вважаючи функції $h_{«,i,j}(x)$, $H_{«,i,j}(y)$ відомими (на першому кроці їх можна вважати лінійним функціями з відповідним граничним умовам), знаходимо невідомі $u_{i,j}$ із системи Рітця $\partial J(u)/\partial u_{i,j} = 0$. Будемо використовувати позначення $h^{[k]}{}_{«,i,j}(x)$ для функції $h_{«,i,j}(x)$, знайденої на кроці $k$ ітераційного процесу, аналогічно $H^{[k]}{}_{«,i,j}(y)$ — $k$-та ітерація функції $H_{«,i,j}(y)$. Таким чином, початкові функції $h_{«,i,j}(x)$ і $H_{«,i,j}(y)$ позначимо як $h^{[0]}{}_{«,i,j}(x)$ та $H^{[0]}{}_{«,i,j}(y)$. Позначимо $u_{i,j}$, знайдені на цьому кроці, через $u^{[0,0]}{}_{i,j}$, де верхній індекс відбиває номери ітерацій для базисних функцій ($h^{[0]}{}_{«,i,j}(x)$ та $H^{[0]}{}_{«,i,j}(y)$), що використовуються для знаходження $u^{[0,0]}{}_{i,j}$. Далі, використовуючи знайдені вузлові параметри $u^{[0,0]}{}_{i,j}$ та вважаючи $H^{[0]}{}_{«,i,j}(y)$ фіксованими, з умови $¢_{h_{«,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($« = 0,1$) знаходимо систему функцій $h_{«,i,j}(x)$, яку позначимо $h^{[1]}{}_{«,i,j}(x)$. Знову з системи Рітця, вважаючи $h^{[1]}{}_{«,i,j}(x)$ та $H^{[0]}{}_{«,i,j}(y)$ відомими, знаходимо вузлові параметри $u_{i,j}$, які позначимо $u^{[1,0]}{}_{i,j}$. Аналогічно, з умови $¢_{H_{«,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($« = 0,1$) знаходимо систему функцій $H^{[1]}{}_{«,i,j}(y)$, після чого алгоритм повторюється зрозумілим чином.

Послідовність початкових ітерацій для знаходження вузлових параметрів та координатних функцій можна представити схемою

$$\{h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[0,0]}{}_{i,j},$$
$$\{u^{[0,0]}{}_{i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}\} \mapsto h^{[1]}{}_{«,i,j},$$
$$\{h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[1,0]}{}_{i,j},$$
$$\{u^{[0,0]}{}_{i,j}, h^{[1]}{}_{«,i,j}\} \mapsto H^{[1]}{}_{«,i,j},$$
$$\{h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[1,1]}{}_{i,j}.$$

Аналогічно, для кроку $k$ ітераційний процес передається схемою

$$\{h^{[k]}{}_{«,i,j}, H^{[k]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[k,k]}{}_{i,j},$$
$$\{u^{[k,k]}{}_{i,j}, H^{[k]}{}_{«,i,j}\} \mapsto h^{[k+1]}{}_{«,i,j},$$
$$\{h^{[k+1]}{}_{«,i,j}, H^{[k]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[k+1,k]}{}_{i,j},$$
$$\{u^{[k,k]}{}_{i,j}, h^{[k+1]}{}_{«,i,j}\} \mapsto H^{[k+1]}{}_{«,i,j},$$
$$\{h^{[k+1]}{}_{«,i,j}, H^{[k+1]}{}_{«,i,j}\} \mapsto u^{[k+1,k+1]}{}_{i,j}.$$

Опишемо кожний тип ітерацій.

Знаходження чергової ітерації для вузлових параметрів (розв'язування системи Рітця), як відомо, зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки поставлена задача мінімізації функціоналу по вузловим параметрам $u_{i,j}$ є квадратичною. З квадратичності випливає єдиність розв'язку системи Рітця при довільних координатних функціях $h_{«,i,j}(x),\ H_{«,i,j}(y)$, на які накладено приведені вище умови.

