

УДК 519.63

Численное моделирование нестационарных решений уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках

Д. Ю. Косьянов, А. В. Русанов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Украина

Рассмотрены вопросы создания разностных схем повышенного порядка точности для интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках, не допускающих существенных осцилляций численного решения. Приведены результаты апробации предложенного метода на модельных задачах с нестационарными и разрывными решениями.

Ключевые слова: неструктурированная сетка, метод контрольного объёма, реконструкция высокого порядка точности, явная схема.

Розглянуто питання розробки різницевих схем підвищеного порядку точності для інтегрування рівнянь гіперболічного типу на неструктурованих сітках, які не сприяють появі суттєвих осциляцій в чисельному розв'язку. Наведено результати апробації раніш створеного методу для модельних задач з нестационарними й розривними розв'язками.

Ключові слова: неструктурована сітка, метод контрольного об'єму, реконструкція високого порядку точності, явна схема.

The problems of creating essentially non-oscillating high order finite volume schemes for hyperbolic conservation laws on unstructured grids are considered. Several results of the proposed method approbation on model problems with unsteady and discontinuous solutions are presented.

Key words: unstructured grid, finite volume method, high order reconstruction, explicit scheme.

1. Введение

При численном интегрировании дифференциальных уравнений гиперболического типа в областях сложной геометрической формы широко применяются неструктурированные сетки [1-7]. Для решения таких задач актуальным является создание схем повышенного порядка точности, не допускающих существенных осцилляций численных результатов [3-7]. В большинстве используемых разностных схем применяется метод контрольного объёма, обеспечивающий локальное выполнение свойства консервативности. Основным способом повышения точности подобных схем по пространству является увеличение порядка аппроксимации реконструкции переменных внутри контрольного объёма. Для кусочно-полиномиальных реконструкций это достигается за счёт увеличения степени многочлена.

В работе представлены результаты апробации предложенного авторами статьи метода [7]. Численное интегрирование по времени выполнено с помощью схемы Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации [3, 5]. Проведена оценка порядка сходимости метода и рассмотрено численное моделирование разрывных решений линейного и нелинейного (невязкого уравнения Бюргерса) уравнений переноса.

2. Основные требования

Рассматривается численное решение двумерных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа (модельные уравнения газовой динамики):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0, (x, y) \in \Omega, t > 0 \quad (2.1)$$

где x, y, t – декартовы координаты на плоскости и время; $u = u(x, y, t)$ – искомое решение уравнения (2.1); $f = f(u)$, $g = g(u)$ – потоковые функции; Ω – расчётная область с кусочно-линейной границей. В момент $t = 0$ задано начальное условие $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

Уравнение (2.1) решается с применением метода контрольного объёма для неструктурированной сетки, состоящей из ограниченного числа произвольно расположенных ячеек P . После интегрирования по произвольной ячейке и применения теоремы о среднем и теоремы Грина уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \bar{u} = RSH(\bar{u}) \equiv -\frac{1}{S_P} \int_{L_P} (f \cdot n_x + g \cdot n_y) dl, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{u} \equiv \bar{u}(t) = \frac{1}{S_P} \iint_P u(x, y, t) ds, t > 0$$

означает осреднение по ячейке неизвестной u в момент времени t ; S_P – площадь ячейки; L_P – кусочно-линейная граница ячейки; $\vec{n} = (n_x, n_y)$ – вектор внешней единичной нормали к границе расчётной области.

На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n = \tau \cdot n$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τ – шаг временной сетки. Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.2) решается методом Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации по времени [3, 5] вида

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= \bar{u}^n + \tau \cdot RSH(\bar{u}^n), \quad \bar{u}^{(2)} = \frac{3}{4} \bar{u}^n + \frac{1}{4} \bar{u}^{(1)} + \frac{1}{4} \tau \cdot RSH(\bar{u}^{(1)}), \\ \bar{u}^{n+1} &= \frac{1}{3} \bar{u}^n + \frac{2}{3} \bar{u}^{(2)} + \frac{2}{3} \tau \cdot RSH(\bar{u}^{(2)}). \end{aligned}$$

Значение шага по времени определяется как $\tau = v \cdot d^m$, где v – число Куранта, d – линейный размер сетки, m – показатель степени, равный 1 для схем первого, второго и третьего порядка точности по пространству и $\frac{4}{3}$ – для четвертого порядка точности.

