Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 605, 2003, с.132-139

УДК 519.6

Исследование динамики рекуррентных нечетких моделей Такаги-Сугено

А. Ю. Соколов, А. Р. Емад, О. В. Яровая
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

In processing of heuristic (linguistic) knowledge fuzzy rules has been established. Particularly, models of Takagi-Sugeno type have became popular due to their lucidity and flexibility allowing the construction of structured crisp and fuzzy models in fuzzy ranges, what is a typical task in simulation and modeling of technological processes. By the application of this method to dynamical processes the evolved models can be interpreted as crisp respectively fuzzy recurrent difference equations. So the problems of chaotic behavior appears in this evolving time series, i.e. how the dynamic behavior of the underlying technological process is constitutionally to be estimated. The target aim is to demonstrate, in which structures or parameter combinations Takagi-Sugeno models feature chaotic behavior (e.g. in terms of Li and Yorke (1975)). Furthermore analysis are necessary, in with way these models are strongly initial value dependent, which in terms of stability undesirably.

1. Постановка задачи и её актуальность

В математике хорошо известны аппроксимационные свойства модели Такаги-Сугено (ТС). В настоящем исследовании мы рассматриваем свойства динамических моделей ТС нулевого порядка, определяющие их хаотическое поведение.

Работа опирается на следующие определения хаоса.

Исторически Ли и Йорке первыми дали определение хаоса [1]. Они рассматривали отображение $f : I \to I$ (где I - единичный интервал) типа

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{1}$$

Определение 1. (Ли и Йорке) [2]. *Отображение $f : I \to I$ является* ***хаотическим****, если*

(I) Существует положительное число K (K=1 в[2]), такое, что итерационная схема (1) имеет цикл периода k для любого $k > K$;

(II) Итеративная схема (1) имеет такое «неустойчивое» множество (scrambled set) $S \subset I$, которое является несчетным и не содержит циклических точек в f, а также обладает свойствами:

(a) $f(S) \subset S$,

(b) для каждого $x_0, y_0 \in S$ при $x_0 \neq y_0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > 0$$

(c) для каждого $x_0 \in S$ и циклической точки y_0 для f

$$\limsup_{n\to\infty} \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > 0;$$

(III) Существует несчетное подмножество $S_0 \subset S$ *такое, что для всех* $x_0, y_0 \in S$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| = 0.$$

Теорема 1. (Ли и Йорке) [1]. *Если функция* $f : I \to I$ *является непрерывной на компакте I, и существует такая точка* $a \in I$, *для которой выполняется* $f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a)$ *(либо* $f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a)$*), тогда f имеет цикл длиной три и является хаотическим отображением..*

Следующая теорема определяет достаточные условия существования хаоса в Банаховом пространстве.

Теорема 2. (Клоеден) [2]. *Пусть* $f : I \to I$ *- непрерывное отображение Банахового пространства I в себя и пусть существуют непустые компактные подмножества A и B из I, а также целые числа* $n_1, n_2 \ge 1$ *такие, что*

(i) *A гомеоморфно выпуклому подмножеству из I,*

(ii) $A \subseteq f(A)$,

(iii) *f является расширяющимся отображением на A, то есть существует такая константа* $\lambda > 1$, *что*

$$\lambda \|x - y\| \le \|f(x) - f(y)\|$$

для всех $x, y \in A$,

(iv) $B \subset A$,

(v) $f^{n_1}(B) \cap A = \varnothing$,

(vi) $A \subseteq f^{n_1+n_2}(B)$,

(vii) $f^{n_1+n_2}$ *инъективно на B (один-к-одному).*

Тогда отображение f хаотично в смысле определения 1 (при условии, что I – Банаховое пространство).

В первую очередь необходимо выяснить:

- могут ли нечеткие рекуррентные модели быть хаотичными?
- какие условия необходимы для появления хаоса?
- как распознать хаотичное поведение по структуре модели ТС?

Динамику модели Такаги-Сугено 0-го порядка в скалярном случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&R_1\text{: If } x_k = L_1 \text{ then } x_{k+1} = A_1,\\
&R_2\text{: If } x_k = L_2 \text{ then } x_{k+1} = A_2,\\
&\ldots\\
&R_N\text{: If } x_k = L_N \text{ then } x_{k+1} = A_N,
\end{aligned} \tag{2}$$

R_N: *If* $x_k = L_N$ *then* $x_{k+1} = A_N$,

где L_i – лингвистические переменные (термы), A_i – числовые коэффициенты.