Звернімося до розв'язання систем $¢_{h_{«,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$, $¢_{H_{«,ij}(\cdot)} J(u) = 0$ . Має місце теорема.

**Теорема 1**. Нехай $\Pi_{i,m}$, $\Pi_{i,m+1}$, …, $\Pi_{i,M}$ — сукупність прямокутних елементів, що задовольняють умови:

1. Сторони $\{(x,y) \mid x_i \le x \le x_{i+1}, y = y_m\}$ та $\{(x,y) \mid x_i \le x \le x_{i+1}, y = y_{M+1}\}$ елементів $\Pi_{i,m}$ та $\Pi_{i,M}$ відповідно належать $\partial G$.

2. Жодна з сторін $\{(x,y) \mid x_i \le x \le x_{i+1}, y = y_j\}$, $j = \overline{m+1, M}$ не належить $\partial G$.

Тоді варіації функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $h_{«,i,j}(x)$, $j = \overline{m+1, M}$, $« = 0{,}1$ представляють граничну задачу для наступної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} A\mathbf{h}''(t) + B\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0,\ \mathbf{h}(1) = \mathbf{h}_{1,} \end{cases} \tag{5}$$

де $\mathbf{h}(t)=\begin{pmatrix} h_{1,i,m+1}(t) \\ h_{0,i+1,m+1}(t) \\ h_{1,i,m+2}(t) \\ h_{0,i+1,m+2}(t) \\ \vdots \\ h_{1,i,M}(t) \\ h_{0,i+1,M}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$A$, $B$ — блочно-діагональні матриці

$$A=\begin{bmatrix} D_{m+1} & E_{m+1} & & & \cdots & & & & \\ F_{m+2} & D_{m+2} & E_{m+2} & & \cdots & & & & \\ & F_{m+3} & D_{m+3} & E_{m+3} & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \cdots & F_{M-2} & D_{M-2} & E_{M-2} & \\ & & & & \cdots & & F_{M-1} & D_{M-1} & E_{M-1} \\ & & & & \cdots & & & F_M & D_M \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \tilde{D}_{m+1} & \tilde{E}_{m+1} & & & \cdots & & & & \\ \tilde{F}_{m+2} & \tilde{D}_{m+2} & \tilde{E}_{m+2} & & \cdots & & & & \\ & \tilde{F}_{m+3} & \tilde{D}_{m+3} & \tilde{E}_{m+3} & \cdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \cdots & \tilde{F}_{M-2} & \tilde{D}_{M-2} & \tilde{E}_{M-2} & \\ & & & & \cdots & & \tilde{F}_{M-1} & \tilde{D}_{M-1} & \tilde{E}_{M-1} \\ & & & & \cdots & & & \tilde{F}_M & \tilde{D}_M \end{bmatrix}.$$

Блоки $D_j$, $E_j$, $F_j$, $\tilde{D}_j$, $\tilde{E}_j$, $\tilde{F}_i$ ( $j=\overline{m+1,M}$ ) розміром $2\times 2$ складаються з елементів

$$[D_j]_{1,1}=-\frac{u_{i,j}^2}{\Delta_{1,i}}\int_0^1(\Delta_{2,j-1}H_{0,i,j}^2(t)+\Delta_{2,j}H_{1,i,j}^2(t))dt\,,$$

$$[D_j]_{1,2}=$$

$$[D_j]_{2,1}=-\frac{u_{i,j}u_{i+1,j}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1(\Delta_{2,j-1}H_{0,i,j}(t)H_{0,i+1,j}(t)+\Delta_{2,j}H_{1,i,j}H_{1,i+1,j}(t))dt,$$

$$[D_j]_{2,2}=-\frac{u_{i+1,j}^2}{\Delta_{1,i}}\int_0^1(\Delta_{2,j-1}H_{0,i+1,j}^2(t)+\Delta_{2,j}H_{1,i+1,j}^2(t))dt\,,$$