Реконструкция переменных внутри ячейки задаётся многочленом Тейлора степени k , записанным относительно центра ячейки, вида

$$R(x, y) = \bar{u} + \bar{x}_P (\hat{u}_x)_P + \bar{y}_P (\hat{u}_y)_P +$$

$$+0.5[\bar{x}_P^2 - I_{xx}](\hat{u}_{xx})_P + [\bar{x}_P\bar{y}_P - I_{xy}](\hat{u}_{xy})_P + 0.5[\bar{y}_P^2 - I_{yy}](\hat{u}_{yy})_P + \dots, \quad (2.3)$$

$$I_{\underbrace{xxx}_{n}\underbrace{yyy}_{m}} = \frac{1}{S_P} \int_{L_P} \frac{\bar{x}_P^{n+1}\bar{y}_P^m}{n+1} dy, \quad \bar{x}_P = x - x_P, \quad \bar{y}_P = y - y_P,$$

где x_P, y_P – координаты центра ячейки, $\hat{u}_\Psi, \Psi = [x, y, xx, xy, yy, \dots]$ – значения минимизированных коэффициентов реконструкции, удовлетворяющих условиям аппроксимации:

$$(\hat{u}_\Psi)_P = (u_\Psi)_P + O(d^{k+1-(n+m)}), \quad \Psi = \left[\underbrace{xxx}_{n} \underbrace{yyy}_{m} \right], \quad 0 \leq n \leq k, \quad 0 \leq m \leq k, \quad 0 \leq n+m \leq k.$$

Минимизация коэффициентов реконструкции (2.3) выполняется для обеспечения нелинейной устойчивости явной схемы (уменьшения возможных осцилляций решения):

$$(\hat{u}_\Psi)_P = \min \text{mod} \left((\bar{\bar{u}}_\Psi)_P, (\tilde{u}_\Psi)_{P_1}, \dots, (\tilde{u}_\Psi)_{P_{n_P}} \right), \quad \Psi = [x, y, xx, xy, yy, \dots],$$

где

$$\min \text{mod}(a, b) = \frac{\text{sign}(a) + \text{sign}(b)}{2} \min(|a|, |b|),$$

$$\min \text{mod}(a, b, c) = \min \text{mod}(\min \text{mod}(a, b), c);$$

$(\bar{\bar{u}}_\Psi)_P$ – значение коэффициента в текущей ячейке, удовлетворяющее условию аппроксимации, а $(\tilde{u}_\Psi)_{P_i}$ – полученное интерполированием из соседней i -й ячейки с выполнением требования сохранения порядка точности. Таким образом, при минимизации из рассматриваемого набора аппроксимаций выбирается значение наименьшее по модулю.

Дискретизация $RSH(\bar{u})$ по пространству, процедура построения реконструкции высокого порядка точности и минимизация её коэффициентов подробно описаны в работе [7].

3. Численные результаты

В работе приведены оценка порядка сходимости численного решения к точному и проверка свойства метода по обеспечению отсутствия существенных осцилляций для модельных задач с разрывными решениями.

Исследование выполнялось для одномерного и двумерного линейных уравнений переноса

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$u_t + u_x + u_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.2)$$

а также одномерного и двумерного невязких уравнений Бюргера (нелинейное уравнение переноса)

$$u_t + \left(0.5u^2\right)_x = 0, x \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$u_t + \left(0.5u^2\right)_x + \left(0.5u^2\right)_y = 0, (x, y) \in \Omega. \quad (3.4)$$

Все рассмотренные задачи имеют аналитическое решение, и для них на границе расчётной области задавались условие периодичности, а также начальное условие $u(0, x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Omega$ в момент $t = 0$.

Для одномерных задач расчётная область $\Omega = (a, b)$ покрывалась равномерной сеткой с числом разбиений N . Дискретизация расчётной области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ для двумерных задач выполнялась с помощью неструктурированной сетки (рис. 1).

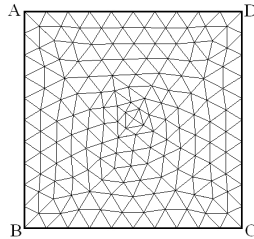


Рис.1. Дискретизация расчётной области

При численном исследовании использовалось пять уровней (размерностей) сетки. При увеличении номера уровня диаметр сетки уменьшается в 2 раза, число ячеек для одномерных задач увеличивается в 2 раза, а для двумерных – в 4 раза.