В современных исследованиях моделей ТС превалируют следующие наиболее общие ограничения:

1. Полная база знаний (2),
2. Непротиворечивый набор правил,
3. Одношаговая временная задержка,
4. Скалярное отображение – SISO.

Функции принадлежности лингвистических термов обладают, как правило, следующими ограничениями:

1. Ограниченность $\mu(x) \in [0,1], x \in X$.

2. Выпуклость $\mu(x)$ с возрастающей (убывающей) ветвью для $x > (<) s^x$ - центры функций принадлежности.

3. Разделение $\sum_j \mu_j(x_i) > 0, x_i \in X_i$.

4. Обратное соответствие $\mu_i(s_j) = 0, i \neq j$.

Переходная функция отображения (2) может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x) \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x)}$$

либо с учетом приведенных выше ограничений для полной базы знаний

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x) \cdot A_i .$$

Тогда можно исследовать орбиты

$$x_{k+n} = f^n(x_k) = f(f(f\ldots(x_k))). \qquad (3)$$

При условии $A_i \in \{L_1, L_2, \ldots, L_N\}$ (модель Мамдани) рекуррентная нечеткая система может рассматриваться как лингвистический автомат, в котором *L(0),L(1),...L(k),L(k+1),...*- лингвистическая орбита, где *L(i)* – лингвистическая переменная нечеткой модели. Последовательность *s(0),s(1),...s(k),s(k+1)* центров соответствующих функций принадлежности можно также рассматривать как дефаззифицированную орбиту. Известна следующая теорема.

Теорема 3. *Если одномерная непрерывная рекуррентная нечеткая система имеет лингвистическую орбиту L(0), L(1),...L(n), ..., а лингвистические значения удовлетворяют цепному неравенству*

$$L(n) \geq L(0) > L(1) > L(2) \text{ либо } L(n) \leq L(0) < L(1) < L(2),$$

тогда эта рекуррентная нечеткая система будет хаотичной по Ли-Йорке в окрестности соответствующих орбит центров функций принадлежности s(0),s(1),...s(k),s(k+1).

Проблемой остается исследование поведения рекуррентной модели ТС в произвольной точке фазового пространства. Идентификация хаотической динамики для произвольных начальных условий в модели ТС нулевого порядка и является основной задачей исследования в настоящей работе.

В связи с этим актуальными представляются следующие вопросы:

- определить минимальное число правил, которые могут создавать хаос.
- определить зависимости между параметрами модели ТС, определяющие хаотическое поведение.

Настоящая работа опирается на определения хаоса в динамических системах [1,2], которые с различных позиций позволяют исследовать динамические системы – от анализа орбит до теоретико-множественного представления динамики отображений.

2. Минимальное количество правил модели ТС для создания хаоса

Согласно теореме 1 в фазовом пространстве должна существовать, по крайней мере, одна точка a, для которой отображение (2) будет создавать последовательности, удовлетворяющие условию

$$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a) \text{ либо } f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a) \qquad (4)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Минимальное число правил модели ТС 0-го порядка для создания хаоса равно трем.*

Доказательство. В случае одного правила передаточную функцию $f : x_k \to x_{k+1}$ модели (2) согласно общим ограничениям нормировки можно записать в виде

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 \text{ для } \forall x \in X .$$

Поскольку в данном случае $\mu_1(x) = 1$ для $\forall x \in X$, то

$f(x) = A_1$ для $\forall x \in X$ и $x_1 = f(x_o) = x_0$. То есть условия (4) не выполняются.

Для двух правил верно

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 + \mu_2(x) \cdot A_2 \text{ для } \forall x \in X . \qquad (5)$$

Если предположить, что центры функций принадлежности удовлетворяют условиям $0 \le a_1 < a_2 < a_3 \le 1$, то

для $x \in [0, a_1]$: $f(x) = A_1$;

для $x \in [a_2, 1]$: $f(x) = A_2$;

для $x \in [a_1, a_2]$: $f(x) = \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$.

Поскольку отображение (4) -- это монотонная функция, то есть $a \le f(a) \le f^2(a) \le f^3(a)$ либо $a \ge f(a) \ge f^2(a) \ge f^3(a)$ (в зависимости от значений A_1, A_2), следовательно, условия (3) также не удовлетворяются.

