УДК 519.6

Метод квазіконформних відображень моделювання процесів руху рідин у водоймах з урахуванням просторових збурень

А. Я. Бомба, Є. В. Савюк, А. В. Теребус
Рівненський державний гуманітарний університет, Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

Розглядається задача розрахунку гідродинамічних параметрів течії у водоймі, обмеженій поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями, з урахуванням просторових збурень. Побудовано алгоритм її розв’язку з використанням методології моделювання процесів повільного руху рідин, що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем, методики апроксимації просторової фільтраційної течії деяким її «усередненим» плоским аналогом та розроблених числових методів квазіконформних відображень.

Ключові слова: *квазіконформне відображення, крайова задача, метод фіктивної фільтрації.*

Рассматривается задача расчета гидродинамических параметров течения в водоеме, ограниченном поверхностями течения и эквипотенциальными поверхностями, с учетом пространственных возмущений. Построен алгоритм ее решения с использованием методологии моделирования процессов медленного движения жидкостей, базирующейся на замене реального течения некоторым фиктивным квазиидеальным фильтрационным полем, методики аппроксимации пространственного фильтрационного течения некоторым его «усредненным» плоских аналогом и разработанных численных методов квазиконфомных отображений.

Ключевые слова: *квазиконформные отображения, краевая задача, метод фиктивной фильтрации.*

A problem of the computation of hydrodynamic flow parameters in the reservoir, restricted by stream surfaces and equipotential surfaces, taking into account spatial perturbations is considered. An algorithm of its solution with use of the slow liquid motion processes modeling methodology based on a substitution of the real stream by some fictitious quasiideal filtration field, the method of an approximation of spatial filtration flow by some its averaged plane analogue and developed numerical quasiconformal mappings methods is built.

Key words: *quasiconformal mappinging, boundary-value problem, fictitious filtration method.*

1. Вступ

Одним із основних етапів розв’язку задач, пов’язаних з моделюванням гідрофізичних процесів у водоймах є розрахунок гідродинамічних параметрів течії. При розрахунку параметрів течії у мілководних водоймах добре зарекомендували себе так звані рівняння мілкої води, які погано описують процеси в глибоководних областях [1, 2]. Нами при прогнозуванні процесів руху рідин у водоймах в двовимірному випадку запропонований метод фіктивної фільтрації, який ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень [3, 4].

В даній роботі таку методику перенесено на випадки трьохвимірних областей, течію в яких можна умовно інтерпретувати як плоско-паралельний рух вздовж окремих їх прошарків [5-7].

2. Загальна постановка задачі

Розглянемо процес перенесення рідини у змінної глибини H водоймі – області $G_2 = A_*B_*C_*D_*A^*B^*C^*D^*$, $2 = (x, y, z)$ (рис. 1), обмеженій чотирма непроникними «стінками», серед яких: дно водойми $A_*B_*C_*D_*$ ($z = -H(x, y)$), два береги $A_*D_*A^*D^*$, $B_*C_*C^*B^*$ і поверхня водойми $A^*B^*C^*D^*$ ($z = 0$), та двома еквіпотенціальними поверхнями втоку та витоку рідини в цю водойму. Припустимо, що переміщення водяних мас можна розглядати як деяку фіктивну квазіідеальну течію в даній області із заданим коефіцієнтом провідності, який визначає фізичні характеристики такої течії.