Оценка порядка сходимости гладких решений. Порядок сходимости к точному решению при переходе с уровня на уровень (уменьшении диаметра сетки) оценивался с использованием трёх стандартных сеточных норм L_1 , L_2 и C_{\max} :

$$n_i = \frac{\ln(N_i) - \ln(N_{i+1})}{\ln(2)}, i = \overline{1, 4},$$

где N_i – значение рассматриваемой сеточной нормы на i -м уровне сетки. Сеточные нормы вычислялись от разности численного и точного решений в заданный момент времени t^* .

Рассмотрены следующие варианты задач, для которых в момент времени t^* решение является гладкой функцией:

Task1. Уравнение (3.1), $\Omega = (0, 1)$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $t^* = 1$;

Task2. Уравнение (3.2), $\Omega = (0, 1)^2$, $\varphi(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, $t^* = 1$;

Task3. Уравнение (3.3), $\Omega = (0, 1)$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $t^* = 0.05$;

Task4. Уравнение (3.3), $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi(x) = 1 + \sin(\pi x)$, $t^* = 0.1$;

Task5. Уравнение (3.4), $\Omega = (0, 1)^2$, $\varphi(x, y) = 1 + \sin(2\pi(x + y))$, $t^* = 0.025$.

На рис. 2 – 6 представлены графики сходимости в логарифмической шкале для задач Task1 – Task5 соответственно. Расчёты выполнены как с применением процедуры минимизации коэффициентов реконструкции (2.3) (не закрашенные маркеры), так и без (закрашенные маркеры). В нижней части графиков представлены средние значения порядков сходимости n , а также соответствие типа маркера и степени полинома реконструкции k .