$$[E_j]_{1,1}=-\frac{u_{i,j}u_{i,j+1}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i,j}(t)H_{0,i,j+1}(t)dt\,,$$

$$[E_j]_{1,2} = -\frac{u_{i,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i,j}(t)H_{0,i+1,j+1}(t)dt\,,$$

$$[E_j]_{2,1} = -\frac{u_{i,j+1}u_{i+1,j}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i+1,j}(t)H_{0,i,j+1}(t)dt\,,$$

$$[E_j]_{2,2} = -\frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i+1,j}(t)H_{0,i+1,j+1}(t)dt\,,$$

$$[F_j]_{1,1} = -\frac{u_{i,j}u_{i,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i,j-1}(t)H_{0,i,j}(t)dt\,,$$

$$[F_j]_{1,2} = -\frac{u_{i,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i+1,j-1}(t)H_{0,i,j}(t)dt\,,$$

$$[F_j]_{2,1} = -\frac{u_{i,j-1}u_{i+1,j}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i,j-1}(t)H_{0,i+1,j}(t)dt\,,$$

$$[F_j]_{2,2} = -\frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}}\int_0^1 H_{1,i+1,j-1}(t)H_{0,i+1,j}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{D}_j]_{1,1} = u_{i,j}^2\Delta_{1,i}\int_0^1\left(\frac{(H'_{0,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{(H'_{1,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j}}\right)dt\,,$$

$$[\tilde{D}_j]_{1,2} =$$

$$[\tilde{D}_j]_{2,1} = u_{i,j}u_{i+1,j}\Delta_{1,i}\int_0^1\left(\frac{H'_{0,i,j}(t)H'_{0,i+1,j}(t)}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{H'_{1,i,j}H'_{1,i+1,j}(t)}{\Delta_{2,j}}\right)dt,$$

$$[\tilde{D}_j]_{2,2} = u_{i+1,j}^2\Delta_{1,i}\int_0^1\left(\frac{(H'_{0,i+1,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{(H'_{1,i+1,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}}\right)dt\,,$$

$$[\tilde{E}_j]_{1,1} = \frac{u_{i,j}u_{i,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}}\int_0^1 H'_{1,i,j}(t)H'_{0,i,j+1}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{E}_j]_{1,2} = \frac{u_{i,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}}\int_0^1 H'_{1,i,j}(t)H'_{0,i+1,j+1}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{E}_j]_{2,1} = \frac{u_{i,j+1}u_{i+1,j}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}}\int_0^1 H'_{1,i+1,j}(t)H'_{0,i,j+1}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{E}_j]_{2,2} = \frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}}\int_0^1 H'_{1,i+1,j}(t)H'_{0,i+1,j+1}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{F}_j]_{1,1} = \frac{u_{i,j}u_{i,j-1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}}\int_0^1 H'_{1,i,j-1}(t)H'_{0,i,j}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{F}_j]_{1,2} = \frac{u_{i,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}}\int_0^1 H'_{1,i+1,j-1}(t)H'_{0,i,j}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{F}_j]_{2,1} = \frac{u_{i,j-1}u_{i+1,j}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}}\int_0^1 H'_{1,i,j-1}(t)H'_{0,i+1,j}(t)dt\,,$$

$$[\tilde{F}_j]_{2,2} = \frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}}\int_0^1 H'_{1,i+1,j-1}(t)H'_{0,i+1,j}(t)dt\,,$$