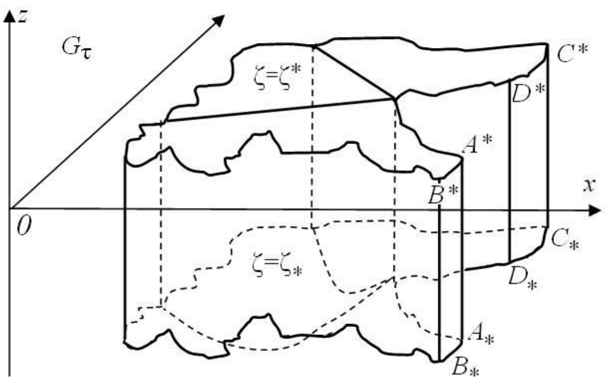

Рис.1. Фізична область G_2

Введемо стосовно G_2 деякі ортогональні криволінійні координати $(¶, ¦, s)$, пов'язані з фізичними співвідношеннями $x = X(¶, ¦, s)$, $y = Y(¶, ¦, s)$, $z = Z(¶, ¦, s)$, таким чином, щоб рівняння дна та поверхні водойми у цих координатах можна було записати у вигляді: $A_*B_*C_*D_* = \{(¶, ¦, s):\ s = s_*\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{(¶, ¦, s):\ s = s^*\}$. Рівняння решти обмежуючих G_2 поверхонь представимо наступним чином: $A_*A^*B^*B_* = \{(¶, ¦, s):\ f_*(¶, ¦) = 0\}$, $C_*C^*D^*D_* = \{(¶, ¦, s):\ f^*(¶, ¦) = 0\}$ (еквіпотенціалі), $A_*D_*A^*D^* = \{(¶, ¦, s):\ g_*(¶, ¦) = 0\}$, $B_*C_*C^*B^* = \{(¶, ¦, s):\ g^*(¶, ¦) = 0\}$ (поверхні течії), де $f_*(¶, ¦) = 0$, $f^*(¶, ¦) = 0$, $g_*(¶, ¦) = 0$, $g^*(¶, ¦) = 0$ – задані достатньо-гладкі функції. Вважатимемо, що викривлення дна є малими в порівнянні з геометричними розмірами площі водойми, а відповідний процес – двовимірним відносно змінних $(¶, ¦)$. Відповідну плоску область зміни $(¶, ¦)$ позначимо як $G_z = ABCD$. Коефіцієнт провідності, при цьому, представимо за формулою [4]: $k(s, \sim_*, \sim^*, \ _*, \ ^*, \cdot, Q) = (\sim_*(Q - \cdot)\cdot + \sim^*)(\ _*(s - s_*)(s^* - s_*)^{-1} + \ ^*)$, де Q – потік через довільний поперечний переріз течії водойми, $\cdot = \cdot(¶, ¦)$ – функція усередненої течії (див. нижче), $\sim_*$, $\sim^*$, $_*$, * – деякі параметри. Значення параметра $\sim_*$ шукатимемо на основі рівності $Q=\int_{AB} -v_{¶}\,d¶+v_{¦}\,d¦$, де $\vec{v}=(v_{¶},v_{¦})$ визначаємо згідно закону руху Дарсі, шляхом додаванням до якого рівняння нерозривності [5, 6], одержимо співвідношення для опису процесу руху рідини:

$$\vec{v}=©\left(s,\sim_*,\sim^*,\ _*,\ ^*,\cdot\ ,Q\right)\left(\frac{¨_{¶}}{H_1},\frac{¨_{¦}}{H_2}\right),$$

$$\frac{ô}{ô¶}\left(\left(\sim_*\left(Q-\cdot\ \right)\cdot\ +\sim^*\right)p(¶,¦)\frac{ô¨}{ô¶}\right)+\frac{ô}{ô¦}\left(\left(\sim_*\left(Q-\cdot\ \right)\cdot\ +\sim^*\right)q(¶,¦)\frac{ô¨}{ô¦}\right)=0, \quad (1)$$