В случае трех правил имеем

$$\begin{aligned} &R_1\text{: } If\ x_k = L_1\ then\ x_{k+1} = A_1, \\ &R_2\text{: } If\ x_k = L_2\ then\ x_{k+1} = A_2, \\ &R_3\text{: } If\ x_k = L_3\ then\ x_{k+1} = A_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда

для $x \in [0, a_1]$: $f(x) = A_1$;

для $x \in [a_3, 1]$: $f(x) = A_3$;

для $x \in [a_1, a_2]$: $f(x) = \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$;

для $x \in [a_2, a_3]$: $f(x) = \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \dfrac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3$.

Тогда отображение $f(x)$ является кусочно-линейной функцией и если $A_1 = a_1, A_2 = a_3, A_3 = a_1$, $a_1 = 0, a_2 = 0.5, a_3 = 1$, представляет собой известное отображений тента [2] и, следовательно, является хаотическим.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *База правил (6) с передаточной функцией* $f: I \to I$ *хаотична в смысле Ли-Йорке, если удовлетворяются следующие условия*

(a) $A_1 \in [a_1, a_2]$,

(b) $A_2 = a_3$,

(c) $A_3 \in [a_1, a_2)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 достаточно найти подходящие множества A и B. Очевидно, что f отображает интервал $[a_1, a_3]$ в себя. Пусть $A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $B = [\xi, \psi] \subset A$.

Определим $f(A)$. В соответствии с допущениями (b),(c) теоремы 2 $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} f(a_2 + \varepsilon_1) = a_3$ и $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2)$. Следовательно, $f(A) \subset I$. Более того, f является выпуклым на A. Нетрудно видеть, что для каждого $a \in A$ в соответствии с $f(x) = \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \dfrac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3$ существуют $c = f(a)$ и $a = f^{-1}(c)$ удовлетворяющие условиям (b) и (c) теоремы Клоедена. Легко также видеть, что $A \subseteq f(A)$. Действительно,

$$f(A) = [f(a_3 - \varepsilon_2), f(a_2 + \varepsilon_1)] \subset [A_3, a_3],$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0,\\ \varepsilon_2 \to 0}} f(A) = [A_3, a_3].$$

Далее мы должны доказать, что f является расширяющимся на A, то есть для $\forall x, y \in A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2]$ необходимо найти константу $\lambda > 1$, при которой верно неравенство

$$\lambda \|x - y\| \leq \left\| \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 - \frac{a_3 - y}{a_3 - a_2} \cdot A_2 - \frac{y - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 \right\|.$$

Тогда необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \frac{A_3 - A_2}{a_3 - a_2} \right\| > 1.$$

Когда $A_2 = a_3$ (условие (b)), очевидно, что должно выполняться $A_3 \in [a_1, a_2)$ (условие (c)).

Поскольку $B = [\xi, \psi] \subset A$, достаточно найти $\xi > a_2 + \varepsilon_1$, $\psi \leq a_3 - \varepsilon_2$ и n_1 and n_2 удовлетворяющих условиям

$$f^{n_1}(B) \cap A = \varnothing,$$
$$A \subseteq f^{n_1 + n_2}(B).$$

Для $n_1 = 1$ необходимо, чтобы $f(a) \notin A$ для всех $a \in B$.

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2)$ и $f(\xi) > f(a_3 - \varepsilon_2)$, то в соответствии с условием (a) имеем также $f(\xi) > a_1$. Пусть $\xi = f^{-1}(a_2)$. Следовательно, $B = [f^{-1}(a_2), \psi]$ и $f(B) = [f(\psi), a_2]$. Тогда очевидно, что $f(B) \cap A = \varnothing$. Для $n_2 = 1$ имеем

$$f(f(B)) = [f(f(\psi)), a_3].$$

Для обеспечения $A \subseteq f^{n_1 + n_2}(B)$ необходимо $f(f(\psi)) \leq a_2$. Это значит, что принимая во внимание, что для

$x \in [a_1, a_2]$ $f(x) = \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$

и if $\psi \leq a_3$, $A_3 = a_1$ имеем $A_1 \leq a_2$. Следовательно, условие (a) выполнимо.

и if $\psi \le a_3$, $A_3 = a_1$ имеем $A_1 \le a_2$. Следовательно, условие (a) выполнимо. Очевидно, что $\psi = f^{-2}(a_2)$ является подходящим значением.

