Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.9:535.4
№ 605, 2003, с. 118-125

Решение одной осесимметричной задачи электростатики для сферы с круговым отверстием и конуса с шаровым закруглением

В.А. Резуненко, О.В. Степуренко
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина[1)]

The solution of the axissymmetrical problem of electrostatics was constructed. Potential of ideal conductivity spherical segment is investigated in presence of infinite grounding cone with spherical grounding round. We used the following methods : the method of the separation of variables, the method of residue in special points of analytical functions, the method of inversion of part of an operator corresponding analogical problem for the sphere without presence of the cone. The auxiliary integral Fredgolm's equation of the second kind is obtained. The space distribution of potential and capacity of the system are analyzed. The comparison with known results and limit cases of the solving problem is presented. The effectiveness of applied algorithm is confirmed.

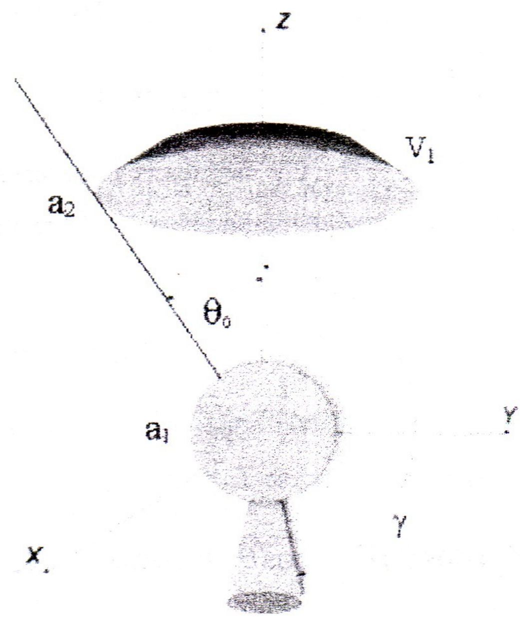
1. Введение.

Задачи электростатики являются актуальными по многим причинам. Известны многочисленные применения конических и сферических структур, например, в антенной и волноводной технике, в электронной оптике, в электронике больших мощностей [1]–[8]. Методы решения задач электростатики часто являются ключевыми для решения других задач, Задачи электростатики на таких структурах являются модельными, так как они позволяют проанализировать главные части соответствующих операторных уравнений более сложных задач. Например, электростатические поля имеют такие же особенности на ребрах структур, как и дифракционные поля. В связи с этим возникает необходимость в решении и анализе прямых и обратных задач на рассматриваемой структуре [1]-[11]. Целью работы является строгое решение сложной задачи электростатики, построение интегрального уравнения Фредгольма II рода для вспомогательной функции. Для этого применяются численно–аналитические методы полуобращения матричного и интегрального операторов задачи [1],[4]-[10]. Обосновываются методы решения интегрального уравнения. Приводятся тестовые примеры. Отметим, что рассматриваемая задача не сводится к известным решенным задачам [2,5,8,15] и отличается от них не только геометрией структуры, но и установленными интегральными уравнениями, а также техникой их получения.

2.Постановка задачи.

Поместим вершину конуса и центр полой сферы с круговым отверстием в начало декартовой и сферической систем координат, ось OZ считаем осью симметрии структуры (см. рис.).

1) e-mail: rezunenko@univer.kharkov.ua



Полагаем сферу с круговым отверстием идеально проводящей, бесконечно тонкой, а конус и его закругление – заземленными. Пусть потенциал сферы с круговым отверстием равен V_1 $(V_1 \neq 0)$. Потенциалы конуса и закругления, по условию, равны нулю. Полагаем полярный угол (отсчитываемый от положительного направления оси OZ) плоского среза сферы с круговым отверстием равным θ_0, угол раскрыва конуса - γ $(\theta_0 < \gamma)$, радиус сферы с круговым отверстием (сегмента) - a_2, радиус шарового закругления - a_1 $(0 < a_1 < a_2)$, ε_0 -диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon_0 \neq 1$). Требуется найти потенциал сферического сегмента в присутствии конуса с шаровым закруглением. Для искомого потенциала приходим к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Потребуем выполнение условий, обеспечивающих существование и единственность решения поставленной задачи электростатики в бесконечной области в R^3

3.Система функциональных уравнений.