де $p(¶,¦)=\int_{s_*}^{s^*}\left(\ _*\frac{s-s_*}{s^*-s_*}+\ ^*\right)\frac{H_2(¶,¦,s)\cdot H_3(¶,¦,s)}{H_1(¶,¦,s)}ds$, $q(¶,¦)=$
$=\int_{s_*}^{s^*}\left(\ _*\frac{s-s_*}{s^*-s_*}+\ ^*\right)\cdot\frac{H_1(¶,¦,s)\cdot H_3(¶,¦,s)}{H_2(¶,¦,s)}ds$, $H_1(¶,¦,s)=\sqrt{X_{¶}^2+Y_{¶}^2+Z_{¶}^2}$,
$H_2(¶,¦,s)=\sqrt{X_{¦}^2+Y_{¦}^2+Z_{¦}^2}$, $H_3(¶,¦,s)=\sqrt{X_{s}^2+Y_{s}^2+Z_{s}^2}$, $¨=¨(¶,¦)$ – квазіпотенціал швидкості $\vec{¬}$ ($¨\big|_{f_*(¶,¦)=0}=¨_*$, $¨\big|_{f^*(¶,¦)=0}=¨^*$, $\left.\frac{d¨}{dn}\right|_{g_*(¶,¦)=0}=\left.\frac{d¨}{dn}\right|_{g^*(¶,¦)=0}=0$).

Функція усередненої течії $\cdot=\cdot(¶,¦)$, згідно з (1), задовольняє систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\left(\sim_*\left(Q-\cdot\ \right)\cdot\ +\sim^*\right)p(¶,¦)\dfrac{ô¨}{ô¶}=\dfrac{ô\cdot}{ô¦},\\ \left(\sim_*\left(Q-\cdot\ \right)\cdot\ +\sim^*\right)q(¶,¦)\dfrac{ô¨}{ô¦}=-\dfrac{ô\cdot}{ô¶}.\end{cases} \quad (2)$$

Відповідна пара функцій ($¨=¨(¶,¦)$, $\cdot=\cdot(¶,¦)$) визначає деяку квазіаналітичну функцію $µ=µ(z)=¨(¶,¦)+i\cdot(¶,¦)$, яка при виконанні умов:

$$¨\big|_{f_*(¶,¦)=0}=¨_*,\quad ¨\big|_{f^*(¶,¦)=0}=¨^*,\quad \cdot\big|_{g_*(¶,¦)=0}=0,\quad \cdot\big|_{g^*(¶,¦)=0}=Q, \quad (3)$$

здійснює квазіконформне відображення області G_z на відповідну область квазікомплексного потенціалу [8] $G_{µ}=\left\{µ:\ ¨_*<¨<¨^*,0<\cdot<Q\right\}$. При цьому, умови гладкості даного відображення у кутових точках A, B, C, D криволінійного чотирикутника G_z запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} p(¶_A,¦_A)\,g_{*¶}(¶_A,¦_A)\,f_{*¶}(¶_A,¦_A)+q(¶_A,¦_A)\,g_{*¦}(¶_A,¦_A)\,f_{*¦}(¶_A,¦_A)=0,\\ p(¶_B,¦_B)\,g^*_{¶}(¶_B,¦_B)\,f_{*¶}(¶_B,¦_B)+q(¶_B,¦_B)\,g^*_{¦}(¶_B,¦_B)\,f_{*¦}(¶_B,¦_B)=0,\\ p(¶_C,¦_C)\,g^*_{¶}(¶_C,¦_C)\,f^*_{¶}(¶_C,¦_C)+q(¶_C,¦_C)\,g^*_{¦}(¶_C,¦_C)\,f^*_{¦}(¶_C,¦_C)=0,\\ p(¶_D,¦_D)\,g_{*¶}(¶_D,¦_D)\,f^*_{¶}(¶_D,¦_D)+q(¶_D,¦_D)\,g_{*¦}(¶_D,¦_D)\,f^*_{¦}(¶_D,¦_D)=0, \end{cases}$$

де $(¶_A,¦_A)$, $(¶_B,¦_B)$, $(¶_C,¦_C)$, $(¶_D,¦_D)$ визначаються відповідно в результаті розв’язання систем алгебраїчних рівнянь: $\begin{cases} f_*(¶,¦)=0,\\ g_*(¶,¦)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} f_*(¶,¦)=0,\\ g^*(¶,¦)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} f^*(¶,¦)=0,\\ g^*(¶,¦)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} f^*(¶,¦)=0,\\ g_*(¶,¦)=0. \end{cases}$

