УДК 519.6

Наближення функціями спеціального виду функцій двох змінних, заданих дискретно або слідами на системі прямих

О. М. Литвин, О. В. Ярмош
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

Запропоновано і досліджено метод побудови операторів наближення функцій двох змінних за допомогою сум добутків функцій різних змінних для випадків, коли задані значення функції двох змінних на системі точок або сліди на системі взаємноперпендикулярних прямих. Невідомі функції однієї змінної та сталі знаходяться методом найменших квадратів.

Ключові слова: *оператор наближення, оператор інтерлінації, одновимірні оператори, похибка задання, сліди функції.*

Предложено и исследовано метод построения операторов приближения функций двух переменных с помощью сумм функций разных переменных для случаев, когда заданы значения функции двух переменных на системе точек или следы на системе взаимноперпендикулярных прямых. Неизвестные функции одной переменной и постоянные находятся методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: *оператор приближения, оператор интерлинации, одномерные операторы, погрешность данных, следы функции.*

Proposed and investigated a method for constructing the operators of approximation of two variables functions by using sums of different variable functions for the case when the value of two variables function set on a system of dots or traces on the mutually perpendicular lines system. Unknown one variable functions and constant are founded with help the least squares method.

Key words: *approximation operator, interlination operator, one-dimensional operators, data error, the traces of the function*.

1. Вступ

При наближенні функцій багатьох змінних важливим є вибір класу функцій, за допомогою яких будується оператор наближення, зокрема задача наближення функцій двох змінних $f(x,y)$ сумами $\sum_{k=0}^{N} \ddot{}_k(y)\cdot {}_k(x)$ виникає при розв’язанні багатьох теоретичних і практичних задач.

У працях М.Б.А. Бабаєва [1], В.В. Поспєлова [2], В.Н. Темлякова [3], М.Р. Шура-Бура [4] та інших розглядалося знаходження найкращого наближення $f(x,y)$ із заданих класів з допомогою сум добутків функцій однієї змінної на функцію кількох змінних. В працях М.К. Потапова [5], О.М. Литвина [6, 7] досліджувалася мішана апроксимація сумами Фур’є, а в працях О.М. Литвина [6, 7] – також мішана апроксимація поліномами Бернштейна та сумами вейвлетів, а також операторами інтерлінації та інтерфлетації, які можуть бути зображені у вигляді вказаних сум (див. нижче формулу (1)).

2. Постановка задачі

В роботі [6] отримані вирази для знаходження функцій $\ddot{}_k(x)$, $\cdot_l(y)$, $k,l=\overline{0,N}$ та невідомих сталих $C_{k,l}$ у формулі

$$Z(x,y)=\sum_{k=0}^{N} ¨_k(y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N} \cdot_l(x)h_{2,l}(y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y) \qquad (1)$$

з умови

$$J(Z)=\| f(x,y)-Z(x,y)\|_{L_2[0,1]^2}\to \min_{z\in B_N}, \qquad (2)$$

де B_N – клас функцій вигляду (1).

При цьому вважається, що $h_{1,k}$ та $h_{2,l}$ – задана система лінійно незалежних функцій; функції $¨_k(y)$, $\cdot_l(x)$, $k,l=\overline{0,N}$ і сталі $C_{k,l}$ вважаються невідомими.

Тобто, ці невідомі повинні знаходитися шляхом розв’язання наступної мінімізаційної задачі

$$J(Z)=\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y)-Z(x,y)\right]^2 dxdy\to \min_{¤_k,\cdot_l,C_{k,l}}. \qquad (3)$$

В результаті доведено, що єдиний розв’язок задачі (3) має вигляд

$$Z^*(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)+F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)-h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y), \qquad (4)$$

де

$$h_1(x)=\left[h_{1,1}(x),...,h_{1,N}(x)\right],\ h_2(y)=\left[h_{2,1}(y),...,h_{2,N}(y)\right],$$

$$F=\int_0^1\int_0^1 h_1^T(x)f(x,y)h_2(y)dxdy,\ F_1^T(y)=\int_0^1 h_1^T(x)f(x,y)dx,$$

$$F_2(x)=\int_0^1 f(x,y)h_2(y)dy,\ B_1=\int_0^1 h_1^T(x)h_1(x)dx,\ B_2=\int_0^1 h_2^T(y)h_2(y)dy.$$

Однак на практиці функція $f(x,y)$ рідко буває відомою в аналітичній формі. Найчастіше бувають відомими її значення $f(x_k,y_l)=f_{k,l}$ $0\le k,l\le M$ або сліди $f(x_k,y)$ та $f(x,y_l)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x=x_k$, $y=y_l$, $k,l=\overline{0,N}$.