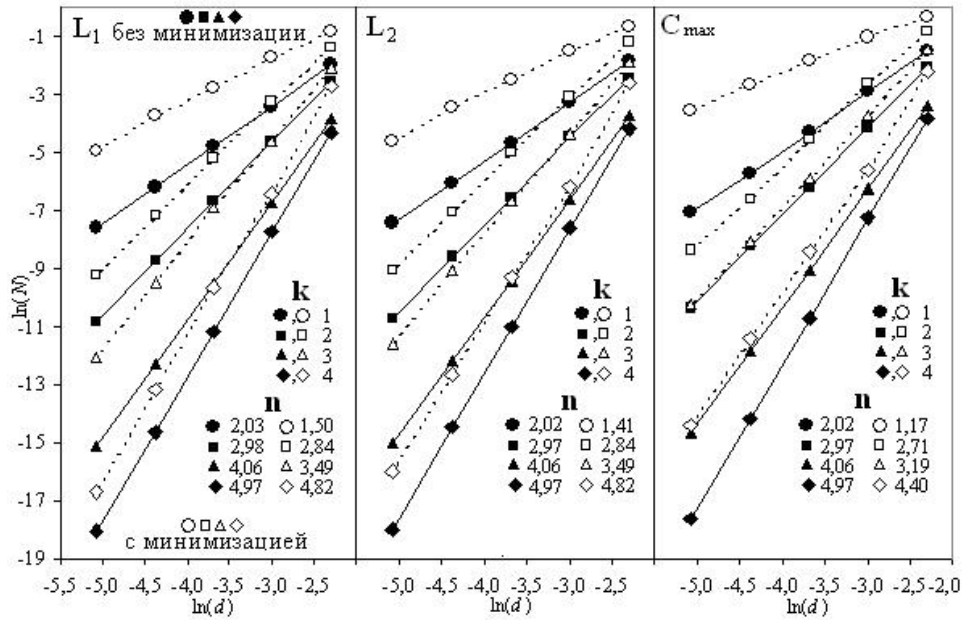


Рис.2. Графики сходимости для Task1 в нормах L_1 , L_2 , C_{\max} при $t^* = 1$

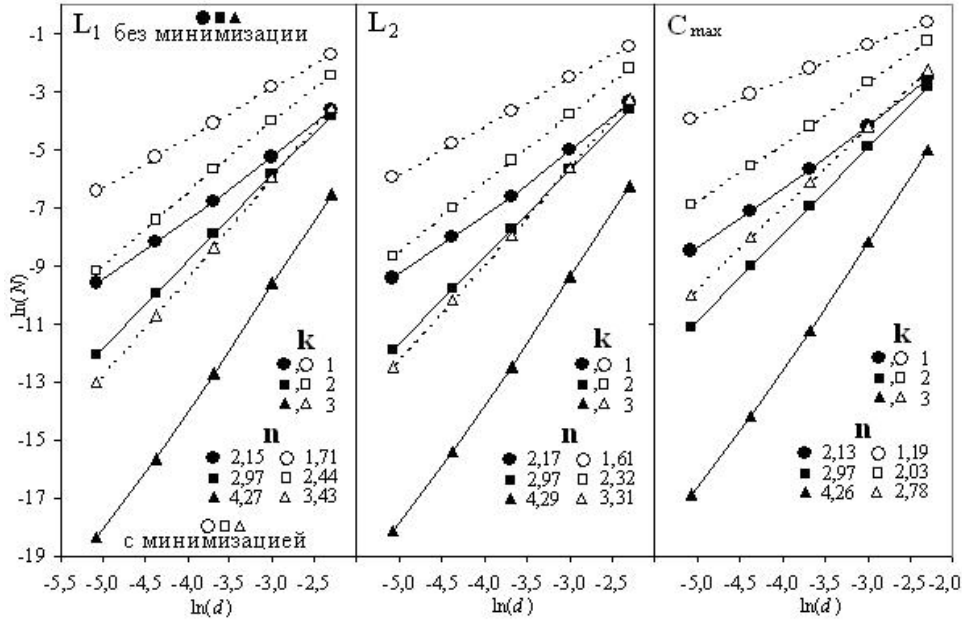


Рис.3. Графики сходимости для Task2 в нормах L_1 , L_2 , C_{\max} при $t^* = 1$

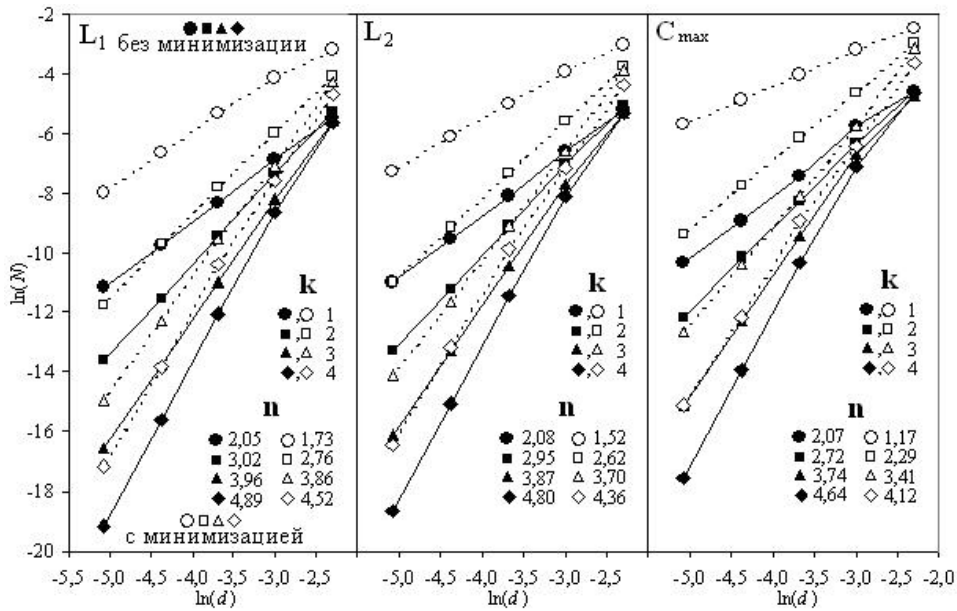


Рис.4. Графики сходимости для Task3 в нормах L_1 , L_2 , C_{\max} при $t^* = 0.05$

