УДК 519.6

Базис краевых задач с граничными условиями широкого класса для использования вариационных методов

И. А. Баранов
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В работе представлен метод построения базиса для широкого класса граничных условий на основе базиса кубического B-сплайну. Данный базис является полным и имеет высокую аппроксимационную способность. Метод заключается в построении граничных элементов базиса, которые удовлетворяют краевым условиям задачи и учитывают стыковку со стандартным базисом внутри области.

Ключевые слова: *базис краевой задачи, вариационные методы, численное решение.*

У роботі представлений метод побудови базису для широкого класу граничних умов на основі базису кубічного B-сплайну. Даний базис є повним та має високу апроксимаційну здатність. Метод полягає в побудові граничних елементів базису, які задовольняють крайовим умовам задачі і враховують стиковку зі стандартним базисом в середині області.

Ключові слова: *базис крайової задачі, варіаційні методи, чисельне рішення.*

The method of basis construction for wide class boundary conditions based on the basis of cubic B-spline is presented in work. This basis is full and has high approximation characteristics. This method consists in construction of boundary elements of basis which are satisfied the boundary conditions of problem and took into account the joint with a standard basis into a domain.

Key words: *basis of the boundary value problem, variations method, numerical solution.*

Применение вариационных методов математической физики [1,2] для решения краевых задач дифференциальных уравнений – очень эффективно, однако, при этом, удовлетворение краевым условиям составляет зачастую серьезную проблему. Метод R-функций [3-6] академика НАН Украины Рвачева В.Л. позволил решить эту проблему. Данный метод преобразует некоторый стандартный базис в базис краевой задачи, что позволяет точно учесть граничные условия, а также обеспечить полноту построенного базиса. Однако, структура решения краевой задачи построенная по методу R-функций преобразует все элементы базиса, что требует определенных затрат машинного времени. Кроме того, чем сложнее область решения задачи, тем сложнее функции, входящие в оператор преобразования базиса, что увеличивает время счета. Таким образом, актуальной задачей является построение эффективных базисов краевых задач для дифференциальных уравнений. Для многих прикладных задач удобными, с вычислительной точки зрения, являются базисы, состоящие из финитных функций, которые получаются переносом некоторого элемента [3]. В настоящее время, широкое употребление получили базисные сплайны [7,8], благодаря их высоким аппроксимационным свойствам и удобству применения. В данной работе предлагается метод построения базиса для граничных широкого класса на основе базиса B-сплайна. Базисные элементы, носители которых целиком лежат внутри области решения краевой задачи, остаются без изменения, таким образом, обеспечивается аппроксимация в некоторой области, целиком лежащей в области решения задачи, а элементы базиса, носители которых пересекают границу области решения задачи, заменяются на базисные элементы, удовлетворяющие краевым условиям задачи и учитывающие стыковку с базисом внутри области. Таким образом, метод построения базиса сводится к построению граничных элементов. Благодаря такой схеме можно существенно увеличить скорость решения краевых задач.

Данный подход был применен для построения базиса смешанной краевой задачи. В данной работе, впервые, представлен метод построения базиса для широкого класса граничных условий.

Рассмотрим задачу построения базиса для одномерной краевой задачи на основе базиса кубического В-сплайна.

Рассмотрим возможные случаи граничных условий в некоторой точке (для определенности в точке 0):

1. Одно граничное условие. В общем случае:

$$\left\{ a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = b_0; \right. \qquad (1)$$

2. Два граничных условия. В общем случае:

$$\begin{cases} a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = b_1; \\ a_0^2 u(x) + a_1^2 u'(x) + a_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = b_2; \end{cases} \qquad (2)$$

3. Три граничных условия. В общем случае:

$$\begin{cases} a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = b_1; \\ a_0^2 u(x) + a_1^2 u'(x) + a_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = b_2; \\ a_0^3 u(x) + a_1^3 u'(x) + a_2^3 u''(x) \Big|_{x=0} = b_3; \end{cases} \qquad (3)$$