права частина системи має вигляд

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2u_{i,m+1}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,m}H_{0,i,m+1}(t)+\Delta_{2,m+1}H_{1,i,m+1}(t))dt \\ 2u_{i+1,m+1}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,m}H_{0,i+1,m+1}(t)+\Delta_{2,m+1}H_{1,i+1,m+1}(t))dt \\ 2u_{i,m+2}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,m+1}H_{0,i,m+2}(t)+\Delta_{2,m+2}H_{1,i,m+2}(t))dt \\ 2u_{i+1,m+2}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,m+1}H_{0,i+1,m+2}(t)+\Delta_{2,m+2}H_{1,i+1,m+2}(t))dt \\ \vdots \\ 2u_{i,M}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,M-1}H_{0,i,M-1}(t)+\Delta_{2,M}H_{1,i,M}(t))dt \\ 2u_{i+1,M}\Delta_{1,i}\int_0^1(\Delta_{2,M-1}H_{0,i+1,M-1}(t)+\Delta_{2,M}H_{1,i+1,M}(t))dt \end{pmatrix}.$$

Доведення. Відмітимо, що коли знаходженню підлягають варіації функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$ при фіксованому $j$ ( $j$ від $m+1$ до $M$ ), достатньо звузити область інтегрування функціоналу до об'єднання елементів $\Pi_{i,j-1}\cup\Pi_{i,j}$, оскільки наближений розв'язок $\tilde{u}$ тільки на цій області залежить від цих двох функцій. Знаходячи варіації Лагранжа від $J(\tilde{u})$ по цим двом функціям, отримуємо два звичайних диференціальних рівняння з крайовими умовами, накладеними на $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$. Цим двом рівнянням відповідає два рядки системи (5). Знаходячи варіації по всім $2(M-m)$ функціям $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, …, $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$ і враховуючи накладені на них умови, отримуємо систему

(5). Теорему доведено.

Очевидно, що аналогічна теорема може бути сформульована для знаходження варіацій функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $H_{«,i,j}(y)$, $i=\overline{m+1,M}$, $« = 0,1$, коли сукупність елементів $\Pi_{m,j}$, $\Pi_{m+1,j}$, $\ldots$, $\Pi_{M,j}$, які задовольняють умовам, аналогічним умовам Теореми 1.

З Теореми 1 випливає, що при реалізації ітераційного процесу знаходження координатних функцій це обчислення відбувається по смугам: для знаходження $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$, $j=\overline{m+1,M}$ використовується смуга $\{(x,y)\,|\,x_i \le x \le x_{i+1}\}$, для $H_{1,i,j}(x)$, $H_{0,i,j+1}(x)$, $i=\overline{m+1,M}$ — смуга $\{(x,y)\,|\,y_j \le y \le y_{j+1}\}$. Ця властивість дозволяє використовувати паралельні обчислювальні алгоритми розв'язання задач такого типу.

Відмітимо, що описана ітераційна схема допускає очевидні модифікації. Наприклад, знаходження сукупності функцій $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, $\ldots$, $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$, які визначають розв'язок на смузі $\Pi_{i,m} \cup \Pi_{i,m+1} \cup \ldots \Pi_{i,M}$, може бути виконано за два кроки: перший — знаходження сукупності $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $\ldots$, $h_{1,i,M}(t)$, другий — сукупності $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, $\ldots$, $h_{0,i+1,M}(t)$. На кожному з цих двох кроків система, аналогічна (5), буде мати порядок $M-m$, тобто вдвічі менше, ніж при обчисленні сукупності функцій $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, $\ldots$, $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$ згідно Теореми 1.

### 4. Обчислювальний експеримент

Обчислювальний експеримент був проведений з модельною задачею — двовимірною граничною задачею Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = -2, \qquad (x,y)\in G, \\ &u(x,y) = 0, \quad (x,y)\in ô\,\overline{G}. \end{aligned} \tag{6}$$

Експеримент проводився для трьох областей різної форми. На Рис. 1 представлені контури цих області з сіткою, на якій реалізовувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

