УДК 519.216

Один класс эволюционно представимых случайных процессов

А. В. Коробская, З. Ф. Назыров, А. А. Янцевич
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Работа посвящена изучению одного класса нестационарных случайных процессов в рамках корреляционной теории. Получены новые модельные представления для инфинитезимальных корреляционных функций. В дальнейшем на этом пути возможно также получение канонических представлений, которые являются аналогом спектрального разложения стационарного случайного процесса и могут быть получены при помощи теории ассоциированных открытых систем.

Ключевые слова: *нестационарные случайные процессы, несамосопряженный оператор, ассоциированная открытая система.*

Робота присвячена вивченню одного класу нестаціонарних випадкових процесів у межах кореляційної теорії. Отримано нові модельні зображення для інфінітезимальних кореляційних функцій. Надалі на цьому шляху можливо також отримання канонічних представлень, які є аналогом спектрального розкладання стаціонарного випадкового процесу і можуть бути отримані за допомогою теорії асоційованих відкритих систем.

Ключові слова: *нестаціонарні випадкові процеси, несамоспряжений оператор, асоційована відкрита система.*

The article is devoted to the study of one class of nonstationary random processes in the frame of the correlation theory. New model conceptions for infinitesimal correlation functions are found. Using such approach it is also possible to obtain canonical representations which are analogous to the spectral decomposition of a stationary random process and can be obtained using the theory of associated open systems.

Key words: *nonstationary random processes, nonselfadjoint operator, associated open system.*

1. Введение

Нестационарные процессы играют существенную роль при изучении переходных процессов, распространении волн в статистически неоднородной среде и т. д. Обычно для описания моделей нестационарных случайных процессов рассматривают процессы со стационарными приращениями [1], процессы с вырожденной корреляционной функцией [2], периодические случайные процессы [3], аналитические случайные процессы [4]. Поэтому, естественно, возникает необходимость в расширении класса нестационарных случайных процессов в рамках корреляционной теории.

2. Анализ исследования

В [5] был введен класс так называемых линейно представимых нестационарных процессов, для которых при вложении в гильбертово пространство соответствующая кривая является решением задачи Коши. В дальнейшем такие процессы получили название эволюционно представимых. Для таких процессов в [5] была установлена тесная связь со спектральной теорией несамосопряженных или неунитарных операторов. В дальнейшем подход, предложенный в [5], привлек внимание достаточно широкого круга исследователей [6; 7; 8]. Однако эволюционно представимые процессы, порождаемые задачей Коши с оператором при производной не изучались. Отметим, что если в задаче Коши оператор при производной обратим, то получается класс процессов, который изучался ранее [5].

3. Постановка задачи

Распространить подход, предложенный в [5], на эволюционно представимые случайные процессы, порождаемые задачей Коши с оператором при производной.

4. Решение

Рассмотрим случайный процесс $¶(t)$ с непрерывной корреляционной функцией $K(t,s) = M¶(t)\overline{¶(s)}$, для которой соответствующая кривая $x_t \in M_¶ = \overline{\bigvee_k ¶(t_k)}$ в гильбертовом пространстве является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} iA\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \\ x\big|_{t=0} = x_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Известно, что $K(t,s) = \langle x_t, x_s \rangle_{H_¶}$.

Рассмотрим ассоциированную открытую систему:

$$\begin{cases} iA\dfrac{dx}{dt} + x = ¨u \\ v = u + ¨^{+}\dfrac{dx}{dt} \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $\dfrac{A - A^*}{i} = ¨¨^{+}$, $¨^{+} = J¨^{*}$, J – инволюция, т. е. операторы $A \in X$, где $X = (A, H, ¨, E, J)$ – операторный узел.

Из (2) следует $\dfrac{d}{dt}\|x\|_H^2 = [v,v]_E - [u,u]_E$. Это соотношение естественно назвать законом сохранения.

Система (1) порождает полугруппу операторов T_t и кривые $x_t = T_t¶_0$. Покажем, что T_t является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} iA\dfrac{dT_t}{dt} + T_t = 0 \\ T_t\big|_{t=1} = I \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим семейство операторов $Z_t = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{it\lambda}\left(\lambda A - I\right)^{-1} A d\lambda$, где $\left(\lambda A - I\right)^{-1} A$ – резольвента Фредгольма. Тогда:

$$\frac{dZ_t}{dt} = -\frac{i}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{it\lambda}\left(\lambda A - I\right)^{-1} d\lambda \qquad (4)$$

Умножая (4) на iA, получим: $iA\frac{dZ_t}{dt} = -\frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} e^{it\lambda}\left(\lambda A - I\right)^{-1} A d\lambda$, т. е. $iA\frac{dZ_t}{dt} = -Z_t$. Следовательно, $iA\frac{dZ_t}{dt} + Z_t = 0$, а значит Z_t и T_t удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению.