Граничные условия вида (2) (при $k_2^2 \neq 0, k_0^1 \neq 0$) и (3) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^1 u(x) + \tilde{a}_1^1 u'(x) \Big|_{x=0} = \tilde{b}_1; \\ \tilde{a}_1^2 u'(x) + \tilde{a}_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = \tilde{b}_2; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} u(x) \Big|_{x=0} = \tilde{b}_1; \\ u'(x) \Big|_{x=0} = \tilde{b}_2; \\ u''(x) \Big|_{x=0} = \tilde{b}_3; \end{cases} \qquad (5)$$

Представленные условия можно привести к однородным:

$$\left\{ k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) + k_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \right. \qquad (6)$$

$$\begin{cases} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x)\Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x)\Big|_{x=0} = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u(x)\big|_{x=0} = 0; \\ u'(x)\big|_{x=0} = 0; \\ u''(x)\big|_{x=0} = 0; \end{cases} \quad (8)$$

Пусть для определенности решается задача на отрезке $[0,a]$. И пусть рассматривается задача построения базиса на основе базиса кубического B-сплайна $\{¨_i\}$ с диаметром носителя $2h$. Элементы, носители которых лежат внутри области, остаются без изменения (рис. 1, жирные линии).

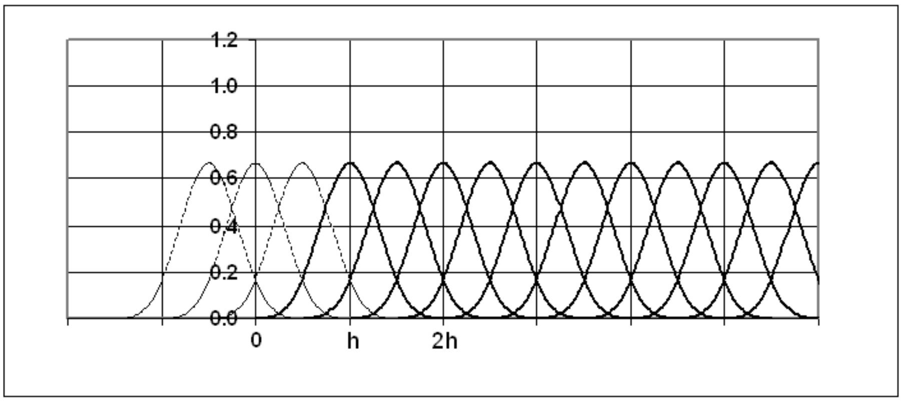

Рис.1. Стандартный базис кубического B-сплайна.

Рассмотрим метод построения граничных элементов базиса, удовлетворяющих краевым условиям (6-8).

Пусть есть некоторая функция $\mu(x)$, такая что: $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = \mu_1$, $\mu''(0) = 0$.

Рассмотрим произвольную функцию $F(x)$. Рассмотрим некоторое приближение функции $F(x)$ в окрестности 0.

$$F(x) = a\mu^2(x) + b\mu(x) + c + ¢ .$$

Данную функцию необходимо разложить по новому базису, удовлетворяющему краевым условиям.

Построим разложение функции $F(x)$ по стандартному базису кубического B-сплайна:

$$F(x) \approx \sum_{i=0}^{2n} c_i ¨_i .$$

Рассмотрим $F(x) \approx f_2(x) + f_1(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i ¨_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i ¨_i$ (рис.2).