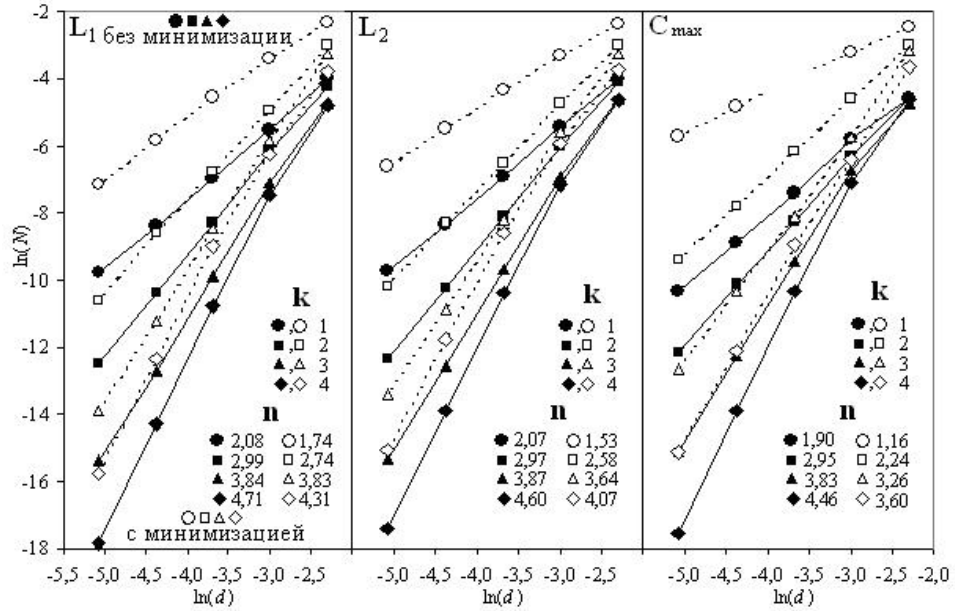


Рис.5. Графики сходимости для Task4 в нормах L_1 , L_2 , C_{\max} при $t^* = 0.1$

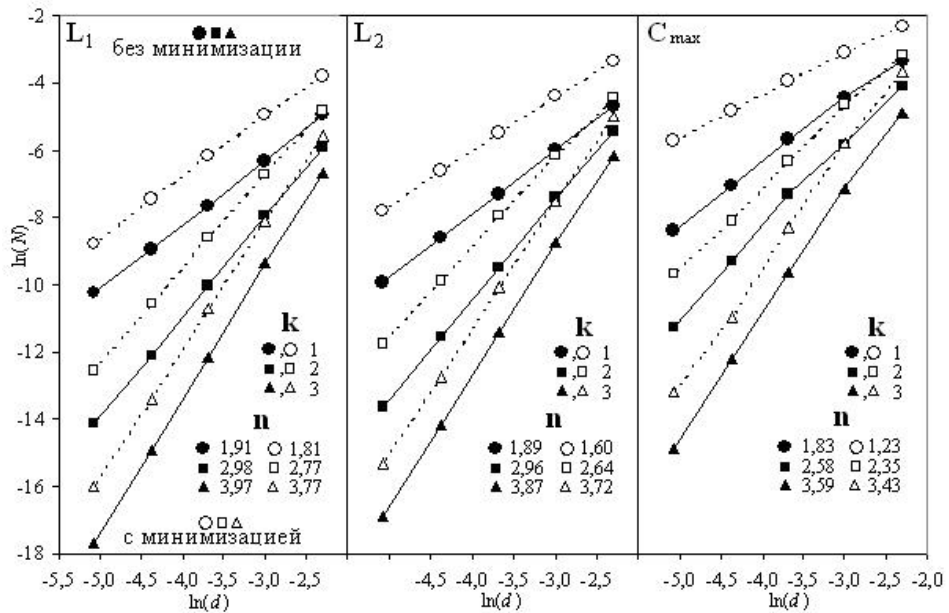


Рис.6. Графики сходимости для Task5 в нормах L_1 , L_2 , C_{\max} при $t^* = 0.025$

Анализ представленных результатов показывает, что значения порядков сходимости при применении процедуры минимизации коэффициентов реконструкции в целом ниже, чем в случае без минимизации. Максимальная

разница значений наблюдается при оценке в норме C_{\max} и составляет около 1. Численная оценка порядка сходимости n в случае с минимизацией при увеличении номера уровня сетки стремится к значению степени реконструкции k . Значения сеточных норм уменьшаются с увеличением степени реконструкции и увеличиваются с ростом степени нерегулярности расчётной сетки. Численная оценка порядка сходимости существенно не зависит от нерегулярности сетки.