Пусть A – обратимый оператор, найдем Z_0:

$$Z_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\left(\lambda A - I\right)^{-1} A d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\left(I - \frac{A^{-1}}{\lambda}\right)^{-1}}{\lambda} d\lambda .$$

Пусть $\left|\lambda\right| \geq \max\left(\left\|A\right\|, \left\|A^{-1}\right\|\right)$, тогда $\left(I - \frac{A^{-1}}{\lambda}\right)^{-1} = I + \frac{A^{-1}}{\lambda} + \frac{A^{-2}}{\lambda^2} + \ldots$, причем

$$\left\|\frac{A^{-1}}{\lambda}\right\| = \frac{1}{\left|\lambda\right|}\left\|A^{-1}\right\| < 1 .$$

$$Z_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{d\lambda}{\lambda} I + \ldots = I .$$

Таким образом, Z_t удовлетворяет задаче Коши (3) и, следуя теореме единственности, $Z_t = T_t$.

Рассмотрим инфинитезимальную корреляционную функцию $W\left(t,s\right) = \left\langle 2\operatorname{Im} Ax_t, x_t\right\rangle_H$ [5].

Лемма 1. Корреляционная функция и инфинитезимальная корреляционная функция связаны соотношением:

$$\frac{\partial^2 W\left(t,s\right)}{\partial t \partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) K\left(t,s\right).$$

Доказательство. Из (2) имеем:

$$\left\langle iA\frac{dx_t}{dt},\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H+\left\langle\frac{dx_t}{dt},iA\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H=-\left\langle x_t,\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H-\left\langle\frac{dx_t}{dt},x_s\right\rangle_H;$$

$$\left\langle iA\frac{dx_t}{dt},\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H+\left\langle -iA^*\frac{dx_t}{dt},\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H=-\left\langle x_t,\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H-\left\langle\frac{dx_t}{dt},x_s\right\rangle_H;$$

$$-\left\langle 2\operatorname{Im}A\frac{dx_t}{dt},\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s);$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\langle 2\operatorname{Im}Ax_t,x_s\rangle_H=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s);$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\langle 2\operatorname{Im}Ax_t,x_s\rangle_H=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}W(t,s) \qquad (5)$$

В дальнейшем обозначим $\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}W(t,s)=-V(t,s)$.

Из (5) видно, что если $A=A^*$, то $2\operatorname{Im}A=0$ и $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)=0$.

Следовательно, $K=K(t-s)$.

Таким образом, кривая, порождаемая задачей Коши (1), в случае самосопряженного оператора является стационарной кривой.

Лемма 2. Если $\dim\overline{2\operatorname{Im}AH}=r<\infty$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)=\sum_{\sim,\ =1}^{r}\cdot_{\sim}(t)I_{\sim}\ \overline{\cdot\ \ (s)}, \text{ где}$$

$$\cdot_{\sim}(t)=\left\langle\frac{dx_t}{dt},g_{\sim}\right\rangle_H=\frac{d}{dt}\langle x_t,g_{\sim}\rangle_H=\frac{d}{dt}\langle T_tx_0,g_{\sim}\rangle_H=\frac{d}{dt}\left\langle x_0,T_t^*g_{\sim}\right\rangle_H.$$

Доказательство следует из соотношения:

$$\left\langle 2\operatorname{Im}A\frac{dx_t}{dt},\frac{dx_s}{ds}\right\rangle_H=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\langle 2\operatorname{Im}Ax_t,x_s\rangle_H=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\sum_{\sim,\ =1}^{r}\ddot{}_{\sim}(t)I_{\sim}\ \overline{\ddot{}\ \ (s)},$$

где учтены условия операторного комплекса: $2\operatorname{Im}A=\sum_{\sim,\ =1}^{r}\langle\cdot,g_{\sim}\rangle I_{\sim}\ \overline{g\ }$, $g_{\sim}$ – каналовые элементы оператора A, а $\ddot{}_{\sim}(t)=\langle x_t,g_{\sim}\rangle_H$ [5].

Таким образом, $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)=-V(t,s)$. Отсюда

$$K(t,s)=\begin{cases} K(t-s,0)+\int\limits_{0}^{-s}V(t+²,s+²)d², \ t\geq s \\ K(0,s-t)+\int\limits_{0}^{-t}V(t+²,s+²)d², \ s\geq t \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Отметим, что в выражении $·_{\sim}(t)=\left\langle\frac{dx}{dt},g_{\sim}\right\rangle_H$ можно переходить к унитарно эквивалентным элементам.