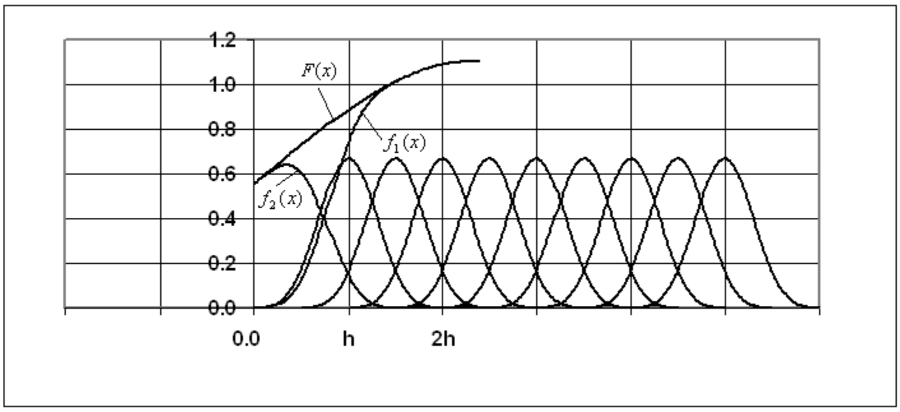

Рис.2. Функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$.

Функция $f_1(x)$ остается без изменения.

Рассмотрим следующие разложения:

$$1=\sum_{i=3}^{5} c_i^{0}\,\ddot{}\,{}_i\ ,\ \mu(x)\approx\sum_{i=3}^{5} c_i^{1}\,\ddot{}\,{}_i\ ,\ \mu^{2}(x)\approx\sum_{i=3}^{5} c_i^{2}\,\ddot{}\,{}_i \text{ в точке } \frac{3h}{2}.$$

Таким образом, чтобы $\left(\mu^{i}(x)\right)^{(j)}\Big|_{\frac{3h}{2}}=\sum_{k=3}^{5} c_k^{i}\,\ddot{}\,{}^{(j)}_k\Big|_{\frac{3h}{2}}$, i,j=0,1,2.

Теперь рассмотрим функции:

$$g_i(x)=\begin{cases}\mu^{i}(x)-\sum\limits_{k=3}^{5} c_k^{i}\,\ddot{}\,{}_k, & x\in\left[0,\dfrac{3h}{2}\right],\\ 0, \quad x>\dfrac{3h}{2}\end{cases}\qquad i=0,1,2 .$$

Функции $g_i(x)\in C^{2}[0,a]$.

Теперь в качестве функции $f_2(x)$ возьмем:

$$\tilde{f}_2=ag_2(x)+bg_1(x)+cg_0(x) .$$

$$F(x)\approx\tilde{f}_2(x)+f_1(x)=ag_2(x)+bg_1(x)+cg_0(x)+\sum_{i=3}^{2n} c_i\,\ddot{}\,{}_i .$$

Рассмотрим случай удовлетворения условию $k_0^1u(x)+k_1^1u'(x)+k_2^1u''(x)\Big|_{x=0}=0$.

Потребуем выполнения граничного условия от функции $F(x)$:

Так как, $\left(\sum\limits_{k=3}^{2n} c_k\,\ddot{}\,{}_k\right)^{(i)}\Bigg|_0=0$, а также $\left(\sum\limits_{k=3}^{2n} c_k^{i}\,\ddot{}\,{}_k\right)^{(i)}\Bigg|_0=0$ $i=0,1,2;$

$$\left(k_0^1F(x)+k_1^1F'(x)+k_2^1F''(x)\right)\Big|_0 =$$
$$=\left(k_0^1\left(a\mu^2(x)+b\mu(x)+c\right)+k_1^1\left(2a\mu(x)\mu'(x)+b\mu'(x)\right)+\right.$$
$$\left.+k_2^1\left(2a(\mu'(x))^2+2a\mu(x)\mu''(x)+b\mu''(x)\right)\right)\Big|_0 =$$
$$=k_0^1c+k_1^1\mu_1b+k_2^1(2a(\mu_1)^2+b\mu_2)=0$$

Отсюда следует
$$\begin{cases} c=-\dfrac{k_1^1\mu_1b+k_2^1(2a(\mu_1)^2+b\mu_2)}{k_0^1}, & k_0^1\neq 0;\\ a=-\dfrac{b(k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2)}{2k_2^1(\mu_1)^2}, & k_0^1=0, k_2^1\neq 0;\\ b=0, & k_0^1=0, k_2^1=0. \end{cases}$$