Проверка свойства отсутствия существенных осцилляций для разрывных решений. Нелинейная природа некоторых уравнений гиперболического типа (например, невязкого уравнения Бюргера) является причиной того, что решение в некоторый момент времени становится разрывным, даже если оно является гладким в начальный момент времени. В численном решении возле разрыва возможно появление нефизических осцилляций. Для уменьшения их уровня применяются процедуры минимизации коэффициентов реконструкции.

Для апробации схемы рассмотрены следующие задачи, для которых в момент времени t^* решение является разрывной функцией:

$$\text{Task3. } t^* = 0.16, t^* = 0.25, t^* = 1;$$

$$\text{Task4. } t^* = 0.318, t^* = 0.5, t^* = 2.5;$$

$$\text{Task5. } t^* = 0.125;$$

$$\text{Task6. Уравнение (3.2), } \Omega = (0, 1), t^* = 1, t^* = 10,$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0.2, 0.4], \\ 1 - 10|x - 0.7|, & x \in [0.6, 0.8], \\ 0, & x \notin [0.2, 0.4] \cup [0.6, 0.8] \end{cases};$$

$$\text{Task7. Уравнение (3.4), } \Omega = (0, 1)^2, t^* = 1, t^* = 10,$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_1 = [0.2, 0.4] \times [0.3, 0.7], \\ 1 - 5r, & (x, y) \in \Omega_2 = \{(x, y) : (x - 0.7)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.04\}, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{cases}$$

На рис. 7 и 8 представлена эволюция численного (маркеры) и точного (сплошная линия) решений для задач *Task3*, *Task4*, включающая моменты времени, когда решение является гладким, имеет разрыв нулевой амплитуды, разрыв максимальной амплитуды и затухание амплитуды разрыва (слева направо на рисунке). Задача *Task3* имеет стационарный разрыв в $x = 0.5$, а в *Task4* разрыв движется слева направо. Во всех рассмотренных случаях наблюдается отсутствие существенных осцилляций численного решения в окрестности точки разрыва и уменьшение размазывания профиля численного решения с увеличением степени полинома реконструкции.

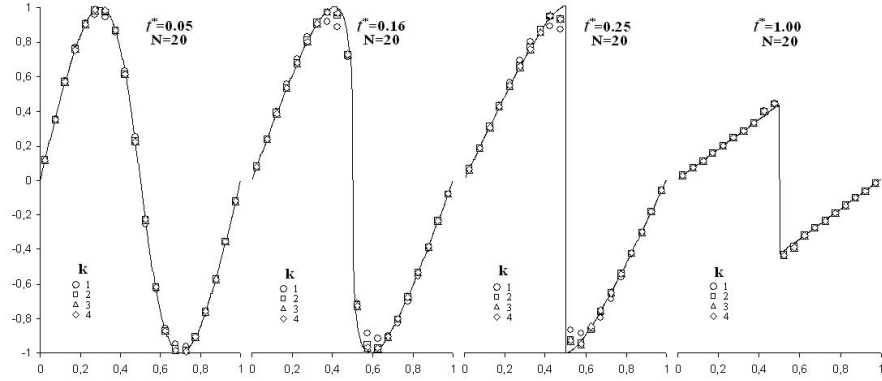


Рис.7. Вид точного и численного решения Task3 для различных t^*

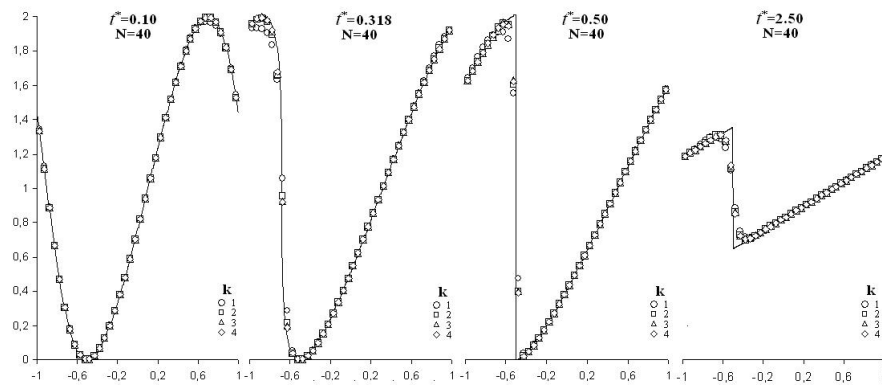


Рис.8. Вид точного и численного решения Task4 для различных t^*

На рис. 9 представлен вид численного решения задачи Task5 в момент времени $t^* = 0.125$. Видны удовлетворительная локализация 2-х разрывов решения, имеющих максимальное значение амплитуды в данный момент времени, и отсутствие существенных осцилляций возле разрывов.