Пусть A – антидиссипативный оператор с дискретным спектром $\{ª_k\}$ (т. е. $ª_k=\sim_k-i\frac{{}_k^2}{2}$, ${}_k\neq 0$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}_k^2<\infty$) и принадлежит операторному комплексу

$K=\left(A,l_2,g=\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \end{pmatrix},(I_{\sim}\quad)=-1\right)$, $\dim\overline{2\operatorname{Im}AH}=1$. Найдем $·(t)$.

$$·(t)=\frac{d}{dt}\langle T_t x_0,g\rangle_{l_2}=\frac{d}{dt}\left\langle x_0,T_t^*g\right\rangle_{l_2},\ \overline{\left(T_t^*g\right)_k}=\Lambda_k(t).$$

$$·(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_0(k)\Lambda_k'(t),$$

$$\Lambda_k(t)=\left(T_t^*g\right)_k=\overline{-\frac{1}{2®i}\oint\limits_{¥}e^{-iªt}\left(\left(A^*ª-I\right)^{-1}A^*g\right)_k dª}.$$

Необходимо найти значение резольвенты Фредгольма оператора T_t^* на каналовом элементе:

$$\left(A^*ª-I\right)^{-1}A^*g=f \tag{7}$$

Оператор A унитарно эквивалентен своей треугольной модели $\hat{A}$ [5]:

$$\left(\hat{A}f\right)_k=ª_k f_k-i\sum_{j=k+1}^{\infty}f_j\ {}_j\ {}_k,$$

где $ª_k = \sim_k - i\frac{\ _k^2}{2}$. Тогда $\left(\hat{A}^* f\right)_k = \bar{ª}_k f_k + i\sum_{j=1}^{k-1} f_j \ \ _j \ \ _k$.

Следовательно, $\left(\frac{\hat{A} - \hat{A}^*}{i} f\right)_k = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f, \hat{g}\right\rangle g_k$, $\hat{g} = \begin{pmatrix} \ _1 \\ \ _2 \\ \vdots \\ \ _n \end{pmatrix}$ и $\left(J_{\sim} \ \ \right) = -1$.

Значит, $\hat{A}^* \hat{g} = ª_k g_k + i\sum_{j=1}^{k} \ _l^2 \ \ _k = \left(\bar{ª}_k + i¥_k\right) \ _k$, где $¥_k = \sum_{j=1}^{k-1} \ _j^2$.

Из (7) следует, что $\hat{A}^* g = \left(\hat{A}^* ª - I\right) f$ или

$$\left(\bar{ª}_k + i¥_k\right) \ _k = \left(\bar{ª}_k ª - 1\right) f_k + iª\sum_{j=1}^{k-1} f_j \ \ _j \ \ _k \qquad (8)$$

Разделим соотношение (8) на $\ _k$, обозначив $«_k = \bar{ª}_k + i¥_k$:

$$«_k = \frac{\bar{ª}_k ª_k - 1}{\ _k} f_k + iª\sum_{j=1}^{k-1} f_j \ \ _j .$$

$$«_k = y_k + iª\sum_{j=1}^{k-1}\frac{y_j \ \ _j^2}{\bar{ª}_j ª - 1}, \text{ где } y_j = \frac{\bar{ª}_j ª - 1}{\ _j} f_j ,$$

$$«_{k+1} = y_{k+1} + iª\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j \ \ _j^2}{\bar{ª}_j ª - 1} .$$

Тогда $«_{k+1} - «_k = \left(y_{k+1} - y_k\right) + i\frac{ªy_k \ \ _k^2}{\bar{ª}_k ª - 1}$.

$$«_{k+1} - «_k = y_{k+1} + y_k\left(\frac{iª \ \ _k^2}{\bar{ª}_k ª - 1} - 1\right) = y_{k+1} - y_k\frac{ªª_k - 1}{\bar{ª}_k ª - 1}, \text{ т. к. } ª_k = \sim_k - i\frac{\ _k^2}{2} .$$

Пусть $«_{k+1} - «_k = ¢_k$, тогда получим разностное уравнение:

$$y_{k+1} = y_k\frac{ªª_k - 1}{\bar{ª}_k ª - 1} + ¢_k ,\ y_1 = \bar{ª}_1 \qquad (9)$$

Запишем (9) в следующем виде:

$$\begin{cases} y_{k+1} = A_k y_k + B_k \\ y_1 = \bar{ª}_1 \end{cases}, \text{ где } A_k = \frac{ªª_k - 1}{\bar{ª}_k ª - 1},\ B_k = ¢_k .$$

Решение задачи Коши (9) имеет вид:

$$y_k = A_1 A_2 ... A_{k-1} y_1 + ¢_{k-1} + A_{k-1}¢_{k-2} + A_{k-1}A_{k-2}¢_{k-3} + ... + A_{k-1}...A_2¢_1,$$