Відповідну нелінійну обернену задачу до (2)–(3) на квазіконформне відображення $z=z(\mu)=¶(¨,·)+i¦(¨,·)$ області G_μ на G_z при невідомому Q аналогічно до [8] отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} \left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)p(¶,¦)\dfrac{ô¦}{ô·}=\dfrac{ô¶}{ô¨},\\ -\left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)q(¶,¦)\dfrac{ô¶}{ô·}=\dfrac{ô¦}{ô¨}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} f_*(¶(¨_*,·),¦(¨_*,·))=0, & f^*\left(¶(¨^*,·),¦(¨^*,·)\right)=0, & 0\le·\le Q,\\ g_*\left(¶(¨,0),¦(¨,0)\right)=0, & g^*\left(¶(¨,Q),¦(¨,Q)\right)=0, & ¨_*\le¨\le¨^*, \end{cases} \tag{5}$$

зокрема, як наслідок (4), матимемо:

$$\frac{1}{\left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)}\frac{ô}{ô¨}\left(\frac{1}{p(¶,¦)}\frac{ô¶}{ô¨}\right)+\left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)\frac{ô}{ô·}\Big(q(¶,¦)·$$
$$·\frac{ô¶}{ô·}\Big)+\sim_*(Q-2·)q(¶,¦)\frac{ô¶}{ô·}=0,\quad \frac{1}{\left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)}\frac{ô}{ô¨}\left(\frac{1}{q(¶,¦)}\frac{ô¦}{ô¨}\right)+ \tag{6}$$
$$+\left(\sim_*(Q-·)·+\sim^*\right)\frac{ô}{ô·}\left(p(¶,¦)\frac{ô¶}{ô·}\right)+\sim_*(Q-2·)\,p(¶,¦)\frac{ô¦}{ô·}=0.$$

3. Алгоритм числового розв’язання задачі

В загальному випадку алгоритм розв’язання у рівномірній сітковій області $G^¥_\mu=\left\{(¨_i,·_j):\ ¨_i=¨_*+\Delta¨\cdot i,\ i=\overline{0,m};\ ·_j=\Delta·\cdot j,\ j=\overline{0,n};\ \Delta¨=\dfrac{¨^*-¨_*}{m},\ \Delta·=\dfrac{Q}{n},\ ¥=\dfrac{\Delta¨}{\Delta·},\ m,n\in\mathbf{N}\right\}$ побудуємо [8] шляхом поетапної параметризації (“почергового заморожування”) параметра $\sim_*$ (за відомої витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки $G_z^{¥}$ з використанням ідей методу блочної ітерації.

1. Задаємо параметри розбиття сіткової області m та n, параметр точності £ , значення потенціалів на вході ($¨_*$) та виході ($¨^*$), значення витрати Q, початкові наближення координат граничних вузлів $¶_{0,j}^{(0)}$, $¦_{0,j}^{(0)}$, $¶_{m,j}^{(0)}$, $¦_{m,j}^{(0)}$, $¶_{i,n}^{(0)}$, $¦_{i,n}^{(0)}$, $¶_{i,0}^{(0)}$, $¦_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб задовольнялись умови (5)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів $\left(¶_{i,j}^{(0)},\ ¦_{i,j}^{(0)}\right)$, де $¶_{i,j}=¶\left(¨_i,·_j\right)$, $¦_{i,j}=¦\left(¨_i,·_j\right)$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,m-1}$.

2. Шляхом чисельного розв’язання рівняння, що відображає “квазіконформну подібність в малому” елементарних чотирикутників двох областей:

$$¥=\frac{1}{mn}\sum_{i,j=1}^{m,n}\frac{\sqrt{\left(¶_{i,j-1}-¶_{i-1,j-1}\right)^2+\left(¦_{i,j-1}-¦_{i-1,j-1}\right)^2}+\sqrt{\left(¶_{i,j}-¶_{i-1,j}\right)^2+\left(¦_{i,j}-¦_{i-1,j}\right)^2}}{\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)\left(A_{i-1,j}+A_{i,j}\right)},$$