Зауважимо, що для випадків, коли сліди задаються точно, зручно наближувати невідому функцію $f(x,y)$ операторами сплайн-інтерлінації $Of(x,y)$ функції $f(x,y)$

$$Of(x,y)=\sum_{k=0}^{N} f(x_k,y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N} f(x,y_l)h_{2,l}(y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} f(x_k,y_l)h_{1,k}(x)h_{2,l}(y), \qquad (5)$$

де $h_{1,k}(x_p)=¢_{k,p}$, $h_{2,l}(y_q)=¢_{l,q}$, $0\le k,l,p,q\le N$.

Якщо ж сліди $f(x_k,y)$, $f(x,y_l)$ та значення $f(x_k,y_l)$ задаються з деякою похибкою, то для наближення слід використовувати методи, що згладжують інформацію про функцію $f(x,y)$.

Тому актуальними є знаходження явних формул операторів наближення функції $f(x,y)$, заданої її слідами з похибками, коли відомі її значення $f(x_k,y_l)=f_{k,l}$, а також побудова та дослідження операторів, що дозволяють згладжувати похибки задання функції $f(x,y)$ її слідами $f(x_k,y)$, $f(x,y_l)$ та значеннями $f(x_k,y_l)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x=x_k$ та $y=y_l$, $k,l=\overline{0,N}$.

3. Наближення функціями спеціального виду дискретно заданих функцій двох змінних

В роботі [8] сформульовано і доведено кілька теорем щодо вигляду оператора наближення функцій двох змінних, заданих своїми значеннями $f(x_k,y_l)=f_{k,l}$, а також оцінки похибки наближення побудованими операторами. Наведемо такі теореми.

Теорема 1 [8]. У випадку, якщо функцію $f(x,y)$ задано матрицею значень $f_{p,q}=f\left(\frac{p}{M},\frac{q}{M}\right)$ ($p,q=\overline{0,M}$) і ми наближуємо $f(x,y)$ з умови

$$J(C)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}\left[f_{p,q}-Z0(x_p,y_q,C)\right]^2\rightarrow\min_C \tag{6}$$

функцією такого вигляду

$$Z0(x,y,C)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)=h_1(x)Ch_2^T(y), \tag{7}$$

де функції $h_{1,k}(x)$ та $h_{2,l}(y)$ – відомі лінійно-незалежні функції, $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ – невідомі сталі, то для матриці C виконується співвідношення:

$$C=\tilde{C}=\tilde{B}_1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}_2^{-1},$$

де $\tilde{B}_{1,k,\text{«}}=\sum_{p=0}^{M}h_{1,k}(x_p)h_{1,\text{«}}(x_p)$, $\tilde{B}_{2,l,\neg}=\sum_{q=0}^{M}h_{2,l}(y_q)h_{2,\neg}(y_q)$,

$$\tilde{F}_{\text{«},\neg}=\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}f_{p,q}h_{1,\text{«}}(x_p)h_{2,\neg}(y_q).$$

Теорема 2 [8]. Якщо $Z0f(x,y)=h1(x)\tilde{B}_1^{-1}\tilde{F}\tilde{B}_2^{-1}h2^T(y)$, то $Z0f(x,y)=\tilde{A}_1\tilde{A}_2f(x,y)$, де $\tilde{A}_1f(x,y)=h_1(x)\,\ddot{}\,^T(y)=h_1(x)\tilde{B}_1^{-1}\tilde{F}_1(y)$, $x\in[0,1]$, $\tilde{F}_1(y)=\sum_{p=0}^{M}f(x_p,y)h_{1,\text{«}}(x_p)$, $\tilde{A}_2f(x,y)=\cdot\,(x)h_2^T(y)=\tilde{F}_2(x)\tilde{B}_2^{-1}h_2^T(y)$, $y\in[0,1]$,

$$\tilde{F}_2(x)=\sum_{q=0}^{M}f(x,y_q)h_{2,\neg}(y_q).$$

Зауважимо, що теорема 2 дозволяє виразити залишок наближення функції $f(x,y)$ оператором $Z0(x,y,C)$ через залишки наближення $f(x,y)$ операторами $\tilde{A}_1f(x,y)$ та $\tilde{A}_2f(x,y)$, що діють на одну змінну (x та y, відповідно). В результаті можна сформулювати теорему.