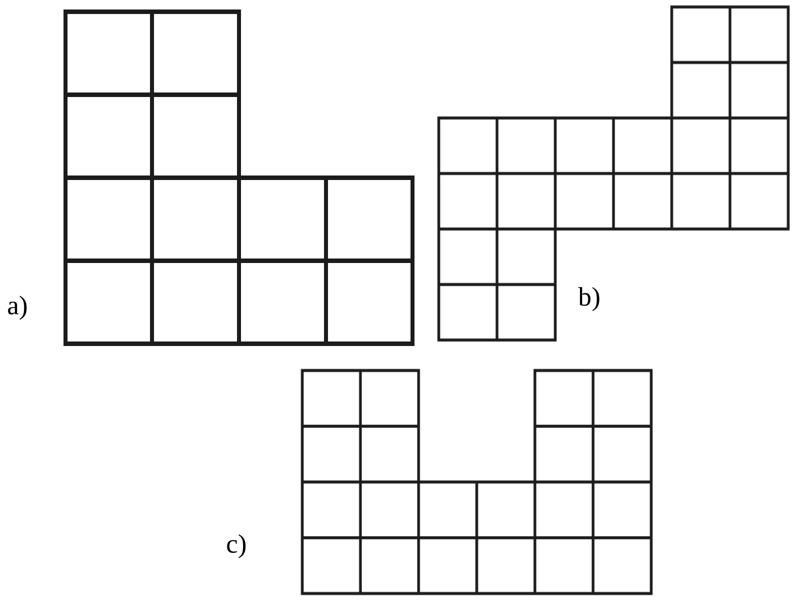


*Рис. 1. Області a, b, c з сіткою, на якій реалізовувалася схема МСЕ с вибором оптимальних координатних функцій.*

Для кожної області проводилися ітерації до обчислення сукупності вузлових параметрів та функцій $u^{[1,1]}{}_{i,j}, h^{[1]}{}_{«,i,j}(\cdot), H^{[1]}{}_{«,i,j}(\cdot)$ включно. При цьому порівнювалися точності двох наближених розв'язків — отриманого за допомогою схеми МСЕ з вибором координатних функцій та отриманого з використанням кусково-лінійних координатних функцій ($h_{«,i,j}(t) = « + (1-2«)t$, $H_{«,i,j}(t) = « + (1-2«)t$, $« = 1{,}2$). Остання схема є класичною для задачі (6) [14]. Критерієм порівняння виступало значення функціоналу енергії наближеного розв'язку, яке для еліптичних задач співвідноситься з похибкою наступним чином

$$J(u) = \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 ,$$

де $\|\ \|_A$ — енергетична норма, пов'язана з оператором $A$ крайової задачі (в нашому випадку оператор Лапласа). У якості початкових наближень координатних функцій $h^{[0]}{}_{«,i,j}(\cdot), H^{[0]}{}_{«,i,j}(\cdot)$ використовувалися згадані вище кусково-лінійни координатні функції.

Обчислювальний експеримент полягав у проведенні ітераційного процесу МСЕ з вибором координатних функцій, обчисленні функціоналу енергії для наближеного розв'язку цієї схеми (на кожному кроці) та знаходженні кількості вузлових параметрів наближеного розв'язку за класичною схемою МСЕ, який дає таке ж значення функціоналу енергії. Тобто, знаходилася та кількість вузлових параметрів, при якій наближений розв'язок класичної схеми має таку ж похибку у енергетичній нормі, що і наближений розв'язок МСЕ з вибором координатних функцій. Для класичної схеми МСЕ використовувалася рівномірна сітка з однаковим кроком розбиття по обом координатам. Кількість вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу $J(\tilde{u})$ від наближеного розв'язку, побудованого МСЕ з вибором координатних функцій, обчислювалася наступним чином. Для класичної схеми знаходилися значення функціоналу енергії для послідовності сіток (починаючи з мінімального кроку розбиття), для цієї послідовності будувався лінійний інтерполянт, що відбиває залежність значення функціоналу $J(\tilde{u})$ класичного розв'язку від кількості вузлових параметрів, і цей інтерполянт використовувався для знаходження шуканої кількості вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу енергії від розв'язку, отриманого МСЕ з вибором координатних функцій. Число $N$ у наведених нижче таблицях є саме цією кількістю вузлових параметрів, отриманих за допомогою інтерполянта.

