УДК 519.6

Про чисельне розв’язування задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами методом граничних інтегральних рівнянь

К. Є. Бабенко[1], Р. С. Хапко[2]

[1]Українська інженерно-педагогічна академія, Україна,
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

В статье рассматривается численное решение плоской внутренней задачи Неймана для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. Путем введения в области решения множества гладких непересекающихся кривых исходная задача с помощью потенциалов с функциями Леви редуцирована к системе граничных интегральных уравнений на указанных кривых. После параметризации и выделения имеющейся сингулярности в некоторых ядрах в виде соответствующей весовой функции полная дискретизация осуществлена методом Ныстрёма с использованием тригонометрических квадратур. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *эллиптичекое уравнение с переменными коэффициентами, функция Леви, потенциал простого слоя, сингулярные интегральные уравнения, метод Ныстрёма, тригонометрические квадратуры..*

У статті розглядається чисельне розв’язування плоскої внутрішньої задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами. Ввівши в області розв’язку множину гладких кривих, що не перетинаються, вихідна задача за допомогою потенціалів з функціями Леві редукована до системи граничних інтегральних рівнянь на вказаних кривих. Після параметризації і виділення наявної сингулярності в деяких ядрах у вигляді відповідної вагової функції повна дискретизація здійснена методом Нистрьома з використанням тригонометричних квадратур. Приведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: *еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами, функція Леві, потенціал простого шару, сингулярні інтегральні рівняння, метод Нистрьома, тригонометричні квадратури.*

We consider the numerical solution of the planar interior Neumann problem for an elliptic equation with variable coefficients. By introducing in the solution domain of a set of smooth nonintersecting curves, the formulated problem is reduced by potentials with the Levi’s function to a system of boundary integral equations on these curves. The full discretization is realized after parametrization and separation of singularities by Nyström method with trigonometrical quadratures. The results of numerical experiments are presented.

Key words: *elliptic equation with variable coefficients, Levi function, single layer potential, singular integral equations, Nyström method, trigonometrical quadratures.*

1. Постановка задачі та її модифікація

Метод граничних інтегральних рівнянь є потужним засобом для дослідження і чисельного розв’язування граничних задач для диференціальних рівнянь різних типів. Однак для зведення вихідної задачі до інтегрального рівняння (прямим або непрямим способом) необхідно знати вигляд фундаментального розв’язку диференціального рівняння, що є можливим для рівнянь з постійними коефіцієнтами. У випадку рівнянь зі змінними коефіцієнтами знайти фундаментальний розв’язок проблематично і, як результат, метод інтегральних рівнянь практично не застосовується. Однак можна використати функцію Леві [3], яка описує головну частину фундаментального розв'язку, але не задовольняє вихідне рівняння. У підсумку диференціальна задача редукується до гранично-просторового інтегрального рівняння [8]. Такий підхід позбавлений однієї з основних переваг методу інтегральних рівнянь – зменшення розмірності задачі. Для уникнення цього авторами в [1] у випадку задачі Діріхле для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами було запропоновано метод, в якому відсутній цей недолік. Його суть полягає в наступному. В області, де шукається розв'язок, вводиться множина замкнених гладких кривих, які не перетинаються, і задане диференціальне рівняння розглядається на цій множині. Далі за допомогою функції Леві будуються потенціали і описана задача зводиться до системи граничних інтегральних рівнянь з різними типами особливостей в ядрах.

У даній статті ми поширюємо ці ідеї на випадок граничної задачі Неймана. Через ряд особливостей цієї задачі застосування підходу з [1] не є тривіальним.

Отже, нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена однозв'язна область з границею $\Gamma_0 \in C^2$. Необхідно знайти функцію $u : D \to \mathbb{R}$, яка задовольняє еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$Lu := \operatorname{div}(\alpha \nabla u) = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1}$$

і граничну умову Неймана

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{на} \quad \Gamma_0 . \tag{2}$$

Тут ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_0, $\alpha \in C^\infty(\bar{D})$, $\alpha(x) > 0, x \in \bar{D}$ і $f \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$ – задані функції, причому

$$\int_{\Gamma_0} f(y)ds(y) = 0 . \tag{3}$$

Відомо [3], що задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $u \in H^1(D)$ з точністю до константи. Для забезпечення єдиності розв'язку потрібно накласти додаткову умову на шукану функцію. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що задана область D містить початок координат і будемо вимагати, щоб $u(0) = 0$.