наприклад, методом Ньютона, знаходимо відповідне наближення параметра $\sim_*$. При цьому, $A_{i,j}=\sqrt{p_{i,j}^2\left(¦_{i,j}-¦_{i,j-1}\right)^2+q_{i,j}^2\left(¶_{i,j}-¶_{i,j-1}\right)^2}$, а обчислення значень функцій $p_{i,j}=p_{i,j}\left(¶_{i,j},¦_{i,j}\right)$, $q_{i,j}=q_{i,j}\left(¶_{i,j},¦_{i,j}\right)$, тут і надалі, проводимо за наступними квадратурними формулами:

$$p_{i,j}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left({}_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+{}^*\right)\frac{H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\cdot H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)}{H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)},\quad q_{i,j}=$$

$$=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left({}_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+{}^*\right)\frac{H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\cdot H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)}{H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)},\qquad h=$$

$$=\frac{s^*-s_*}{N},\ s_k=s_*+h\cdot k,\ k=\overline{0,N}.$$

3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $\left(¶_{i,j},¦_{i,j}\right)$ виходячи з різницевих аналогів рівнянь (6):

$$¶_{i,j}=\left(\frac{2}{\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)p_{i,j}}+2¥^2\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)q_{i,j}\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)p_{i,j}}\left(¶_{i+1,j}+¶_{i-1,j}\right)+¥^2\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)q_{i,j}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(¶_{i,j+1}+¶_{i,j-1}\right)-\frac{1}{4\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)p_{i,j}^2}\left(¶_{i+1,j}-¶_{i-1,j}\right)\left[p_{¶\,i,j}\left(¶_{i+1,j}-¶_{i-1,j}\right)+\right.$$

$$+p_{¦i,j}\left(¦_{i+1,j}-¦_{i-1,j}\right)\Big]+\frac{¥^2}{4}\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)\left(¶_{i,j+1}-¶_{i,j-1}\right)\Big[q_{¶i,j}\left(¶_{i,j+1}-\right.$$

$$\left.-¶_{i,j-1}\right)+q_{¦i,j}\left(¦_{i,j+1}-¦_{i,j-1}\right)\Big]+\frac{\sim_*¥Δ¨}{2}\left(Q-2·_j\right)q_{i,j}\left(¶_{i,j+1}-¶_{i,j-1}\right)\Big\},$$

$$¦_{i,j}=\left(\frac{2}{\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)q_{i,j}}+2¥^2\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)p_{i,j}\right)^{-1}·$$

$$·\Big\{\frac{1}{\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)q_{i,j}}\left(¦_{i+1,j}+¦_{i-1,j}\right)+¥^2\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)p_{i,j}·$$

$$·\left(¦_{i,j+1}+¦_{i,j-1}\right)-\frac{1}{4\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)q_{i,j}^2}\left(¦_{i+1,j}-¦_{i-1,j}\right)\Big[q_{¶i,j}\left(¶_{i+1,j}-¶_{i-1,j}\right)+$$

$$+q_{¦i,j}\left(¦_{i+1,j}-¦_{i-1,j}\right)\Big]+\frac{¥^2}{4}\left(\sim_*\left(Q-·_j\right)·_j+\sim^*\right)\left(¦_{i,j+1}-¦_{i,j-1}\right)\Big[p_{¶i,j}\left(¶_{i,j+1}-\right.$$

$$\left.-¶_{i,j-1}\right)+p_{¦i,j}\left(¦_{i,j+1}-¦_{i,j-1}\right)\Big]+\frac{\sim_*¥Δ¨}{2}\left(Q-2·_j\right)p_{i,j}\left(¦_{i,j+1}-¦_{i,j-1}\right)\Big\},$$