И, наконец, $f(f(B))$ является инъективным на B (один-к-одному). Поэтому f является хаотическим в смысле определения 1.

Графическая иллюстрация теоремы 4 приведена на рис. 1.

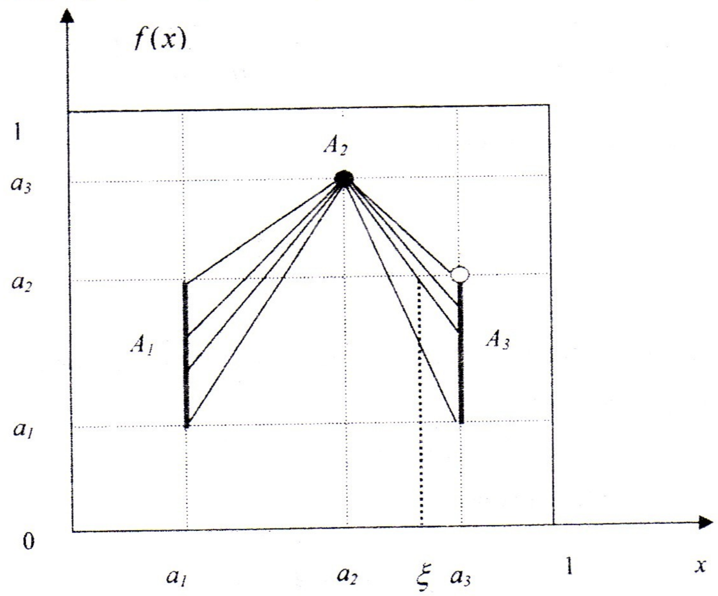

Рис.1. Условия для коэффициентов модели Такаги-Сугено 0 порядка

На рис.2. показана иллюстрация теоретико-множественного представления отображения (6), обладающего хаотической динамикой.

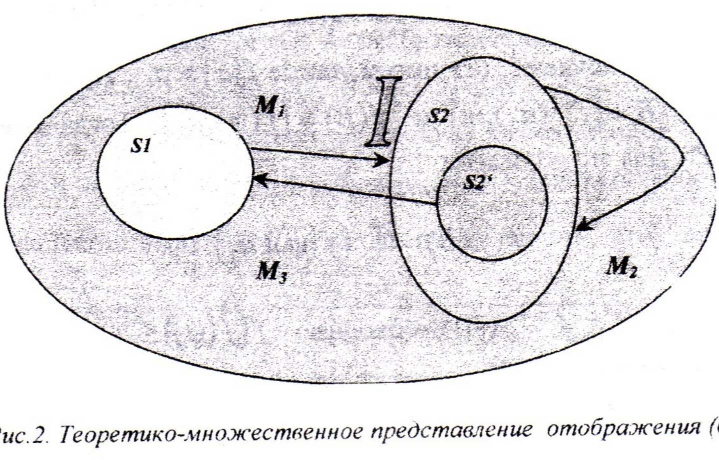

Рис.2. Теоретико-множественное представление отображения (6)

Здесь, $I = [0,1], S_1 = [A_1, a_2],\ S_2 = [a_2, A_3],\ S_2' = (\xi, A_3]$. Легко видеть, что также $S_1 \cup S_2 \subseteq I, S_1 \cap S_2 = \varnothing, S_2' \subset S_2$. Тогда имеет следующие типы отношений из отображения (6)

$M_1 : S_1 \to S_2,\ M_2 : S_2 \to S_2,\ M_3 : S_2' \to S_1$.

3. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предлагаемый в работе подход позволяет определять свойства динамических рекуррентных нечетких моделей Такаги-Сугено 0 порядка, обладающих хаотической динамикой в смысле Ли-Йорке, на основании значений коэффициентов в консеквентах правил, а не на традиционном подходе, базирующемся на исследовании переходных функций. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие методов идентификации хаотической динамики с произвольным количеством правил модели ТС 0 порядка, а также для моделей ТС 1 порядка. Предполагается также исследование в направлении векторных нечетких моделей, и решение задачи анализа временных рядов с помощью продукционных моделей Такаги-Сугено.

ЛИТЕРАТУРА

1. T.Y. Li, J.A. Yorke. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly 82 – 1975 - P.985-992.
2. P.E. Kloeden. . Chaotic iterations of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 42 - 1991- P.37-42.