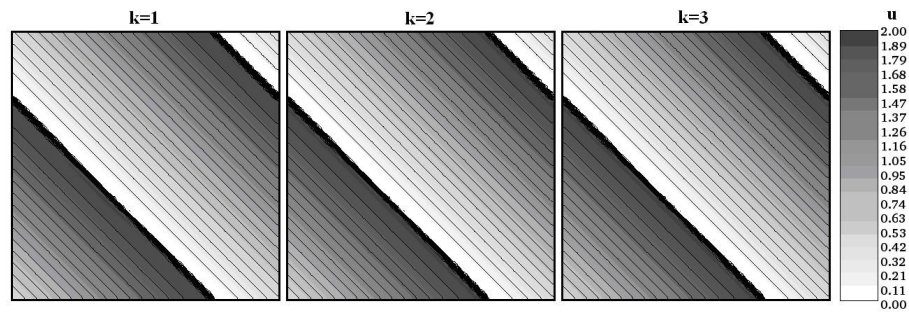


Рис.9. Вид точного и численного решения Task3 для различных t^*

На рис. 10 представлено вид точного (сплошная линия) и численного (маркеры) решений задачи *Task6*, полученных в моменты времени $t^* = 1$ и $t^* = 10$ на сетках с числом разбиений $N = 50$ и $N = 100$. Видны отсутствие существенных осцилляций численного решения возле разрывов и уменьшение размазывания профиля решения при увеличении числа ячеек сетки. Для $t^* = 10$ можно проследить существенное влияние увеличения степени полинома реконструкции k на улучшение согласования вида численного и точного решения. Аналогичные выводы можно сделать исходя из анализа численного решения задачи *Task7*, представленного на рис. 11.