де $p_{¶i,j}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left(\;_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+\;^*\right)H_1^{-2}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big(H_{2¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)·$

$$·H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)+H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_{3¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-\right.$$

$$\left.-h/2\right)H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)-H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_{1¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},\right.$$

$$\left.s_k-h/2\right)\Big),\quad p_{¦i,j}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left(\;_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+\;^*\right)H_1^{-2}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big(H_{2¦}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},\right.$$

$$\left.s_k-h/2\right)·H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)+H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_{3¦}\left(¶_{i,j},\right.$$

$$\left.¦_{i,j},s_k-h/2\right)\;H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)-H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\;H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)·$$

$$H_{1¦}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big),\qquad q_{¶i,j}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left(\;_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+\;^*\right)H_2^{-2}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)·$$

$$·\Big(H_{1¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)+H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-\right.$$

$$\left.-h/2\right)H_{3¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)-H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},\right.$$

$$\left.s_k-h/2\right)H_{2¶}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big),\qquad q_{¦i,j}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\left(\;_*\frac{s_k-h/2-s_*}{s^*-s_*}+\;^*\right)H_2^{-2}\left(¶_{i,j},\right.$$

$$\left.¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big(H_{1¦}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)+$$

$$+H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_{3¦}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_2\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)-H_1\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-\right.$$

$-h/2\big)H_3\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)H_{2¦}\left(¶_{i,j},¦_{i,j},s_k-h/2\right)\Big)$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$, $h=\dfrac{s^*-s_*}{N}$,

$s_k=s_*+h\cdot k$, $k=\overline{0,N}$.

4. Координати граничних вузлів підправляємо з використанням системи рівнянь для крайових умов (5) та пригараничних аналогів умов квазіортогональності:

$$\begin{cases} f_*(¶_{0,j},¦_{0,j})=0, \quad f^*(¶_{m,j},¦_{m,j})=0, \quad j=\overline{1,n-1},\\ g_*(¶_{i,0},¦_{i,0})=0, \quad g^*(¶_{i,n},¦_{i,n})=0, \quad i=\overline{1,m-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -p_{0,j}f_{*¶}(¶_{0,j},¦_{0,j})\left(¦_{1,j}-¦_{0,j}\right)+q_{0,j}f_{*¦}(¶_{0,j},¦_{0,j})\left(¶_{1,j}-¶_{0,j}\right)=0,\\ -p_{m,j}f_{*¶}(¶_{m,j},¦_{m,j})\left(¦_{m,j}-¦_{m-1,j}\right)+q_{m,j}f^*_{¦}(¶_{m,j},¦_{m,j})\left(¶_{m,j}-¶_{m-1,j}\right)=0,\ j=\overline{1,n-1};\\ p_{i,0}g_{*¶}(¶_{i,0},¦_{i,0})\left(¦_{i,1}-¦_{i,0}\right)-q_{i,0}g_{*¦}(¶_{i,0},¦_{i,0})\left(¶_{i,1}-¶_{i,0}\right)=0,\\ p_{i,n}g^*_{¶}(¶_{i,n},¦_{i,n})\left(¦_{i,n}-¦_{i,n-1}\right)-q_{i,n}g^*_{¦}(¶_{i,n},¦_{i,n})\left(¶_{i,n}-¶_{i,n-1}\right)=0,\ i=\overline{1,m-1}. \end{cases}$$

5. При виконанні умов: $\max\limits_{¶_{i,j},¦_{i,j}}\left(\left|¶_{i,j}^{(k)}-¶_{i,j}^{(k-1)}\right|,\left|¦_{i,j}^{(k)}-¦_{i,j}^{(k-1)}\right|\right)<£$,

$\left|\sim_*^{(k)}-\sim_*^{(k-1)}\right|<£$, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$, $\left|D^{(k)}-D^{(k-1)}\right|<£$,

де $D=\dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i,j=1}^{m,n}\dfrac{\sqrt{\left(x_{i,j}-x_{i-1,j-1}\right)^2+\left(y_{i,j}-y_{i-1,j-1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j-1}-x_{i-1,j}\right)^2+\left(y_{i,j-1}-y_{i-1,j}\right)^2}}$ – відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області $G_{μ}^{¥}$, обчислювальний процес припиняємо; у протилежному випадку переходимо до пункту 2, де визначаємо нові наближення параметру $\sim_*^{(k+1)}$.