где $A_1 A_2 ... A_{k-1} = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1}$,

$$y_k = A_1 A_2 \dots A_{k-1} y_1 + \sum_{j=1}^{k-2} \prod_{l=j+1}^{k-1} A_l ¢_j + ¢_{k-1} = \bar{ª}_1 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + ¢_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} \prod_{l=j+1}^{k-1} \frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1} ¢_j =$$

$$= \bar{ª}_1 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + ¢_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} ¢_j \prod_{l=j+1}^{k-1} \frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1}.$$

Т. к. $f_j = \frac{y_j \quad j}{\bar{ª}_j ª - 1}$, то

$$f_k(ª) = \frac{\bar{ª}_{k\,1}}{\bar{ª}_k ª - 1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1} ¢_{k-1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1} \sum_{j=1}^{k-2} ¢_j \prod_{l=j+1}^{k-1} \frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1}, \text{ а}$$

$$\Lambda_k(t) = -\frac{1}{2®i} \oint_{¥} e^{-iªt} \left(\frac{\bar{ª}_{k\,1}}{\bar{ª}_k ª - 1} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1} ¢_{k-1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1} \sum_{j=1}^{k-2} ¢_j \prod_{l=j+1}^{k-1} \frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1} \right) dª$$

В частности, при $k = 1$, $f_1(ª) = \frac{y_1 \ \ 1}{\bar{ª}_1 ª - 1} = \frac{\bar{ª}_{1\ 1}}{\bar{ª}_1 ª - 1}$. Тогда при помощи вычетов имеем $\Lambda_1(t) = {}_1 e^{\frac{it}{ª_1}}$.

Если $k = 2$, то, аналогично, $f_2(ª) = \frac{2}{\bar{ª}_2 ª - 1} \cdot \left(\frac{\bar{ª}_1(ª_1 ª - 1)}{\bar{ª}_1 ª - 1} + \bar{ª}_2 - ª_1 \right)$.

При $ª_1 \neq ª_2$ получим $\Lambda_2(t) = \frac{2}{ª_2 - ª_1} \cdot \left(e^{\frac{it}{ª_1}} \left(ª_2 + i \ {}_1^2 \right) + e^{\frac{it}{ª_2}} \left(ª_1 + i \ {}_1^2 \right) \right)$.

Если $ª_1 = ª_2$, то $f_2(ª) = \frac{2}{\bar{ª}_1 ª - 1} \cdot \left(\frac{ª_1 \bar{ª}_1 ª - \bar{ª}_1 + i \ {}_1^2 \bar{ª}_1 ª - i \ {}_1^2}{\bar{ª}_1 ª - 1} \right)$, а

$$\Lambda_2(t)=\frac{2}{\alpha_1^2}e^{\frac{it}{\alpha_1}}\left(-t\ {}_1^2+\alpha_1^2\right).$$

Примеры. Пусть $\dim\overline{\frac{A-A^*}{i}H}=1$ и $x_0=\hat{g}$. Тогда, если $\dim l_2=1$, то

$$V(t,s)=\frac{|x_0(1)|^2\cdot\ {}_1^2}{|\alpha_1|^2}e^{\frac{i(t\bar\alpha_1-s\alpha_1)}{|\alpha_1|^2}},\ \hat{g}=\alpha_1,\ \alpha_1=\sim_1-\frac{i\ {}_1^2}{2}.$$

В этом случае из (6) следует:

$$K(t,s)=\begin{cases}x_0(1)\ {}_1e^{\frac{i(t-s)}{\alpha_1}}+|x_0(1)|^2 i\left(e^{\frac{i\bar\alpha_1(t-s)}{|\alpha_1|^2}}-e^{\frac{i(t\bar\alpha_1-s\alpha_1)}{|\alpha_1|^2}}\right), & t\ge s\\ \overline{x_0(1)}\ {}_1e^{-\frac{i(s-t)}{\bar\alpha_1}}+|x_0(1)|^2 i\left(e^{\frac{i\alpha_1(t-s)}{|\alpha_1|^2}}-e^{\frac{i(t\bar\alpha_1-s\alpha_1)}{|\alpha_1|^2}}\right), & s\ge t.\end{cases}$$