Нехай в області D задано $N \in \mathbb{N}$ замкнених кривих $\Gamma_k \in C^2$, $k = 1, \ldots, N$, які не перетинаються. Позначимо $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k$. Модифікуємо задачу (1)-(3) до такої: для заданих α і f, для якої виконується умова (3), знайти таку функцію $\tilde{u} : \Gamma \to \mathbb{R}$, яка задовольняє рівняння (1) на Γ і граничну умову (2) . Очевидно, функція $\tilde{u}$ апроксимує розв'язок задачі (1)-(3).

2. Метод граничних інтегральних рівнянь

Означення 1 [3]. Функція $P(x, y)$, $x, y \in D$ називається параметріксом (функцією Леві) диференціального оператора L, якщо

$$L_x P(x, y) = \delta(x - y) + R(x, y),$$

де δ -функція Дірака і функція R має слабку особливість при $x = y$.

Можна показати, що у випадку оператора L з (1) функція Леві має вигляд

$$P(x,y) = \frac{\ln|x-y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in \mathrm{R}^2, x \neq y,$$

а функція R задається як

$$R(x,y) = \frac{(x-y)\cdot\nabla\sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x\text{-}y|^2}, \quad x, y \in \mathrm{R}^2, x \neq y.$$

Розглянемо потенціал простого шару

$$w(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \mu_j(y) P(x,y) ds(y), \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\ldots,N, \tag{4}$$

де $\mu_j \in L^2(\Gamma_j)$ – невідомі густини. Після підстановки подання (4) у рівняння (1), яке розглядається на множині кривих Γ, і врахування означення параметріксу, отримаємо, що густини μ_j задовольняють інтегральні рівняння другого роду

$$\mu_k(x) + \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma_j} \mu_j(y) R(x,y) ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\ldots,N,$$

Введемо також потенціал простого шару

$$w_0(x) = \int_{\Gamma_0} \mu_0(y) P(x,y) ds(y), \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\ldots,N. \tag{5}$$

Зважаючи на наявність логарифмічної особливості у функції P, не складно пересвідчитись у наявності стрибка нормальної похідної потенціалу на границі Γ_0, тобто

$$\sigma(x)\frac{\partial w_0}{\partial \nu}(x) = -\frac{1}{2}\mu_0(x) + \int_{\Gamma_0} \mu_0(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y), \quad x \in \Gamma_0.$$

Подаючи розв'язок модифікованої задачі у вигляді суми потенціалів $\tilde{u} = w + w_0$, для визначення невідомих густин $\mu_j, j = 0,\ldots,N$ отримуємо систему граничних інтегральних рівнянь другого роду

$$\begin{cases} \mu_k(x) + \sum\limits_{j=0}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} \mu_j(y) R(x,y) ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\ldots,N, \\ -\frac{1}{2}\mu_0(x) + \sum\limits_{j=0}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} \mu_j(y)\sigma(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma_0. \end{cases} \tag{6}$$

Як частинний випадок з системи (6) при $\sigma = 1$ маємо інтегральне рівняння другого роду

$$-\frac{1}{2}\mu_0(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} \mu_0(y)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \nu(x)} ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma_0. \tag{7}$$

Для забезпечення існування розв'язку рівняння (7) крива Γ_0 не має бути так званим Γ – контуром [4]. Один із способів досягнення цього полягає у виборі області D достатньо малих розмірів, такої що $\operatorname{diam} D < 1$. З іншого боку, в цьому випадку рівняння (7) має безліч розв'язків. Для досягнення єдиності розглянемо модифіковане рівняння

$$-\frac{1}{2}\varphi_0(x) + \int_{\Gamma_0} \varphi_0(y) \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \nu(x)} ds(y) - \varphi_0(x^*) = f(x), \quad x, x^* \in \Gamma_0. \quad (8)$$

В [4] показано, що інтегральне рівняння (8) для будь-яких $f \in L^2(\Gamma_0)$ має єдиний розв'язок $\varphi_0 \in L^2(\Gamma_0)$ і що розв'язок рівняння (8) є серед розв'язків рівняння (7). Отже, приведемо систему (6) до такого остаточного вигляду

$$\begin{cases} \varphi_k(x) + \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) R(x,y) ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\dots,N, \\ -\frac{1}{2}\varphi_0(x) + \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) \rho(x) \frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \varphi_0(x^*) = f(x), \quad x, x^* \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (9)$$

Не складає труднощів довести, що для будь-яких $f \in L^2(\Gamma_0)$ система (9) має єдиний розв'язок $\varphi_j \in L^2(\Gamma_j),\ j = 0,\dots,N$.