Так как поверхности сегмента, закругления и конуса являются координатными, то применим метод разделения переменных в сферической системе координат. Вторичные потенциалы $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ представим так:

$$u^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{\nu_n} r^{-\nu_n - 1} + B_{\nu_n} r^{\nu_n} \right\} P_{\nu_n}(\cos\theta), \;\; a_1 < r < a_2 \;, \qquad (1)$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_{\nu_n} r^{-\nu_n - 1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \qquad r > a_2 \;, \qquad (2)$$

где коэффициенты $A_{\nu_n}, B_{\nu_n}, C_{\nu_n}$ подлежат определению, $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ – функции Лежандра I рода вещественного индекса ν_n аргумента $\cos\theta$, для которых [11]

$$P_{\nu_n}(\cos\gamma) = 0, \qquad 0 < \gamma < \pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Функции Лежандра $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ образуют полную ортогональную с весом $\sin\theta$ систему функций в пространстве $L_2[0,\gamma]$:

$$\mathrm{J}_{n,m} = \int_0^{\gamma} \mathrm{P}_{\nu_n}(\cos\theta)\mathrm{P}_{\nu_m}(\cos\theta)\sin\theta d\theta; \qquad \mathrm{J}_{n,m} = 0, \quad n \neq m,$$

$$\mathrm{J}_{n,m} = \left\| \mathrm{P}_{\nu_n} \right\|^2_{L^2(0,\gamma)} = \frac{\sin\gamma}{2\nu_n + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathrm{P}_{\nu_n}(\cos\gamma) \frac{\partial}{\partial\nu} \mathrm{P}_{\nu}(\cos\gamma).$$

Используя граничные условия, получаем линейную связь между искомыми коэффициентами потенциалов:

$$A_{\nu_n} a_2^{-\nu_n - 1} + B_{\nu_n} a_2^{\nu_n} = C_{\nu_n} a_2^{-\nu_n - 1}, \quad A_{\nu_n} a_1^{-\nu_n - 1} + B_{\nu_n} a_1^{\nu_n} = 0, \qquad n \geq 1.$$

Из граничных условий, введя обозначение

$$C^1_{\nu_n} = C_{\nu_n} a_2^{\nu_n} \left(a_2^{2\nu_n + 1} - a_1^{2\nu_n + 1} \right)^{-1}, \qquad (3)$$

получаем парную сумматорную систему функциональных уравнений относительно неизвестных $C_{\nu_n}^{1}$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C^1_{\nu_n} \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{2\nu_n + 1} \right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = V_1, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, (4) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu_n + 1) C^1_{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, & \theta_0 < \theta \leq \gamma. (5) \end{cases}$$

4.Интегральное уравнение второго рода. Результаты.

Система уравнений (4)–(5) – система 1 рода, имеет непростое ядро – функции Лежандра с нецелым нижним значком. Для решения таких систем неэффективны как аналитические, так и прямые численные методы. Неприменимы также такие хорошо известные методы регуляризации, как метод факторизации [3], метод Канторовича-Лебедева [2]. Регуляризируем данную систему, используя [5-8], [10,11,15]. В основу положим подход, используемый при решении задач электростатики на сферическом сегменте в отсутствии конуса. С этой целью выполним подстановку, введя вспомогательную функцию $\Psi(t)$, имеющую определенный физический смысл:

$$C_{\nu_n}{}^1 = \beta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t) \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t dt, \tag{6}$$

$$\beta_n = -2\left\{ (\sin\gamma)^2 \frac{\partial}{\partial\theta} P_{\nu_n}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\gamma} \frac{\partial}{\partial\nu} P_\nu(\cos\gamma)\Big|_{\nu=\nu_n} \right\}^{-1}, \quad n \geq 1 .$$

Для преобразования уравнений (4), (5) используем интегральное представление Мелера-Дирихле для полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ первого рода целой степени n

$$\mathrm{P_n}(\cos\theta) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{\cos\left(\mathrm{n} + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} \mathrm{d}\varphi, \quad (n \geq 0),$$

и используем разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\imath(n+\frac{1}{2})t} P_n(\cos\theta) = (2(\cos t - \cos\theta))^{-1/2}, \qquad \mathrm{t}, \theta \in (0, \pi),$$