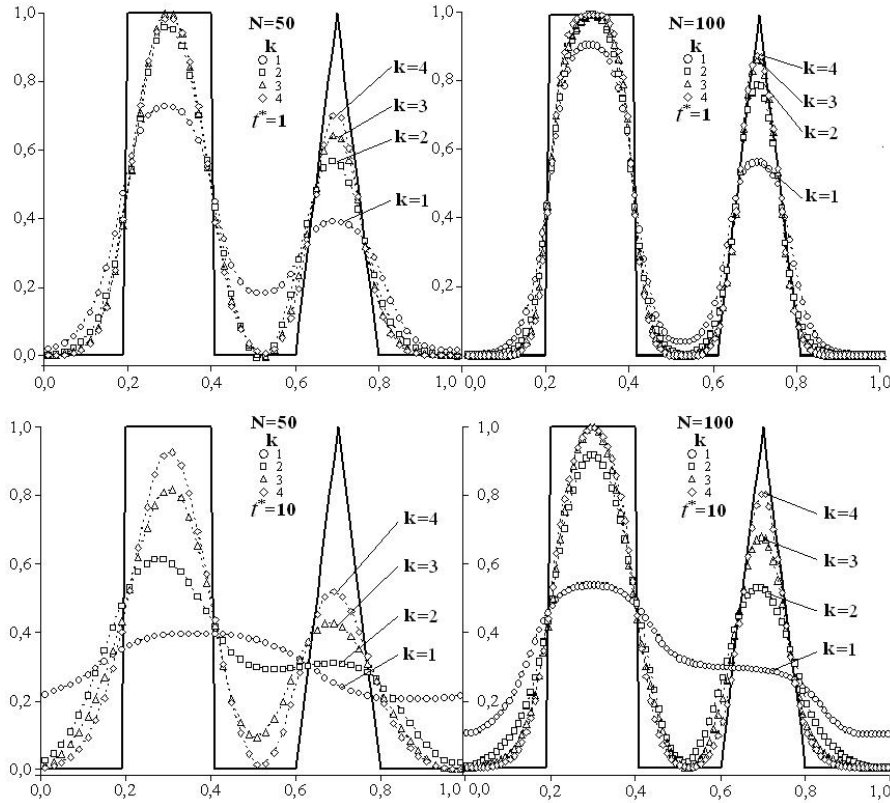


Рис.10. Вид точного и численного решения *Task5* в $t^* = 1$ и $t^* = 10$

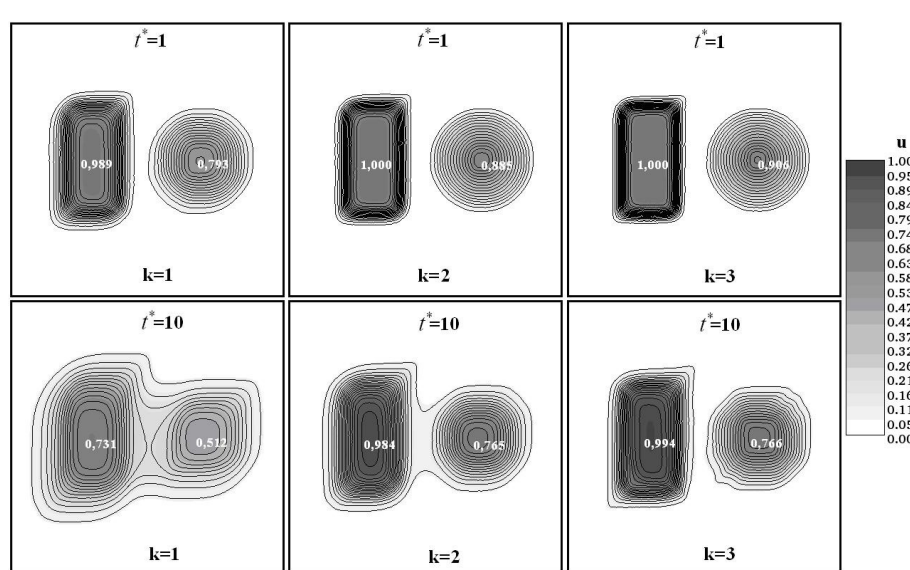


Рис.11. Вид численного решения Task7 в $t^* = 1$ и $t^* = 10$ на сетке ≈ 19 тыс. элементов

4. Выводы

Предложен подход построения кусочно-полиномиальной реконструкции переменных, определение коэффициентов которой выполняется пошагово по фиксированному шаблону, благодаря чему уменьшается размер обрабатываемых при этом матриц. На его основе и с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка аппроксимации по пространству. Для обеспечения отсутствия существенных нефизических осцилляций численного решения возле разрывов предложен способ минимизации коэффициентов реконструкции.

Выполнена апробация предложенной схемы для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках на модельных задачах с нестационарными и разрывными решениями. Представленные результаты показывают, что значения порядков сходимости при использовании процедуры минимизации коэффициентов реконструкции в целом ниже, чем в случае без минимизации, и с увеличением размерности сетки стремятся к степени полинома реконструкции. Численное решение в окрестности разрыва не содержит существенных осцилляций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов П. И., Еричева В.А. Метод расчёта сжимаемых течений и алгоритмы построения гибридных неструктурированных сеток // Вестник Днепропетровского ун-та. Механика. – 2002. – № 1 (6). – С. 54 – 59.
2. Жохова А. В., Четвертушкин Б. Н. Моделирование нестационарных газодинамических течений // Математическое моделирование. – 2002. – № 4 (14). – С. 35 – 44.

3. Aboiyar T., Georgoulis E.H., Iske A. High-order WENO finite scheme using polyharmonic spline reconstruction // Proc. of the intern. conf. NAAT. – 2006. – P.1-14.
4. Ollivier-Gooch C. Quasi-ENO Schemes for Unstructured meshes based on unlimited data-depend least squares reconstruction // J. of Comp. Phys. – 1997. – v. 133. – P.6-17.
5. Shu C.-W., Hu C. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular meshes // J. of Comp. Phys. – 1999. – v. 150. – P.97-127.
6. Barth T.J., Fredrickson P.O. High-Order Solution of the Euler Equations on Unstructured grids Using Quadratic Reconstruction // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 31. – 1993. – 15 p.
7. Русанов А. В., Косьянов Д. Ю. Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках // Вестник Харьк. нац. Ун-та, 2010. – № 926. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 15. – С. 123 – 138.