3. Параметризація і чисельне розв'язування

Будемо вважати, що криві мають параметричні подання

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t)), 0 \le t \le 2\pi\},\ k = 0,\dots,N,$$

де $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ – 2π -періодичні функції з $|x_k'(t)| > 0$ для всіх $t \in [0,2\pi]$ і $x_k \in C^2([0,2\pi] \times [0,2\pi])$. Зважаючи на це, систему інтегральних рівнянь (9) можна переписати в такому еквівалентному параметричному вигляді

$$\begin{cases} \psi_k(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_0^{2\pi} \psi_j(\tau) K_{kj}(t,\tau) d\tau = 0, \quad k = 1,\dots,N, \\ -\frac{1}{2}\psi_0(t) - \psi_0(0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_0^{2\pi} \psi_j(\tau) K_{0j}(t,\tau) d\tau = g(t), \quad t \in [0,2\pi]. \end{cases} \quad (10)$$

Тут введено позначення $\psi_k(t) = \varphi_k(x_k(t))$, $g(t) = f(x_0(t))$,

$$K_{kj}(t,\tau) = 2\pi R(x_k(t), x_j(\tau)) |x_j'(\tau)|$$

і

$$K_{0j}(t,\tau) = |x_j'(\tau)| \frac{\rho(x_0(t))(x_0(t) - x_j(\tau)) \cdot \nu(x_0(t))}{\rho(x_j(\tau)) |x_0(t) - x_j(\tau)|}, k = 1,\dots,N,\ j = 0,\dots,N,$$

а в якості точки x^* взято $x^* = x_0(0)$. Очевидно, що ядра K_{0j} і K_{kj} (при незбіганні індексів) є неперервними і їхня гладкість залежить від гладкості граничних кривих, причому

$$K_{00}(t,t) = -\frac{x_0''(t)\cdot \neg(x_0(t))}{2\left|x_0'(t)\right|},\ 0 \le t \le 2\pi .$$

Ядра K_{ll}, $l = 1,\ldots,N$ мають особливості типу Коші. Зрозуміло, що відповідні інтеграли в (10) розуміють в сенсі головного значення по Коші. Після нескладних перетворень ці ядра можна подати у вигляді

$$K_{ll}(t,\tau) = \cot\frac{\tau - t}{2}\tilde{K}_{ll}(t,\tau),\ l = 1,\ldots,N,$$

де $\tilde{K}_{ll}(t,\tau) = \tan\frac{\tau - t}{2}K_{ll}(t,\tau)$ з $\tilde{K}_{ll}(t,t) = \dfrac{x_l'(t)\cdot\nabla\pm(x_l(t))}{2\pm(x_l(t))\left|x_l'(t)\right|}$.

На рівновіддаленому поділі $t_j = \frac{j\pi}{M}$, $j = 0,...,2M-1$, $M \in \mathrm{N}$ розглянемо квадратурні формули [5-7], які відповідають інтегралам у системі (10)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j),\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\tau - t}{2}f(\tau)d(\tau) \approx \sum_{j=0}^{2M-1}\tilde{T}_j(t)f(t_j)$$

з ваговими функціями

$$\tilde{T}_j(t) = -\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M-1}\sin m(t - t_j) - \frac{1}{2M}\sin M(t - t_j).$$

Ці квадратури отримані шляхом заміни гладкої частини f інтеграндів на відповідний інтерполяційний тригонометричний поліном і подальше точне інтегрування. Зауважимо, що їх точність залежить від гладкості функції f. Приведені квадратури співпадають із квадратурними формулами, що використовуються у методі дискретних особливостей [2].

Застосування вищенаведених квадратур до інтегралів у системі (10) та колокація отриманих апроксимаційних рівнянь з використанням як точок колокації вузлів квадратурних формул приводить до системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01}\cdots & A_{0N} \\ & \cdots & \\ A_{N0} & A_{N1}\cdots & A_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N\end{pmatrix}$$

з коефіцієнтами матриці

$$A_{0l}^{(ij)} = -\frac{\delta_{ij}}{2} - \delta_{i0} + \frac{1}{2M}K_{0l}(t_i,t_j),\ l = 0,...,N \quad A_{kl}^{(ij)} = \begin{cases}\delta_{ij} + \tilde{T}_j(t_i)\tilde{K}_{kk}(t_i,t_j), & k = l \ne 0, \\ \dfrac{1}{2M}K_{kl}(t_i,t_j), & k \ne l,\end{cases}$$

правими частинами

$$b_k^{(i)} = \begin{cases} g(t_i), & k = 0, \\ 0, & k \ne 0\end{cases}$$

і невідомими $\tilde{\varphi}_k = (\tilde{\varphi}_k^{(0)},\ldots,\tilde{\varphi}_k^{(2M-1)})$, де $\tilde{\varphi}_k^{(j)} \approx \varphi_k(t_j)$, $k = 0,\ldots,N$.