Теорема 3 [8]. Похибка наближення функції $f(x, y)$ за допомогою $Z0(x, y, C)$ має вигляд

$$Rf(x, y) = f(x, y) - Z0(x, y, C) = \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \tilde{R}_2\right) f(x, y),$$

де $\tilde{R}_1 f(x, y) = f(x, y) - \tilde{A}_1 f(x, y)$, $\tilde{R}_2 f(x, y) = f(x, y) - \tilde{A}_2 f(x, y)$.

Приклад 1. Хай $f_{p,q} = f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$, де $f(x, y) = \ln\left[(x + a)^2 + (y + b)^2\right]$, $a = b = 1$, $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$, $k, l = \overline{0, N}$ – базисні сплайни першого степеня. При наближенні функції, заданої значеннями в точках $f\left(\frac{p}{M}, \frac{q}{M}\right)$, оператором $Z0(x, y, C) = h_1(x) C h_2^T(y)$ при $N = 10$ та $M = 20$ отримана похибка наближення $£ = O(10^{-4})$. Аналогічне значення похибки отримане при наближенні функції $f(x, y)$ операторами $\tilde{A}_1(x, y) = h_1(x) \tilde{B}_1^{-1} \tilde{F}_1(y)$ та $\tilde{A}_2(x, y) = \tilde{F}_2(x) \tilde{B}_2^{-1} h_2^T(y)$.

4. Наближення функціями спеціального виду функцій двох змінних, заданих слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих

Далі розглянемо випадок, коли сліди функції задаються не точно. Тоді можна отримати явний вираз для матриці C в операторі

$$A0(x, y, C) = H_1(x) C H_2^T(y) = \sum_{p=0}^{M} \sum_{q=0}^{M} C_{p,q} H_{1,p}(x) H_{2,q}(y),\ M \ge N,$$

який знаходиться з умови

$$\left\| Of(x, y) - H_1(x) C H_2^T(y) \right\|_{L_2[0,1]^2} \to \min_C . \qquad (9)$$

$H_1(x) = \left[H_{1,1}(x), ..., H_{1,M}(x)\right]$, $H_2(y) = \left[H_{2,1}(y), ..., H_{2,M}(y)\right]$ – система лінійно незалежних функцій.

Теорема 4. Оператор $A0(x, y) = H_1(x) C H_2^T(y)$, що дає найкраще середнє квадратичне наближення до функції $Of(x, y)$, може бути представлений у вигляді

$$A0(x, y) = H_1(x) C H_2^T(y), \qquad (10)$$

де $C = B_1^{-1} \overline{F} B_2^{-1}$, $\overline{F}$ визначається так $\overline{F}_{«,¬} = \int_0^1 \int_0^1 Of(x, y) H_{1,«}(x) H_{2,¬}(y) dx dy$, $«,¬ = \overline{0, M}$, тобто $\overline{F} = B_1 \Phi_1 + \Phi_2 B_2 - B_1 \overline{f} B_2$, $\overline{f}_{k,l} = f(x_k, y_l)$,

$\Phi_{1,k,¬} = \int_0^1 f(x_k, y) H_{2,¬}(y) dy$, $\Phi_{2,«,l} = \int_0^1 f(x, y_l) H_{1,«}(x) dx$,

$B_{1,«,k} = \int_0^1 h_{1,k}(x) H_{1,«}(x) dx$, $B_{2,l,¬} = \int_0^1 h_{2,l}(y) H_{2,¬}(y) dy$.