1. Область $([0,\ 2]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 1]\times[0,\ 2])$, Рис. 1, a. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями використано рівномірну сітку з кроком 1/2 по обом координатам. Кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 5. В Табл. 1 наведені значення функціоналу енергії на послідовних кроках ітераційного процесу для МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій і кількість степенів свободи (вузлових параметрів) $N$ класичної МСЕ, яка необхідна для досягнення того ж значення функціоналу енергії.

*Табл. 1. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій з класичною схемою МСЕ для області* $([0,\ 2]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 1]\times[0,\ 2])$

| Ітерації | $J(\tilde{u})$ | $N$ |
|---|---|---|
| $h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -0.63502358 | 5 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -0.738081695 | 13 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[1,0]}{}_{i,j}$ | -0.739004998 | 14 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[1,0]}{}_{i,j}$ | -0.852729837 | 1083 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[1,1]}{}_{i,j}$ | -0.85311464 | 1339 |

2. Область $([0,\ 1]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 3]\times[1,\ 2])\cup([2,\ 3]\times[2,\ 3])$, Рис. 1, b. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями взята рівномірна сітка з кроком 1/2 по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 2 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до Табл. 1.

3. Область $([0,\ 3]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 1]\times[1,\ 2])\cup([2,\ 3]\times[1,\ 2])$, Рис. 1, c. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями вибрана рівномірна сітка з кроком 1/2 по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 3 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до Табл. 1.

*Табл. 2. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій*

*з класичною схемою МСЕ для області*
$([0,\ 1]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 3]\times[1,\ 2])\cup([2,\ 3]\times[2,\ 3])$

| Ітерації | $J(\tilde{u})$ | $N$ |
|---|---|---|
| $h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -1.18308396379 | 9 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -1.37441579503 | 25 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[1,0]}{}_{i,j}$ | -1.37618989105 | 26 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[1,0]}{}_{i,j}$ | -1.58021202352 | 661 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[1,1]}{}_{i,j}$ | -1.58127760380 | 732 |

*Табл. 3. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій з класичною схемою МСЕ*
$([0,\ 3]\times[0,\ 1])\cup([0,\ 1]\times[1,\ 2])\cup([2,\ 3]\times[1,\ 2])$

| Ітерації | $J(\tilde{u})$ | $N$ |
|---|---|---|
| $h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[0]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -1.18308396379 | 9 |
| $h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[0,0]}{}_{i,j}$ | -1.35170061965 | 23 |
| $h^{[0]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[0,1]}{}_{i,j}$ | -1.35571120522 | 23 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[0,1]}{}_{i,j}$ | -1.54662903454 | 167 |
| $h^{[1]}{}_{«,i,j}, H^{[1]}{}_{«,i,j}, u^{[1,1]}{}_{i,j}$ | -1.54836797703 | 174 |

Як випливає з результатів, представлених у Табл. 1-3, для досягнення точності у енергетичній нормі, яку дає МСЕ з вибором координатних функцій на кроці ітераційного процесу, що відповідає сукупності $u^{[1,1]}{}_{i,j}, h^{[1]}{}_{«,i,j}(\cdot), H^{[1]}{}_{«,i,j}(\cdot)$, потрібна кількість елементів класичної схеми, яка для першої області у 1339/5 ≈ 268 разів більша кількості елементів схеми МСЕ з вибором координатних функцій, та приблизно у 81 та 19 разів для другої та третьої відповідно.

**Висновки**

В даній роботі запропоноване подальше розширення обчислювальних схем МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач, що відрізняється від раніш запропонованих використанням локальної системи координатних функцій, пов’язаних з кожним вузлом, на відміну від загальної системи функцій, запропонованої у попередніх роботах. Можна сказати, що данна схема підвищує адаптивність обчислювальної схеми, що дає змогу значно підняти точність наближених розв’язків, отриманих за цією схемою.