Если $\dim l_2=2$, то тогда при $\alpha_1\ne\alpha_2$ и $x_0(1)=\ {}_1,\ x_0(2)=\ {}_2$

$$V(t,s)=|x_0(1)|^2\cdot\frac{{}_1^2}{|\alpha_1|^2}e^{\frac{i(\bar\alpha_1t-\alpha_1s)}{|\alpha_1|^2}}+$$

$$+x_0(1)\overline{x_0(2)}\cdot\frac{{}_1\ {}_2}{\alpha_1(\bar\alpha_2-\bar\alpha_1)}\left(\frac{\bar\alpha_2-i\ {}_1^2}{\bar\alpha_1}e^{\frac{i(\bar\alpha_1t-\alpha_1s)}{|\alpha_1|^2}}+\frac{\bar\alpha_1-i\ {}_1^2}{\bar\alpha_2}e^{\frac{i(\bar\alpha_2t-\alpha_1s)}{\alpha_1\bar\alpha_2}}\right)+$$

$$+x_0(2)\overline{x_0(1)}\cdot\frac{{}_1\ {}_2}{\bar\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}\left((\alpha_2+i\ {}_1^2)e^{\frac{i(\bar\alpha_1t-\alpha_1s)}{|\alpha_1|^2}}+(\alpha_1+i\ {}_1^2)e^{\frac{i(\bar\alpha_1t-\alpha_2s)}{\bar\alpha_1\alpha_2}}\right)+$$

$$+|x_0(2)|^2\cdot\frac{{}_1^2}{(\bar\alpha_2-\bar\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\cdot\frac{(\bar\alpha_2-i\ {}_1^2)(\alpha_2+i\ {}_1^2)}{|\alpha_1|^2}e^{\frac{i(\bar\alpha_1t-\alpha_1s)}{|\alpha_1|^2}}+$$

$$+\left|x_0(2)\right|^2\cdot\frac{\ {}^2_1}{\left(\bar{a}_2-\bar{a}_1\right)\left(a_2-a_1\right)}\cdot\frac{\left(\bar{a}_1-i\ {}^2_1\right)\left(a_1+i\ {}^2_1\right)}{\left|a_2\right|^2}e^{\frac{i\left(\bar{a}_2 t-a_2 s\right)}{\left|a_2\right|^2}};$$

$$K(t-s,0)=x_0(1)\ {}_1 e^{\frac{i(t-s)}{a_1}}+x_0(2)\frac{2}{a_2-a_1}\left(e^{\frac{i(t-s)}{a_1}}\left(a_2+i\ {}^2_1\right)+e^{\frac{i(t-s)}{a_2}}\left(a_1+i\ {}^2_1\right)\right)$$

при $t\geq s$;

$$K(0,s-t)=\overline{x_0(1)}\ {}_1 e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{a}_1}}+\overline{x_0(2)}\frac{2}{\bar{a}_2-\bar{a}_1}\left(e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{a}_1}}\left(\bar{a}_2-i\ {}^2_1\right)+e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{a}_2}}\left(\bar{a}_1-i\ {}^2_1\right)\right)$$

при $s\geq t$.

Отметим, что $K(t-s,0)=\left\langle T_t x_0,x_0\right\rangle_{H_¶}=\left\langle x_0,T_t^* x_0\right\rangle_{H_¶}$, где

$$T_t^* x_0=-\frac{1}{2®i}\oint_{¥} e^{-iat}\left(A^* a-I\right)^{-1}A^* x_0\,da\ .$$

Если $x_0=\hat{g}$, то $\left\langle T_t x_0,x_0\right\rangle_{H_¶}=\left\langle T_t\hat{g},\hat{g}\right\rangle_{H_¶}=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{g}(k)\Lambda_k'(t)$.

Если $x_0\neq\hat{g}$, то необходимо найти резольвенту Фредгольма на неканаловом элементе x_0:

$$\left(\hat{A}^* a-I\right)^{-1}\hat{A}^* x_0=f\ .$$

$$\hat{A}^* x_0=\left(\hat{A}^* a-I\right)f\ .$$

Рассмотрим случай дискретного оператора. Тогда

$$\hat{A}^* x_0=\overline{a_k}x_0(k)+i\sum_{j=1}^{k}x_0(j)\ \ {}_j\ \ {}_k\ .$$

Обозначим $\left(\hat{A}{}^{*}x_0\right)_k = \pm_k$. Следовательно,

$$\pm_k = \left(\bar{ª}_k ª - 1\right) f_k + i ª \sum_{j=1}^{k-1} f_j \quad _j \quad _k \; . \tag{10}$$

Из (10) получаем разностное уравнение для y_k:

$$y_{k+1} = \frac{ª_k ª - 1}{\bar{ª}_k ª - 1} y_k + ¢_k \,, \; y_1 = \frac{\pm_1}{_1} \,, \tag{11}$$

где $y_k = \frac{\left(\bar{ª}_k ª - 1\right)}{_k} f_k$, $«_k = \frac{\pm_k}{_k}$, $ª_k = \sim_k - i \frac{^2_k}{2}$, $«_{k+1} - «_k = ¢_k$,

$$«_{k+1} = y_{k+1} + i ª \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j \; ^2_j}{\bar{ª}_j ª - 1} \, .$$