Доведення. З умови (9) отримаємо рівняння для знаходження C :

$$\int_0^1\int_0^1 \left[Of(x,y)-H_1CH_2\right]H_{1,«}(x)H_{2,¬}(y)dxdy=0 \Rightarrow$$

$$B_1CB_2=\left[\int_0^1\int_0^1 Of(x,y)H_{1,«}(x)H_{2,¬}(y)dxdy\right]_{«,¬=\overline{0,M}}=$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 f(x_k,y)H_{2,¬}(y)dy\right]_{«,¬=\overline{0,M}}+$$

$$+\left[\sum_{l=0}^{N}\int_0^1 f(x,y_l)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,¬}(y)dy\right]_{«,¬=\overline{0,M}}-$$

$$-\left[\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} f(x_k,y_l)\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,¬}(y)dy\right]_{«,¬=\overline{0,M}}=$$

$$=B_1\Phi_1+\Phi_2B_2-B_1\overline{f}B_2.$$

Звідси отримуємо $C=B_1^{-1}\left[B_1\Phi_1+\Phi_2B_2-B_1\overline{f}B_2\right]B_2^{-1}=B_1^{-1}\overline{F}B_2^{-1}$.

Теорема 4 доведена.

Зауважимо, що інколи доцільно наближувати функції вигляду (5) формулами вигляду (1), коли $M<N$, тобто

$$A(x,y)=\sum_{p=0}^{M}¨_p(y)H_{1,p}(x)+\sum_{q=0}^{M}\cdot_q(x)H_{2,q}(y)-\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M}C_{p,q}H_{1,p}(x)H_{2,q}(y) \qquad (11)$$

з умови

$$\left\|Of(x,y)-A(x,y)\right\|_{L_2[0,1]^2}\to \min_{¨_p,\cdot_q,C_{p,q}} . \qquad (12)$$

Теорема 5. Оператор $A(x,y)$, що дає найкраще середнє квадратичне наближення до функції $Of(x,y)$, тобто дає розв'язок мінімізаційної задачі (12) може бути представлений у вигляді:

$$\begin{aligned}A(x,y)&=H_1(x)B_1^{-1}b_1f_1(y)+H_1(x)B_1^{-1}\Phi_2h_2^T(y)-H_1(x)B_1^{-1}b_1\overline{f}h_2^T(y)+\\&+H_1(x)B_1^{-1}b_1\overline{f}b_2B_2^{-1}H_2^T(y)-H_1(x)B_1^{-1}b_1\Phi_1B_2^{-1}H_2^T(y)-\\&-H_1(x)B_1^{-1}\Phi_2b_2B_2^{-1}H_2^T(y)+h_1(x)\Phi_1B_2^{-1}H_2^T(y)+f_2(x)b_2B_2^{-1}H_2^T(y)-\\&-h_1(x)\overline{f}b_2B_2^{-1}H_2^T(y),\end{aligned} \qquad (13)$$

де $\bar{f}_{k,l}=f(x_k,y_l)$, $k,l=\overline{0,N}$, $f_{1,k}(y)=f(x_k,y)$, $f_{2,l}(x)=f(x,y_l)$,

$$\Phi_{1,k,¬}=\int_0^1 f(x_k,y)H_{2,¬}(y)dy,\ \Phi_{2,«,l}=\int_0^1 f(x,y_l)H_{1,«}(x)dx,\ «,¬=\overline{0,M},$$

$$B_{1,\alpha,p}=\int_0^1 H_{1,p}(x)H_{1,\alpha}(x)dx\,,\ B_{2,q,\beta}=\int_0^1 H_{2,q}(y)H_{2,\beta}(y)dy\,,\ p,q=\overline{0,M}\,,$$

$$b_{1,\alpha,k}=\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,\alpha}(x)dx\,,\ b_{2,l,\beta}=\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,\beta}(y)dy\,,$$

Доведення. Знайдемо невідомі функції $\varphi_p(y)$, $\psi_q(x)$ та невідомі сталі $C_{p,q}$ з умови (12).

Тоді $\delta_{\varphi_\alpha} J=0 \Rightarrow \int_0^1 \left[Of(x,y)-A(x,y)\right]H_{1,\alpha}(x)dx=0\,,\ \alpha=\overline{0,M}\,,$

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k,y)\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,\alpha}(x)dx+\sum_{l=0}^{N} h_{2,l}(y)\int_0^1 f(x,y_l)H_{1,\alpha}(x)dx-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} f(x_k,y_l)h_{2,l}(y)\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,\alpha}(x)dx-\sum_{p=0}^{M}\varphi_p(y)\int_0^1 H_{1,p}(x)H_{1,\alpha}(x)dx-$$

$$-\sum_{q=0}^{M} H_{2,q}(y)\int_0^1 \psi_q(x)H_{1,\alpha}(x)dx+\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} C_{p,q}H_{2,q}(y)\int_0^1 H_{1,p}(x)H_{1,\alpha}(x)=0,$$