4. Результати числових розрахунків

В якості прикладу наведемо результати проведених обчислень для водойми, дно якої описується рівнянням $z=-\cos(x)\cos(y)-2$, $x\in\left[-®/2;®/2\right]$, $y\in\left[-®/2;®/2\right]$, береги – $x=-®/2$, $x=®/2$, а «еквіпотенціальні стінки» (ділянки входу та виходу) – $y=-®/2$, $y=®/2$, при $¨_*\Big|_{x=-®/2}=0$, $¨^*\Big|_{x=®/2}=1$, $£=10^{-5}$. При цьому, криволінійні координати пов'яжемо з фізичними наступними співвідношеннями: $x=¶$, $y=¦$, $z=-\left(\cos¶\cos¦+2\right)s$. В такому разі обмежуючі $G_z=A_*B_*C_*D_*A^*B^*C^*D^*$ поверхні $A_*B_*C_*D_*$, $A^*B^*C^*D^*$, $A_*A^*B^*B_*$, $C_*C^*D^*D_*$, $A_*D_*A^*D^*$, $B_*C_*C^*B^*$ характеризуватимемо відповідно як s = 0, s = 1, ¶ = −®/2, ¶ = ®/2, ¦ = −®/2, ¦ = ®/2. На рис. 2 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху для G_z та відповідної їй плоскої області G_z при ©(s, · ,~$_*$) = (0.1s + 0.001)(~$_*$(Q − ·) · + 0.03), $Q = 1$, $m = 15$, $n = 15$.

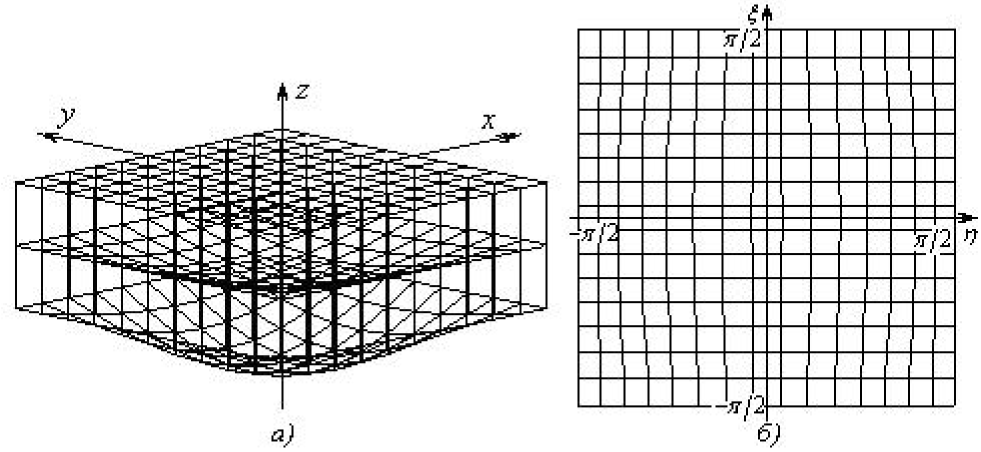

Рис. 2. Гідродинамічна сітка руху в областях а) G_z та б) G_z при розбитті 15ò15

При цьому, в результаті проведених обчислень, одержано значення невідомого параметру ~$_*$ = 17.4765. Крім цього, проведено ряд розрахунків для цієї ж водойми при різних значеннях витрати Q. Зокрема, при $Q = 5$ одержано ~$_*$ = 59.40493, а при $Q = 0.2$ – ~$_*$ = 15.81302. Це відповідає фізичній картині, адже, очевидно, що збільшення витрати Q призводить до збільшення коефіцієнта фіктивної провідності (а відповідно і параметра ~$_*$).