Тогда $«_{k+1} - «_k = y_{k+1} - y_k + i ª \frac{y_k \; ^2_k}{\bar{ª}_k ª - 1}$,

$$«_{k+1} - «_k = y_{k+1} - \left(- \frac{i ª \; ^2_k}{\bar{ª}_k ª - 1} + 1 \right) y_k = y_{k+1} - \frac{\bar{ª}_k ª - 1 - i ª \; ^2_k}{\bar{ª}_k ª - 1} y_k = y_{k+1} - \frac{ª_k ª - 1}{\bar{ª}_k ª - 1} y_k \, .$$

Пусть $«_{k+1} - «_k = ¢_k$, тогда получим разностное уравнение первого порядка:

$$y_{k+1} = \frac{ª_k ª - 1}{\bar{ª}_k ª - 1} y_k + ¢_k \,, \; y_1 = \frac{\pm_1}{_1} \, . \tag{11}$$

Запишем (11) в следующем виде:

$$\begin{cases} y_{k+1} = A_k y_k + ¢_k \\ y_1 = \frac{\pm_1}{_1} \end{cases} , \text{ где } A_k = \frac{ª_k ª - 1}{\bar{ª}_k ª - 1} \,, \; B_k = ¢_k \, .$$

Решение задачи Коши (11) имеет вид:

$$y_k = A_1 A_2 ... A_{k-1} \frac{\pm_1}{_1} + ¢_{k-1} + A_{k-1} ¢_{k-2} + A_{k-1} A_{k-2} ¢_{k-3} + ... + A_{k-1} ... A_2 ¢_1 \,,$$

где $A_1 A_2 ... A_{k-1} = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{ª ª_j - 1}{ª \bar{ª}_j - 1}$,

$$y_k = A_1 A_2 ... A_{k-1}\frac{\pm_1}{1} + \sum_{j=1}^{k-2}\prod_{l=j+1}^{k-1} A_l ¢_j + ¢_{k-1} = \frac{\pm_1}{1}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + ¢_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2}\prod_{l=j+1}^{k-1}\frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1}¢_j =$$

$$= \frac{\pm_1}{1}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + ¢_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2}¢_j\prod_{l=j+1}^{k-1}\frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1}.$$

Т. к. $f_j = \frac{y_j \quad j}{\bar{ª}_j ª - 1}$, то

$$f_k(ª) = \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1}\cdot\frac{\pm_1}{1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}¢_{k-1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}\sum_{j=1}^{k-2}¢_j\prod_{l=j+1}^{k-1}\frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1},\text{ а}$$

$$M_k(t) =$$

$$= -\frac{1}{2®i}\oint_{¥} e^{-iªt}\left(\frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}\cdot\frac{\pm_1}{1}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\frac{ªª_j - 1}{ª\bar{ª}_j - 1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}¢_{k-1} + \frac{k}{\bar{ª}_k ª - 1}\sum_{j=1}^{k-2}¢_j\prod_{l=j+1}^{k-1}\frac{ªª_l - 1}{ª\bar{ª}_l - 1}\right)dª$$

В частности, если $k = 1$, то $y_1 = \frac{\pm_1}{1}$, $f_1(ª) = \frac{y_1 \quad 1}{\bar{ª}_1 ª - 1} = \frac{\pm_1}{\bar{ª}_1 ª - 1}$. Тогда

$$M_1(t) = \frac{\pm_1}{ª_1} e^{\frac{it}{ª_1}}.$$

Если $k = 2$, то $f_2(ª) = \frac{1}{\bar{ª}_2 ª - 1}\cdot\left(\frac{\pm_1 \quad 2 ª_1 ª + \pm_2 \quad 1 \bar{ª}_1 ª - \pm_1 \quad 2 \bar{ª}_1 ª - \pm_2 \quad 1}{1(\bar{ª}_1 ª - 1)}\right)$.