Пропонований метод має експоненційну збіжність для аналітичних вхідних даних [1]. Для знаходження наближеного розв'язку модифікованої задачі скористаємось формулами (4) та (5). Після параматризації отримаємо подання

$$\tilde{u}(x_k(t)) = \frac{1}{2®}\sum_{j=0}^{N}\int_0^{2®} «_j(²) H_{kj}(t,²)\,d², \quad k = 1,\ldots,N,$$

де $H_{kj}(t,²) = 2®P(x_k(t), x_j(²))\left|x_j^{'}(²)\right|$.

Неважко помітити, що в ядрах H_{ll} наявна логарифмічна особливість, яку також можна виділити у вигляді відповідної вагової функції

$$H_{ll}(t,²) = H_{ll}^1(t,²)\ln\left(4\sin^2\frac{t-²}{2}\right) + H_{ll}^2(t,²), \; l = 0,\ldots,N$$

з ядрами $H_{ll}^1(t,²) = \dfrac{\left|x_l^{'}(²)\right|}{2±(x_l(²))}$, $H_{ll}^2(t,²) = H_{ll}(t,²) - H_{ll}^1(t,²)\ln\left(4\sin^2\dfrac{t-²}{2}\right)$ і діагональними виразами $H_{ll}^2(t,t) = 2H_{ll}^1(t,t)\ln\left|x_l^{'}(t)\right|$.

Розглянемо квадратурну формулу, побудовану аналогічно до приведених вище

$$\frac{1}{2®}\int_0^{2®}\ln\left\{4\sin^2\frac{t-²}{2}\right\} f(²)\,d² \approx \sum_{j=0}^{2M-1}\tilde{R}_j(t) f(t_j)$$

з ваговими коефіцієнтами [2,5,6]

$$\tilde{R}_j(t) = -\frac{1}{M}\left\{\sum_{k=1}^{M-1}\frac{1}{k}\cos k(t-t_j) + \frac{\cos M(t-t_j)}{2M}\right\}.$$

В результаті наближений розв'язок модифікованої задачі обчислюється як

$$\hat{u}(x_k(t)) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{l=0}^{2M-1} «_j^{(l)}\tilde{H}_{kj}(t,t_l), \quad k = 1,\ldots,N \tag{11}$$

з

$$\tilde{H}_{kj}(t,t_l) = \begin{cases} H_{kk}^1(t,t_l)\tilde{R}_l(t) + \dfrac{1}{2M}H_{kk}^2(t,t_l), & k = j, \\ \dfrac{1}{2M}H_{kj}(t,t_l), & k \neq j. \end{cases}$$

4. Чисельні експерименти

Приклад 1. Нехай область D – круг радіуса 0.4, $±(x) = 1 + |x|^2, x \in D$ і $f(x) = x_1, x \in \Gamma_0$, сукупність кривих Γ задана як

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = (1 - k/(N+1))(A_1\cos t, A_2\sin t), 0 \le t \le 2®\}, \tag{12}$$

$k = 1,\ldots,N$ з $A_1 = A_2 = 0.4$ (див. рис. 1). На рис. 2 зображено наближені розв'язки, отримані за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), реалізованому в PDE Toolbox в середовищі Matlab і запропонованим методом граничних інтегральних рівнянь.

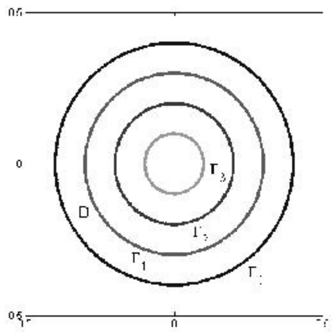

Рис. 1. Область D *і множина кривих* Γ

У разі МСЕ при триангуляції області було використано 2300 трикутників, а в методі інтегральних рівнянь: $N = 13$ і $M = 64$ і обчислення чисельного розв'язку проводились за формулою (11). Як видно з рис. 2, результати, отримані різними методами, практично не відрізняються.