5. Узагальнення та висновки

Побудовано математичну модель процесу руху частинок рідини у водоймі з відносно малими викривленнями дна, обмеженої поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями. При розв’язанні задачі розрахунку гідродинамічних параметрів течії модифіковано методологію моделювання процесів повільного руху рідин (що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем) та розроблені числові методи квазіконформних відображень на основі використання методики апроксимації просторової фільтраційної течії деяким її «усередненим» плоским аналогом. При цьому, підкреслимо, що серед завдань роботи відповідного алгоритму, зокрема, є знаходження значення характерного (для формування фіктивного коефіцієнта провідності ©) параметра ~$_*$.

Часто у реальних умовах процес руху рідини є базовою складовою частиною деякого більш загального процесу, що відбувається у водоймі. Так, наприклад, математичному моделюванні процесу теплопровідності у водоймі-охолоджувачі передує розрахунок квазіідеального фіктивного фільтраційного поля. В такій ситуації доцільно довизначити сформований нами фіктивний коефіцієнт провідності, наприклад, шляхом його домноження на деяку функцію $g(T)$, що характеризує вплив температури на опір середовища (алгоритми розв’язків відповідних нелінійних задач типу «конвекція-дифузія» можуть бути побудовані на основі поетапної фіксації теплових та фільтраційних характеристик процесу і середовища).

При моделюванні конкретних геофізичних процесів доводиться мати справу з областями більш складної геометричної і фізичної конфігурації за наявності додаткових стоків-витоків тощо. При знаходженні квазіідеальної течії у водоймі з малими збуреннями дна, за умови, що на берегових «стінках» задано додаткові джерела поповнення течії і відсутні перетоки між ¸ - паралельними прошарками, основу складність викликає побудова алгоритму перебору та визначення можливих випадків формування течії, що повторює хід алгоритму для «площинно-паралельного» випадку [9].

У випадку ж ще більш складних форм областей, зокрема, при наявності перетоків між «горизонтальними» прошарками, можливим є модифікація розроблених методів розв’язання просторових аналогів крайових задач на квазіконформні відображення [10]. Також, в перспективі, є: розширення класу функцій, що описують фіктивний коефіцієнт провідності, врахування впливу вітру на зміну швидкості течії, кількості опадів та випаровування.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616с.
2. Чикина Л. Г. Моделирование распространения загрязнения в мобилском заливе (США) / Л. Г. Чикина, А. Л. Чикин // Математическое моделирование. – 2001. – Т.13, №2. – С. 93-98.
3. Бомба А.Я., Метод «фіктивної фільтрації» математичного моделювання сингулярно-збурених процесів типу «конвекція-теплова дифузія-теплообмін» / А.Я. Бомба, Є.В. Савюк, О.А. Фурсачик // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2010. – № 925. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.14. – с. 20-27.
4. Бомба А.Я. Метод фіктивної фільтрації моделювання одного класу квазіідеальних процесів руху рідин / А. Я. Бомба., С. О. Пеньковський, Є.В. Савюк // Волинський математичний вісник. – 2010. – Вип. 7(16). – С.20-29.
5. Толпаев В. А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук :05.13.18 / В. А. Толпаев. – Ставрополь. – 2004. – 38 с.
6. Толпаев В.А. Уравнения линейной двумерной фильтрации жидкости в анизотропных искривленных слоях переменной и постоянной толщины/ В.А. Толпаев, В.И. Ледовской// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказкий регион. Естественные науки. Приложение. – №2. – Ростов-на-Дону.– 2004. – С. 19-30.
7. Бомба А. Я. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ Математичне та

комп'ютерне моделювання. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський Національний університет. 2010. – Вип. 4. – С. 31-40.
8. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – Київ : Наукова думка, 2007. – 292 с.
9. Бомба А.Я, Теребус А.В. Метод квазіконформних відображень моделювання ідеальних полів для одного класу просторових областей// А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ “Математичне та комп’ютерне моделювання (фізико-математичні науки)”. 2010. – Вип. 3. – С. 13-27
10. Бомба А.Я, Теребус А.В. Просторові узагальнення крайових задач на конформні відображення з особливостями //А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2009. – № 863. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.12. – С. 13-20.

Надійшла – 27.04.2011.