получаемое с помощью производящей функции для полиномов Лежандра

$$((z-a)(z-\bar{a}))^{-1/2}, \qquad |z| < 1, \qquad a = e^{i\theta}$$

(здесь черта обозначает комплексное сопряжение). Для выделения главной части уравнения (4) применим контурное интегрирование и нахождение вычетов для аналитической функции $N1(z; t, \theta, \gamma)$ комплексного аргумента z в ее полюсах [5],[12]

$$N1(z;t,\theta,\gamma) = 2Q_z(\cos\theta)\,\frac{P_z(\cos\theta)}{P_z(\cos\gamma)}\,e^{i(z+\frac{1}{2})t} - \pi\,\mathrm{ctq}(z\pi)\,P_z(\cos\theta)\,e^{i(z+\frac{1}{2})t},$$

где параметры $t,\theta \in (0,1)$, а $P_z(x), Q_z(x)$ - функции Лежандра 1-го и 2-го рода (соответственно) комплексного индекса z при $x\in[0,1]$. Выполнив контурное интегрирование и отделяя реальные и мнимые части вспомогательных функциональных рядов, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n cos(\nu_n+\frac{1}{2})tP_{\nu_n}(\cos\theta) =$$

$$\begin{cases} I(\theta,t)+(2(\cos t-\cos\theta))^{-\frac{1}{2}}, & 0<\theta<t<\gamma, \\ I(\theta,t), & 0<t<\theta<\gamma. \end{cases}$$

где

$$I(\theta,t) = -\int_0^{\infty}\frac{P_{-1/2+ir}(-\cos\gamma)}{P_{-1/2+ir}(\cos\gamma)}P_{-1/2+ir}(\cos\theta)\frac{ch(tr)}{ch(\pi r)}dr\,.$$

В результате подстановки $C_{\nu_n}^{1}$ (6), (3) в уравнение (5) устанавливаем, что оно выполняется тождественно. В итоге подстановки $C_{\nu_n}^{1}$ (6) в уравнение (4) получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\psi(x)-\int_0^{\theta_0}K(x,t)\psi(t)dt = \frac{2V_1}{\pi}\cos\frac{x}{2}, \qquad (7)$$

в котором ядро $K(x,t)$ имеет вид

$$K(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\beta_n\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)x\cos\left(\nu_n+\frac{1}{2}\right)t -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P_{-1/2+ir}(-\cos\gamma)ch(xr)ch(tr)}{P_{-1/2+ir}(\cos\gamma)ch(\pi r)}dr\,, \qquad (8)$$

Этим мы полностью обратили главную часть сумматорных уравнений (4), (5).

В полученном интегральном уравнении в ядре K(x,t) (7) $\varepsilon_n = (a_1/a_2)^{2\nu_n+1}$. При этом $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, так как $a_1 < a_2$. Согласно (6) находим, что в (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$. Ядро (7) является непрерывной функцией, так как интеграл и сумма, входящие в ядро, сходятся равномерно. Значит, интегральное уравнение имеет регулярное ядро и, кроме того, дифференцируемую правую часть. Для полученного уравнения справедлива альтернатива Фредгольма [13]. Соответствующее однородное уравнение имеет единственное нулевое решение. Значит, решение неоднородного интегрального уравнения существует и единственно. Решение уравнения может быть найдено численно для любых параметров задачи и аналитически для углов раскрыва конуса γ, близких к 0 или π, при этом угол θ_0 раскрыва сферического сегмента может быть как угодно близким к γ или равен ему. Решая интегральное уравнение аналитически удобно использовать, например, метод последовательных приближений, а также метод замены ядра вырожденным [14,16].

В работе обсуждаются результаты вычисления пространственного распределения потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) и электрического поля

$$\vec{E} = -grad(u) = -\frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta .$$