Таким образом:
$$f_2(x)=ag_2(x)+bg_1(x)-\frac{k_1^1\mu_1b+k_2^1(2a(\mu_1)^2+b\mu_2)}{k_0^1}g_0(x)=$$
$$=a\left(g_2(x)-\frac{2k_2^1(\mu_1)^2}{k_0^1}g_0(x)\right)+b\left(g_1(x)-\frac{k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2}{k_0^1}g_0(x)\right),\quad k_0^1\neq 0$$
или
$$f_2(x)=-\frac{b(k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2)}{2k_2^1(\mu_1)^2}g_2(x)+bg_1(x)+cg_0(x)=$$
$$b\left(g_1(x)-\frac{(k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2)}{2k_2^1(\mu_1)^2}g_2(x)\right)+cg_0(x),\quad k_0^1=0,\quad k_2^1\neq 0$$
или
$$f_2(x)=ag_2(x)+cg_0(x),\quad k_0^1=0,\quad k_2^1=0;$$
Таким образом, функции
$$\begin{cases} \left\{g_2(x)-\dfrac{2k_2^1(\mu_1)^2}{k_0^1}g_0(x),\quad g_1(x)-\dfrac{k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2}{k_0^1}g_0(x)\right\}, & k_0^1\neq 0;\\ \left\{g_1(x)-\dfrac{(k_1^1\mu_1+k_2^1\mu_2)}{2k_2^1(\mu_1)^2}g_2(x),\quad g_0(x)\right\}, & k_0^1=0, k_2^1\neq 0;\\ \left\{g_2(x),\quad g_0(x)\right\}, & k_0^1=0,\quad k_2^1=0; \end{cases}$$
можно взять в качестве первых двух элементов базиса. Данные функции удовлетворяют условию $k_0^1u(x)+k_1^1u'(x)+k_2^1u''(x)\Big|_{x=0}=0$.

Рассмотрим случай удовлетворения условию $\begin{cases} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x)\Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x)\Big|_{x=0} = 0; \end{cases}$.

Потребуем выполнения данного граничного условия от функции $F(x)$:

Так как, $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k \,\ddot{}\;_k\right)^{(i)}\Bigg|_0 = 0$, а также $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k^i \,\ddot{}\;_k\right)^{(i)}\Bigg|_0 = 0$, $i = 0,1,2;$

$$\left(k_0^1 F(x) + k_1^1 F'(x)\right)\Big|_0 =$$

$$= \left(k_0^1\left(a\mu^2(x) + b\mu(x) + c\right) + k_1^1\left(2a\mu(x)\mu'(x) + b\mu'(x)\right)\right)\Big|_0 =$$

$$= k_0^1 c + k_1^1 \mu_1 b = 0$$

$$\left(k_1^2 F'(x) + k_2^2 F''(x)\right)\Big|_0 =$$

$$= \left(k_1^2\left(2a\mu(x)\mu'(x) + b\mu'(x)\right) + k_2^2\left(2a(\mu'(x))^2 + 2a\mu(x)\mu''(x) + b\mu''(x)\right)\right)\Big|_0 =$$

$$= k_1^2 b\mu_1 + k_2^2(2a(\mu_1)^2 + b\mu_2) = 0$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} \begin{cases} c = -\dfrac{k_1^1 \mu_1 b}{k_0^1}, & k_0^1 \neq 0; \\ b = 0 & k_0^1 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{b(k_1^2\mu_1 + k_2^2\mu_2)}{2k_2^2(\mu_1)^2}, & k_2^2 \neq 0; \\ b = 0, & k_2^2 = 0; \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом:

$$f_2(x) = -\frac{b(k_1^2\mu_1 + k_2^2\mu_2)}{2k_2^2(\mu_1)^2} g_2(x) + bg_1(x) - \frac{k_1^1\mu_1 b}{k_0^1} g_0(x) =$$

$$= b\left(g_1(x) - \frac{(k_1^2\mu_1 + k_2^2\mu_2)}{2k_2^2(\mu_1)^2} g_2(x) - \frac{k_1^1\mu_1}{k_0^1} g_0(x)\right), \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 \neq 0$$