$\alpha=\overline{0,N}.$

Аналогічно $\delta_{\psi_\beta} J=0 \Rightarrow \int_0^1 \left[Of(x,y)-A(x,y)\right]H_{2,\beta}(y)dy=0\,,\ \beta=\overline{0,M} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N} h_{1,k}(x)\int_0^1 f(x_k,y)H_{2,\beta}(y)dy+\sum_{l=0}^{N} f(x,y_l)\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,\beta}(y)dy-$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} f(x_k,y_l)h_{1,k}(x)\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,\beta}(y)dy-\sum_{p=0}^{M} H_{1,p}(x)\int_0^1 \varphi_p(y)H_{2,\beta}(y)dy-$$

$$-\sum_{q=0}^{M}\psi_q(x)\int_0^1 H_{2,q}(y)H_{2,\beta}(y)dy+\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} C_{p,q}H_{1,p}(x)\int_0^1 H_{2,q}(y)H_{2,\beta}(y)dy=0,$$

$\beta=\overline{0,M}.$

Далі $\dfrac{\partial J}{\partial C_{\alpha,\beta}}=0 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 \left[Of(x,y)-A(x,y)\right]H_{1,\alpha}(x)H_{2,\beta}(y)dxdy=0\,,\ \alpha,\beta=\overline{0,M} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,\alpha}(x)dx\int_0^1 f(x_k,y)H_{2,\beta}(y)dy+$$

$$+\sum_{l=0}^{N}\int_0^1 f(x,y_l)H_{1,\alpha}(x)dx\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,\beta}(y)dy-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} f(x_k, y_l)\int_0^1 h_{1,k}(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 h_{2,l}(y)H_{2,¬}(y)dy -$$

$$-\sum_{p=0}^{M}\int_0^1 H_{1,p}(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 ¨_p(y)H_{2,¬}(y)dy -$$

$$-\sum_{q=0}^{M}\int_0^1 \cdot_q(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 H_{2,q}(y)H_{2,¬}(y)dy +$$

$$+\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{M} C_{p,q}\int_0^1 H_{1,p}(x)H_{1,«}(x)dx\int_0^1 H_{2,q}(y)H_{2,¬}(y)dy = 0,\ «,¬ = \overline{0,M}.$$

В результаті ці три системи рівнянь можна записати у вигляді трьох матричних систем рівнянь для визначення матриць C, $¨(y)$, $\cdot(x)$ у такому вигляді

$$\begin{cases} b_1 f_1^T(y) + \Phi_2 h_2^T(y) - b_1\overline{f}h_2^T(y) - B_1 ¨^T(y) - F_2 H_2^T(y) + B_1 C H_2^T(y) = 0 \\ h_1(x)\Phi_1 + f_2(x)b_2 - h_1(x)\overline{f}b_2 - H_1(x)F_1 - \cdot(x)B_2 + H_1(x)CB_2 = 0 \\ b_1\Phi_1 + \Phi_2 b_2 - b_1\overline{f}b_2 - B_1F_1 - F_2B_2 + B_1CB_2 = 0 \end{cases}$$

де $F_{1,p,¬} = \int_0^1 ¨_p(y)H_{2,¬}(y)dy$, $F_{2,«,q} = \int_0^1 \cdot_q(x)H_{1,«}(x)dx$.

З третього рівняння системи визначаємо C

$$C = B_1^{-1}b_1\overline{f}b_2B_2^{-1} + F_1B_2^{-1} + B_1^{-1}F_2 - B_1^{-1}b_1\Phi_1B_2^{-1} - B_1^{-1}\Phi_2b_2B_2^{-1}.$$