Здесь потенциалы $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) и поле $\vec{E}$ не зависят от переменной φ, так как структура симметрична относительно оси OZ. Так как величины потенциалов на оси OZ представляют определенный интерес, то они отдельно табулировались. Отметим, что емкость конденсатора для различных геометрических параметров структуры вычисляем по формуле:

$$C = \frac{a_2}{V_1}\int_0^\theta \psi(t)\cos\frac{t}{2}dt, \tag{9}$$

где $\psi(t)$- решение интегрального уравнения (7). Величина ёмкости С (9) пропорциональна радиусу сферического полого сегмента a_2, обратно пропорциональна величине потенциала V_1 и сложным образом зависит от величины θ_0 раскрыва сферического сегмента. Получено совпадение результатов с известными результатами [2] и с результатами различных предельных случаев. Так например, для случая, когда сфера с круговым отверстием "касается" поверхности конуса (в этом случае она изолирована от конуса непроводящей прокладкой). коэффициенты искомых потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) находятся явным образом и таковы:

$$C_{\nu_n} = R_n a_2^{\nu_n+1}, \quad A_{\nu_n} = B_{\nu_n} = 0,$$

$$R_n = \frac{V_1}{(2\nu_n+1)}[(P_{\nu_n+1}(1) - P_{\nu_n-1}(1)) - (P_{\nu_n+1}(\cos\gamma) - P_{\nu_n-1}(\cos\gamma))].$$

Проверочным вариантом являлся и выбор угла раскрыва сегмента $\theta_0 = 0$ (сегмент исчезает). В этом варианте коэффициенты потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$

имеют нулевые значения: $A_{\nu_n} = B_{\nu_n} = C_{\nu_n} = 0$. Тестовыми примерами также служат задачи, имеющие самостоятельный интерес. Так, для случая, когда угол раскрыва конуса γ достигает значения 90 градусов (конус переходит в плоскость), наша задача эквивалентна задаче для разрезного (двух пластинчатого) сферического конденсатора с концентрическим шаровым включением. Заметим, что эта задача может быть сведена как к решению вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма II рода, так и линейных алгебраических к решению вспомогательной бесконечной системы уравнений II рода с вполне непрерывным матричным оператором в некотором энергетическом пространстве [3], [7]. Отметим, что в этом случае ядро получаемого интегрального уравнения типа (7), (8) не будет содержать интегрального слагаемого и вместе с тем будет непрерывным при $(x,t) \in [0,\theta_0]\,\mathrm{x}[0,\theta_0]$.

5. Выводы.

Построен, проанализирован и применен впервые алгоритм для вычисления основных характеристик электростатического потенциала сложной структуры, обладающей осевой симметрией и состоящей из сферического сегмента, бесконечного (однополостного) конуса с шаровым закруглением в неограниченной области. Показано совпадение результатов с известными частными случаями постановки рассматриваемой задачи. Обсуждаемая в работе задача может быть обобщена. Например, интересным её обобщением является выбор закругления шарового конуса многослойным. Естественным шагом в обобщении задачи и изучении свойств полей при наличии такой структуры является, в частности, построение функций Грина точечных и распределенных источников в сфероконических областях и развитие метода решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziolkowski and Kipple A.D. Application on Double Negative Materials to Increase the Power by Electrically Small Antennas. //IEEE Transaction on Antenna and Propagation. vol. 51, №10, p.2626-2640, oct.2003.
2. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. //Письма в Журн. Техн. Физ.-1938. Т.№ 6058, 10-11.С.1193-1206.
3. Вайнштейн Л.А.Электромагнитные волны.-М.:Радио и связь,-1988.-440 с.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.2.-М.:Мир,- 1978.-555 с.
5. Уфлянд Я. С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов. // Письма в Журн. Тех. Физ. – 1976. - Т.2, 17. - С.794-798.
6. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием.// ЖВМ и МФ. Т.17, 2.-1977.- С.394-406.
7. Литвиненко Л. Н., Сальникова Л.П. Численное исследование электростатических полей в периодических структурах.– Киев: Наукова думка,-1986. -159 с.

8. Вязьмитинов А. И., Вязьмитинова С. С., Резуненко В. А. Расчет потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом. // Радиотехника. Изд. ХГУ. – 1990. -Т. 89 . - С. 130-133
9. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. О симметричном электромагнитном облучении конечного конуса. //Радиофизика и радиоастрономия.-2000.-Т.35,4.-С.29-37.
10. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции.– Харьков: Основа, - 1997. – 284 с.
11. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ,1973. – 288 с.
12. Марченко В. А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения.- Киев: Наукова Думка,-1977.- 362 с.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.:Наука,-1973.-736 с.
14. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова Думка,-1986.-543 с.
15. Варяница Л.А., Резуненко В.А. Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах. //Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". №542, випуск 51, - 2002, с.59-68.
16. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985 - 334 с.