Тогда при $ª_1 \neq ª_2$ получим:

$$M_2(t) = \frac{1}{1(ª_2 - ª_1)}\left[e^{\frac{it}{ª_1}}\cdot\frac{i\pm_1 \quad 1^2 \quad 2}{ª_1} - e^{\frac{it}{ª_2}}\cdot\frac{i\pm_1 \quad 1^2 \quad 2 + \pm_2 \quad 1(ª_1 - ª_2)}{ª_2}\right].$$

Если $ª_1 = ª_2$, то $f_2(ª) = \left(\frac{\pm_1 \quad 2 ª_1 ª + \pm_2 \quad 1 \bar{ª}_1 ª - \pm_1 \quad 2 \bar{ª}_1 ª - \pm_2 \quad 1}{1(\bar{ª}_1 ª - 1)^2}\right)$. Тогда

$$M_2(t) = \frac{1}{1 ª_1^2} e^{\frac{it}{ª_1}}\left(-\frac{t\pm_1 \quad 1^2 \quad 2}{ª_1} + i\pm_1 \quad 1^2 \quad 2 + \pm_2 \quad 1 ª_1\right).$$

Следовательно,

при $k=1$ $V(t,s)=|x_0(1)|^2\cdot\frac{|\pm_1|^2}{|\mathrm{a}_1|^2}e^{\frac{i(\bar{\mathrm{a}}_1 t-\mathrm{a}_1 s)}{|\mathrm{a}_1|^2}}$. Тогда из (6):

$$K(t,s)=x_0(1)\frac{\pm_1}{\mathrm{a}_1}e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_1}}+$$

$$+x_0(2)\frac{1}{{}_1(\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1)}\left(e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_1}}\cdot\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\mathrm{a}_1}-e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_2}}\cdot\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2+\pm_2\ {}_1(\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_2)}{\mathrm{a}_2}\right)+$$

$$+\frac{|x_0(1)|^2\cdot|\pm_1|^2}{|\mathrm{a}_1|^2\cdot\ {}_1^2}e^{\frac{i(t\bar{\mathrm{a}}_1-s\mathrm{a}_1)}{|\mathrm{a}_1|^2}}\left(1-e^{\frac{{}_1^2 s}{|\mathrm{a}_1|^2}}\right),\ t\ge s \text{ и}$$

$$K(t,s)=\overline{x_0(1)}\frac{\bar{\pm}_1}{\bar{\mathrm{a}}_1}e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_1}}-$$

$$-\overline{x_0(2)}\frac{1}{{}_1(\bar{\mathrm{a}}_2-\bar{\mathrm{a}}_1)}\left(e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_1}}\cdot\frac{i\bar{\pm}_1\ {}_1^2\ {}_2}{\bar{\mathrm{a}}_1}-e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_2}}\cdot\frac{i\bar{\pm}_1\ {}_1^2\ {}_2+\bar{\pm}_2\ {}_1(\bar{\mathrm{a}}_1-\bar{\mathrm{a}}_2)}{\bar{\mathrm{a}}_2}\right)+$$

$$+\frac{|x_0(1)|^2\cdot|\pm_1|^2}{|\mathrm{a}_1|^2\cdot\ {}_1^2}e^{\frac{i(t\bar{\mathrm{a}}_1-s\mathrm{a}_1)}{|\mathrm{a}_1|^2}}\left(1-e^{\frac{{}_1^2 t}{|\mathrm{a}_1|^2}}\right),\ s\ge t\ ;$$

при $k=2$ ($\mathrm{a}_1\ne\mathrm{a}_2$) получим

$$K(t-s,0)=x_0(1)\frac{\pm_1}{\mathrm{a}_1}e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_1}}+$$

$$+x_0(2)\frac{1}{{}_1(\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_1)}\left(e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_1}}\cdot\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\mathrm{a}_1}-e^{\frac{i(t-s)}{\mathrm{a}_2}}\cdot\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2+\pm_2\ {}_1(\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_2)}{\mathrm{a}_2}\right),\ t\ge s\ ;$$

$$K(0,s-t)=\overline{x_0(1)}\frac{\bar{\pm}_1}{\bar{\mathrm{a}}_1}e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_1}}-$$

$$-\overline{x_0(2)}\frac{1}{{}_1(\bar{\mathrm{a}}_2-\bar{\mathrm{a}}_1)}\left(e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_1}}\cdot\frac{i\bar{\pm}_1\ {}_1^2\ {}_2}{\bar{\mathrm{a}}_1}-e^{-\frac{i(s-t)}{\bar{\mathrm{a}}_2}}\cdot\frac{i\bar{\pm}_1\ {}_1^2\ {}_2+\bar{\pm}_2\ {}_1(\bar{\mathrm{a}}_1-\bar{\mathrm{a}}_2)}{\bar{\mathrm{a}}_2}\right),\ s\ge t\ ;$$

$$V(t,s)=\left|x_0(1)\right|^2\cdot\frac{\left|\pm_1\right|^2}{\left|\text{ª}_1\right|^4}e^{\frac{i\left(\bar{\text{ª}}_1 t-\text{ª}_1 s\right)}{\left|\text{ª}_1\right|^2}}+$$

$$+x_0(1)\overline{¶_0(2)}\cdot\frac{\pm_1 i}{\left|\text{ª}_1\right|^4\bar{\text{ª}}_1}\left(\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\bar{\text{ª}}_1}s-2\pm_1\ {}_1^2\ {}_2-i\pm_2\ {}_1\bar{\text{ª}}_1\right)-$$