Підставляємо отримане C у перше та друге рівняння та отримуємо

$$¨^T(y) = B_1^{-1}b_1f_1(y) + B_1^{-1}\Phi_2h_2^T(y) - B_1^{-1}b_1\overline{f}h_2^T(y) + B_1^{-1}b_1\overline{f}b_2B_2^{-1}H_2^T(y) +$$
$$+ F_1B_2^{-1}H_2^T(y) - B_1^{-1}b_1\Phi_1B_2^{-1}H_2^T(y) - B_1^{-1}\Phi_2b_2B_2^{-1}H_2^T(y),$$

$$\cdot(x) = h_1(x)\Phi_1B_2^{-1} + f_2(x)b_2B_2^{-1} - h_1(x)\overline{f}b_2B_2^{-1} + H_1(x)B_1^{-1}b_1\overline{f}b_2B_2^{-1} +$$
$$+ H_1(x)B_1^{-1}F_2 - H_1(x)B_1^{-1}b_1\Phi_1B_2^{-1} - H_1(x)B_1^{-1}\Phi_2b_2B_2^{-1}.$$

Підставляємо знайдені вирази для C, $¨(y)$, $\cdot(x)$ в рівняння для визначення $A(x,y)$ (11), записане в матричному вигляді

$$A(x,y) = H_1(x)¨^T(y) + \cdot(x)H_2^T(y) - H_1(x)CH_2^T(y). \qquad (13а)$$

В результаті формулу (13) можна переписати у вигляді

$$A(x,y) = H_1(x)B_1^{-1}b_1f_1(y) + H_1(x)B_1^{-1}\Phi_2h_2^T(y) - H_1(x)B_1^{-1}b_1\overline{f}h_2^T(y) +$$
$$+ H_1(x)B_1^{-1}b_1\overline{f}b_2B_2^{-1}H_2^T(y) - H_1(x)B_1^{-1}b_1\Phi_1B_2^{-1}H_2^T(y) -$$
$$- H_1(x)B_1^{-1}\Phi_2b_2B_2^{-1}H_2^T(y) + h_1(x)\Phi_1B_2^{-1}H_2^T(y) + f_2(x)b_2B_2^{-1}H_2^T(y) -$$
$$- h_1(x)\overline{f}b_2B_2^{-1}H_2^T(y).$$

Теорема 5 доведена.

Приклад 2. Хай $f(x,y) = \ln\left[(x+a)^2 + (y+b)^2\right]$, $a = b = 1$. Якщо $Of(x,y)$ має вигляд (8), оператор $A0(x,y) = H_1(x) B_1^{-1} \overline{F} B_2^{-1} H_2^T(y)$, де $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$, $H_{1,p}(x)$, $H_{2,q}(y)$ – базисні сплайни першого степеня. При $N = 5$, $M = 10$ отримана похибка наближення оператором $A0(x,y)$ з умови (9) у вигляді (10) £ $= O(10^{-4})$.

Приклад 3. Якщо в прикладі 2 оператор наближення має вигляд (13), то при $N = 10$, $M = 15$ отримана похибка наближення £ $= O(10^{-4})$.

5. Висновки

На практиці аналітичний вигляд функції $f(x,y)$ часто невідомий, тому виникає необхідність наближення операторами, розглянутими в роботі. Такий підхід ми вважаємо корисним у тих випадках, коли задані значення $f(x_p, y_q) = f_{p,q}$ функції $f(x,y)$ на системі точок (x_p, y_q) з похибкою. Побудовані оператори дозволяють згладити експериментальні дані, а також виразити залишки наближення $f(x,y)$ через залишки наближення операторами, що діють на одну змінну, та зберегти при цьому високу точність, яку дозволяють отримати методи інтерлінації.

Використання таких форм операторів наближення функцій двох змінних може знайти застосування при дослідженні математичних моделей залежності попиту на освітні послуги від ціни та рейтингу вищого навчального закладу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабаев М.-Б. А. Наилучшее приближение функциями меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – Т.279, №2. – С.273-277.
2. Поспелов В. В. О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного. – М., 1978. – 40с.
3. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАМ. – 1986. – Т.178. – С.1-112.
4. Шура-Бура М. Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вычисл. математика. – М., 1957. – №2. – С.3-19.
5. Потапов М. К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углом» // Тр. МИАН. – 1972. – Т.117. – С.256-291.
6. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.
7. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. – К.: Наукова думка, 2005. – 344с.
8. Литвин О. М., Ярмош О. В. Наближення спеціальними функціями визначених двох змінних з використанням дискретних даних // Управляющие системы и машины. – 2012. – №1. – С.32-35.

Надійшла – 16.03.2012.