или

$$f_2(x) = ag_2(x), \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 = 0$$

или

$$f_2(x) = cg_0(x), \quad k_0^1 = 0, k_2^2 = 0$$

Таким образом, функцию

$$\begin{cases} \left\{ g_1(x) - \dfrac{(k_1^2\mu_1 + k_2^2\mu_2)}{2k_2^2(\mu_1)^2} g_2(x) - \dfrac{k_1^1\mu_1}{k_0^1} g_0(x) \right\}, & k_0^1 \neq 0,\, k_2^2 \neq 0 \\ \{g_2(x)\}, & k_0^1 \neq 0, k_2^2 = 0 \\ \{g_0(x)\}, & k_0^1 = 0, \quad k_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

можно взять в качестве первого элементов базиса. Данные функции удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x)\Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x)\Big|_{x=0} = 0; \end{cases}.$$

Рассмотрим случай удовлетворения условию $\begin{cases} u(x)\big|_{x=0} = 0; \\ u'(x)\big|_{x=0} = 0; \\ u''(x)\big|_{x=0} = 0; \end{cases}$.

Потребуем выполнения данного граничного условия от функции $F(x)$:

Так как, $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k \ddot{\ }_k\right)^{(i)}\Bigg|_0 = 0$, а также $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k^i \ddot{\ }_k\right)^{(i)}\Bigg|_0 = 0$, $i = 0,1,2;$

$$F(x)\big|_0 = \left(a\mu^2(x) + b\mu(x) + c\right)\big|_0 = c = 0$$

$$F'(x)\big|_0 = \left(2a\mu(x)\mu'(x) + b\mu'(x)\right)\big|_0 = b\mu_1 = 0$$

$$F''(x)\big|_0 = \left(2a(\mu'(x))^2 + 2a\mu(x)\mu''(x) + b\mu''(x)\right)\big|_0 = 2a(\mu_1)^2 + b\mu_2 = 0$$

Отсюда следует, что $a = b = c = 0$

Таким образом: $f_2(x) = 0$

Теорема.

Если в качестве функции $\mu(x)$ взять функцию $\mu(x) = x$, то любую функцию из пространства сплайн-функций, удовлетворяющую граничным условиям вида (6-8) можно точно разложить по построенному базису.

Доказательство.

Рассмотрим следующие разложения:

$$1 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^0 \ddot{\ }_i\ ,\ x = \sum_{i=0}^{2n} c_i^1 \ddot{\ }_i\ ,\ x^2 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^2 \ddot{\ }_i\ ,$$

Тогда:

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k^i \ddot{\ }_k\ , \quad i = 0,1,2\ .$$

Рассмотрим произвольную функцию вида: $\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i$.

Предположим, что:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2 \ddot{\;}_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1 \ddot{\;}_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0 \ddot{\;}_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \ddot{\;}_i$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{2} c_i \ddot{\;}_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2 \ddot{\;}_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1 \ddot{\;}_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0 \ddot{\;}_i$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^1 & c_0^0 \\ c_1^2 & c_1^1 & c_1^0 \\ c_2^2 & c_2^1 & c_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы линейно независимые, так как функции $\{1, x, x^2\}$ линейно независимые. Таким образом детерминант матрицы detC≠0. Следовательно, существует C^{-1}.

Тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всегда можно представить:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i = a\sum_{i=0}^{2} c_i^2 \ddot{\;}_i + b\sum_{i=0}^{2} c_i^1 \ddot{\;}_i + c\sum_{i=0}^{2} c_i^0 \ddot{\;}_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \ddot{\;}_i .$$

Теперь, если потребовать выполнение граничных условий вида (6-8) от произвольной функции из пространства сплайн-функций:

$$\left\{ k_0^1 \sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i + k_1^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i \right)' + k_2^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i \right)'' \right|_{x=0} = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} & k_0^1 \sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i + k_1^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i \right)' \Bigg|_{x=0} = 0; \\ & k_1^2 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i \right)' + k_2^2 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \ddot{\;}_i \right)'' \Bigg|_{x=0} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \left.\sum_{i=0}^{2n} c_i \,¨\, i\right|_{x=0} = 0; \\ \left.\left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \,¨\, i\right)'\right|_{x=0} = 0; \\ \left.\left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \,¨\, i\right)''\right|_{x=0} = 0; \end{cases}$$

приходим к условиям:

$$\begin{cases} c = -\dfrac{k_1^1 b + 2k_2^1 a}{k_0^1}, \quad k_0^1 \neq 0; \\ a = -\dfrac{bk_1^1}{2k_2^1}, \quad k_0^1 = 0, k_2^1 \neq 0; \\ b = 0, \quad k_0^1 = 0, k_2^1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} c = -\dfrac{k_1^1 b}{k_0^1}, \quad k_0^1 \neq 0; \\ b = 0 \quad k_0^1 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{bk_1^2}{2k_2^2}, \quad k_2^2 \neq 0; \\ b = 0, \quad k_2^2 = 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\{a = b = c = 0$$

Это совпадает с выведенными условиями, при: $\mu_1 = 1; \quad \mu_2 = 0.$

Теорема доказана.

Численная реализация предложенного подхода

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} f''(x) = -® \sin(®x), \quad x \in [0,1]; \\ 2f'(x) + f(x)\big|_0 = 0; \\ f(x)\big|_1 = 0; \end{cases}$$

Аналитическим решением данной задачи будет функция: $\dfrac{1}{®}\sin(®x) - 2x + 2$.

Для данной задачи применим метод наименьших квадратов [1,2].

Результаты вычислительного эксперимента (количество сплайнов 21):

x	solution	sin(xπ)-π	Abs(solution-(sin(xπ)-π))
0.00000000000	1.99999835514	2.00000000000	0.00000164486
0.10000000000	1.89836160274	1.89836316431	0.00000156156
0.20000000000	1.78709638640	1.78709785676	0.00000147035
0.30000000000	1.65751674338	1.65751810740	0.00000136402
0.40000000000	1.50272945458	1.50273069146	0.00000123688
0.50000000000	1.31830880093	1.31830988618	0.00000108526
0.60000000000	1.10272978355	1.10273069146	0.00000090791
0.70000000000	0.85751740132	0.85751810740	0.00000070608
0.80000000000	0.58709737322	0.58709785676	0.00000048344
0.90000000000	0.29836291863	0.29836316431	0.00000024568
1.00000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000000

Выводы

В данной работе представлен метод построения базиса для краевых задач с граничными условиями широкого класса на основе базиса В-сплайна. Доказана теорема, показывающая полноту построенного базиса.

Для дифференциальных уравнений, оператор которых представляет линейную комбинацию самой функции и ее различных производных, элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений, построенных по методу наименьших квадратов, Ритца и др.[1,2] будут повторяться и их можно будет вычислить даже аналитически. Что позволит существенно сократить время счета и уменьшить накопление погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970.- 512 с.
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М. Мир, 1985.- 590 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
4. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Метод R−функций для расчета взаимосвязанных полей в гидропотоках//Вісник ХНУ. − Харьков, 2007. − №780. − С.9−18.
5. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом R − функций// Вісник ХНУ. − Харьков, 2008. − №809. − С. 9−19.
6. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. –306 с.
7. Д. Роджерс, Дж.Адамс. Математические основы машинной графики.– М. Мир, 2001.- 604 с.
8. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М. Наука, 1984. – 352 с.

Надійшла у першій редакції 22.04.2011, в останній – 02.11.2011.