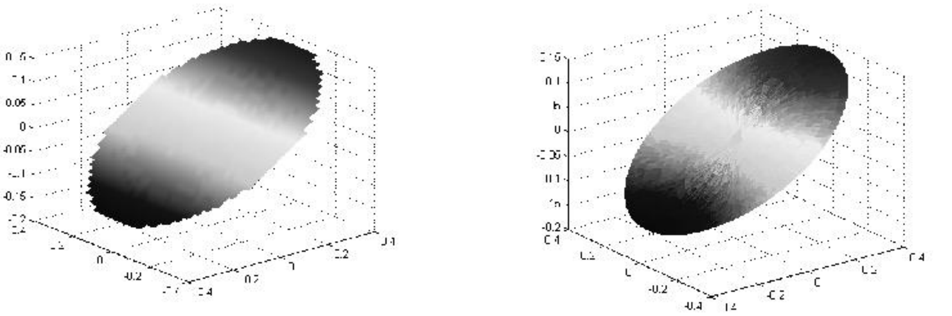

Рис. 2. Наближені розв'язки, отримані МСЕ та методом ІР, відповідно

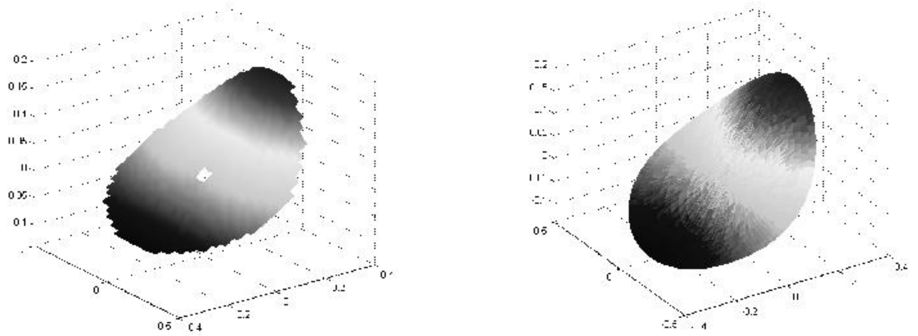

Рис. 3. Наближені розв'язки для прикладу 2

Приклад 2. Нехай область D – еліпс з півосями 0.3 і 0.5, $\pm(x) = 1 + |x|^2, x \in D$ і $f(x) = \exp(x_1)\left(\frac{5}{3}x_1 \cos x_2 - \frac{3}{5}x_2 \sin x_2\right), x \in \Gamma_0$ і сукупність кривих Γ задана як (12) з $A_1 = 0.3, A_2 = 0.5$. На рис. 3 зображено наближені розв'язки, отримані МСЕ і пропонованим методом граничних інтегральних рівнянь з використанням таких ж параметрів дискретизації як і в прикладі 1. Як видно з приведених графіків, обидва наближені розв'язки мало відрізняються.

5. Висновки

Для наближеного розв'язування граничної задачі Неймана для еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами запропоновано підхід, що грунтується на граничних інтегральних рівняннях другого роду. Спершу в області вводять систему замкнених гладких кривих, які не перетинаються, і за допомогою функції Леві будують граничні потенціали простого шару. У підсумку отримуємо систему коректних граничних інтегральних рівнянь особливостями в ядрах. Повну дискретизацію виконали методом Нистрьома з тригонометричними квадратурами. Проведено порівняння пропонованого методу і МСЕ на чисельних прикладах. Отримані результати свідчать про застосовність даного підходу і дають підстави сподіватись, що метод можна використати для наближеного розв'язування нелінійних некоректних обернених задач електричної імпедансної томографії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабенко К., Хапко Р. Про чисельне розв'язування однієї прямої задачі EIT методом граничних інтегральних рівнянь. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2012. – Вип.18. – С.22-30.
2. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. – Харьков: ХГУ, 1991. – 67с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1957. – 256с.
4. Atkinson K. The numerical solution of integral equations of the second kind. – Cambridge University Press, 1997. – 552p.
5. Chapko R. On the numerical solution of a boundary value problem in the plane elasticity for a double connected-domain. // Math. Comput. Simulation. – 2004. – 66. – P.425-438.
6. Chapko R., Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind. // In Agarwal, ed.: World Scientific Series in Applicable Analysis. – Vol.2. Contributions in Numerical Mathematics. 1993. – P.127-140.
7. Kress R. Linear integral equations, second ed. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 365p.
8. Mikhailov S. E. Analysis of united boundary-domain integro-differential and integral equations for a mixed BVP with variable coefficients. // Math. Meth. Appl. Scie. – 2006. – 29. – P. 715-739.

Надійшла – 15.03.2012.