Головні властивості запропонованої схеми полягають у тому, що координатні функція МСЕ не задаються наперед, як у відомих схемах, що використовують поліноміальні інтерполянти, а знаходяться з умови мінімуму фунціоналу енергії, що відповідає заданій крайовій задачі. На відміну від адаптивних схем МСЕ, вид цих функцій не фіксується (у вигляді полінома чи функції іншого классу), а знаходиться як розв'язок варіаційної задачі, що визначається функціоналом енергії задачі та формою наближеного розв'язку.

Розв'язання модельної задачі, проведене у ході обчислювального експерименту, має наступні особливості:

1) Наближений розв'язок знаходится ітераційним методом, у якому на початку використовувались відомі координатні функції (наприклад, кусково-лінійні, як в данній роботі) і ітерації проводилися для кожної смуги розбиття області на елементи;

2) Знаходження координатних функцій по смугам дозволяє використовувати алгоритми з розпаралелюванням, що може мати значення для великих, складних областей, а також, напевне, для задач високої розмірності;

3) Обчислювальний експеримент продемонстрував набагото вищу точність пропонованої схеми порівняно з класичним МСЕ на основі кусково-лінійних інтерполянтів.

Відкритими питаннями запропонованої обчислювальної схеми, які передбачається дослідити у наступних роботах, є: розробка ітераційної процедури для задач високої розмірності ( $n \geq 3$ ); дослідження збіжності цих ітераційних процедур; оцінка похибки наближеного розв'язку схеми у різних функціональних просторах; дослідження питань, пов'язанних з існуванням і єдиністю наближеного розв'язку даної схеми, що реалізує мінімум функціоналу енергії.

ЛІТЕРАТУРА


1. Babuška I., Guo B.Q. The h-p version of finite element method, Part 1: The basic approximation results // Comp. Mech. - 1986. - No. 1. - P. 21-41.
2. Babuška I., Guo B.Q. The h-p version of finite element method, Part 2: General results and approximation // Comp. Mech. - 1986. - No. 1. - P. 203-220.
3. Goel J.J. Construction of Basis Functions for Numerical Utilization of Ritz's Method // Numer. Math. - 1968. - V. 12. - P. 435-447.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. О выборе координатных функций в обобщенном методе Бубнова-Галеркина // ДАН СССР. - 1977. - Т. 232, № 6. - С. 1253-1256.
5. Михлин С.Г. О координатных системах вариационно-разностного метода // Доклады АН СССР. - 1971. - Т. 200, № 3. - С. 526–529.
6. Смелов В.В. Об одном способе формирования базисных функций для многомерных вариационных задач // Разностные и вариационно-разностные методы. - Вып. 2. - Новосибирск, 1977. - С. 111-117.
7. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // Тезисы докл. 2-й респ. конференции ‘‘Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе”. - К. - 1978. - С. 21-22.
8. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференциальные уравнения. 1984. - Т 20, № 4. - С.677-688.

9. Литвин О.Н. Методи обчислень. Додаткові глави. - Київ: Наукова думка, 2005. - 333 с.
10. Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В. Про чисельну реалізацію оптимального методу скінченних елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісник Львівської Політехніки. - 1998. - № 337, Т. 2. - С. 294-297.
11. Литвин О.Н., Носов К.В. Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Кибернетика и системный анализ. - 1999. № 1. - С. 178-187.
12. Литвин О.М., Носов К.В. Деякі оцінки ітераційного процесу в методі оптимальних скінчених елементів // Матеріали X міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. - К.: Задруга, 2004. - С. 436.
13. Баранова Т. А. Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінченних елементів // Праці міжнародного сімпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, с. 34-35.
14. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 349 с.


Надійшла у першій редакції 06.09.2011, в останній – 02.11.2011.