$$-\overline{x_0(1)}x_0(2)\cdot\frac{\pm_1 i}{{}_1\left|\text{ª}_1\right|^4\text{ª}_1}\left(-\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\text{ª}_1}t-2\pm_1\ {}_1^2\ {}_2+i\pm_2\ {}_1\text{ª}_1\right)e^{\frac{i\left(\bar{\text{ª}}_1 t-\text{ª}_1 s\right)}{\left|\text{ª}_1\right|^2}}+$$

$$+\left|x_0(2)\right|^2\cdot\frac{1}{{}_1^2\left|\text{ª}_1\right|^6}\left(-\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\text{ª}_1}t-2\pm_1\ {}_1^2\ {}_2+i\pm_2\ {}_1\text{ª}_1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{i\pm_1\ {}_1^2\ {}_2}{\bar{\text{ª}}_1}s-2\pm_1\ {}_1^2\ {}_2-i\pm_2\ {}_1\bar{\text{ª}}_1\right)e^{\frac{i\left(\bar{\text{ª}}_1 t-\text{ª}_1 s\right)}{\left|\text{ª}_1\right|^2}}.$$

Пусть теперь $H_{¶}=L^2_{[0;l]}$, а у оператора A $\dim\overline{2\operatorname{Im}AH}=1$ и единственная точка спектра $\text{ª}=0$ является бесконечно кратной. Тогда оператор A унитарно эквивалентен своей треугольной модели $\hat{A}$, т. е. $\hat{A}f(x)=-i\int_x^l f(y)dy$ [5].

Рассмотрим соответствующую задачу Коши (1):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_x^l ¶(t,u)du=-¶(t,u)\\ ¶\big|_{t=0}=f_0(x).\end{cases}$$

В этом случае можно непосредственно найти корреляционную функцию. Введем $\int_x^l ¶(t,u)du=¦(t,x)$. Для $¦(t,x)$ получим уравнение:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial ¦}{\partial t}-\dfrac{\partial ¦}{\partial x}=0\\ ¦\big|_{t=0}=\displaystyle\int_x^l f_0(x)dx=f_1(x).\end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид [6]:

$$¦=f_1(x+t).$$

Т. к. $¶(x,t)=-\dfrac{\partial ¦}{\partial x}$, то $¶(x,t)=\begin{cases}f_0(x+t),\ \text{при}\ x\in[t;+\infty)\cap[0;l],\\ 0,\ \text{при}\ x\notin[t;+\infty)\cap[0;l].\end{cases}$

Тогда $K(t,s) = \langle \P_t, \P_s \rangle = \begin{cases} \int\limits_{\max(t,s)}^{l} f_0(x+t)\overline{f_0(x+s)}dx, \text{ при } t,s \in [0;l], \\ 0, \text{ при } t,s \notin [0;l]. \end{cases}$

5. Выводы

В работе реализован операторный подход к изучению одного класса нестационарных случайных процессов в рамках корреляционной теории. Такой подход позволил получить новые модельные представления как для самих случайных процессов, так и для корреляционных функций и соответствующих характеристик нестационарности. На этом пути возможно получение канонических представлений, которые являются аналогом спектрального разложения стационарного случайного процесса и могут быть получены при помощи теории ассоциированных открытых систем. Дальнейшая разработка корреляционной теории такого класса нестационарных случайных процессов может служить основой для моделирования корреляционных функций нестационарных случайных процессов, которые можно использовать для обработки статистических измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-мерными приращениями / А. М. Яглом // Математический сборник. – 1955. – Т. 37(79) №1. – С. 141-196.
2. Лифшиц Н. А., Виноградов В. Н., Голубев Г. А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами / Н. А. Лифшиц, В. Н. Виноградов, Г. А. Голубев. – М.: Сов. радио, 1974. – 328 с.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.
4. Беляев Ю. К. Аналитические случайные процессы / Беляев Ю. К. // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т. 4, вып. 4. – С. 437-444.
5. Livshits M. S., Yantsevitch A. A. Operator colligation in Hilbert space. – Wiley, New-York, 1979. – 210 p.
6. Zolotarev V., Kirchev K. Nonstatianary curves in Hilbert space and their correlaion function // Integr. Equat. Oper. Theory, 1994, vol. 19.
7. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов / В. А. Золотарев. – Х.: [ХНУ], 2003. – 342 с.
8. Yantsevich A. A., Petrova A. Y. About one class of vector random processes with infinite rank of nonstationarity. // Radioelektronika i informatika, 2008. – №4. – p. 38-42.

Надійшла – 15.03.2012.