

## Вычислительный эксперимент на базе численного решения редуцированной СЛАУ-2 для одной периодической структуры

В. В. Хорошун, В. Б. Хохольков

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

Electromagnetic modeling of harmonic grating as degeneration of diffraction strip grating in linear one with period equal wavelength of incident field is carried out. It is shown, that amplitude transmission coefficient of electromagnetic field of such periodic structure has harmonic behavior and in grating spectrum are present only the main and  $\pm 1$  diffraction orders.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Проблема создания эффективных алгоритмов и программ на их основе решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в гиротропных средах (ферриты, плазма), содержащих периодические структуры из элементов различного профиля, имеет важное значение [1,2]. При этом ключевой характер приобретают задачи дифракции на простейших периодических структурах, к числу которых относится и решетка из идеально проводящих проволок нулевого диаметра, т.н. линейная дифракционная решетка (ДР). Ее математическая модель идентична [3, 4] для предельного случая  $d = l$ , когда ленты решетки превращаются в линии.

На линейную решетку периода  $l$  под углом  $\zeta$  падает плоская Е-поляризованная волна. Требуется найти дифракционное поле во всем пространстве, исключая элементы ДР.

### 2. Решение задачи

В принципе, решение исходной задачи можно получить путем предельного перехода из решения задачи для ДР из элементов любого профиля для ДР поперечного сечения, стягивая контур сечения в точку и образуя линейную ДР. Однако не для всех решений такой предельный переход возможен, поскольку при этом часто исчезает сама периодическая структура.

Кратчайшим путем решения проблемы является предельный переход от решетки из вертикальных лент (ножевой ДР) к линейной решетке, когда ширина вертикальных лент ножевой решетки  $h \rightarrow 0$ . Однако в работах по ножевой ДР случай  $h \rightarrow 0$  не рассматривался. Более того, указывалось, что полученные выражения справедливы для  $h > 0$ . Поэтому будем рассматривать исходную задачу для решетки из горизонтальных идеально проводящих лент шириной  $l - d$ , где  $d$ -ширина щели решетки (ленточная ДР).

Воспользуемся результатами, полученными в [4] методом АМШ [3] в виде СЛАУ-2 для расчета спектральных характеристик ленточной решетки, на которую под углом  $\zeta$  падает плоская Е-поляризованная волна

$$\begin{aligned} -b_0 &= i\kappa(b_0 - 1)\cos\zeta W_0^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_n \tilde{\chi}_n W_0^n(u), \quad (m=0), \\ b_m &= i\kappa(b_0 - 1)\cos\zeta W_m^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_n \tilde{\chi}_n W_m^n(u), \quad (m \neq 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$u = \cos \frac{\pi d}{l}, \quad \tilde{\chi}_n = 1 + i\sqrt{\kappa^2/n^2 - [1 + (\kappa/n)\sin\zeta]^2}, \quad (n \neq 0), \quad \kappa = \frac{l}{\lambda}. \quad (2)$$

Для линейной ДР ширина щели  $d=l$ , т.е. коэффициент заполнения  $u=-1$ . Поскольку полиномы Лежандра  $P_n(-1)=(-1)^n$ , то коэффициенты  $W_0^n(-1)=(-1)^n$ , ( $n \neq 0$ ),  $W_m^n(-1)=0$ , ( $m \neq n$ ),  $W_m^m(-1)=1$ ,  $W_{-m}^{-m}(-1)=-1$ ,  $W_0^0(-1) \rightarrow -\infty$ .

Подставляя значения этих коэффициентов в (1), находим значения амплитуд дифракционных спектров.

### 3. Анализ аналитических и численных результатов, полученных методом АМШ [3] и методом СИУ [5]

Прямой подстановкой полученных значений коэффициентов прохождения  $b_n$  в исходную систему сумматорных уравнений [4], убеждаемся, что все они являются ее решениями. При этом распределение электрического поля на щели решетки (характер освещенности щели) для линейной ДР имеет вид

$$E(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \quad \varphi = 2\pi y/l, \quad |y| \leq l/2..$$

Учитывая, что при этом период решетки  $l=\lambda$ , из основного уравнения ДР

$$\sin\alpha_n = \sin\zeta + n\frac{\lambda}{l}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

получаем, что в исследуемом спектре присутствуют только основной и  $\pm 1$ -е порядки дифракции и представлено на рис. 1 в виде амплитудного спектра и лучевой диаграммы для линейной ДР. Методика получения значений  $b_n$  из (1) состоит в нахождении их в нулевом (формула Ламба), первом и втором приближениях при  $\zeta=0$  и в нулевом и первом приближениях в случае наклонного падения. Во всех этих случаях при  $u=-1$  получаем  $b_0=1$  (полное прохождение) и  $b_n=0$  для высших гармоник всюду, кроме точек скольжения гармоник, в которых для  $b_n$  имеет место неопределенность вида 0/0. Для проверки результатов использовались системы уравнений, полученные в [5], а

также результаты работы [6]. Т.о. доказано, что линейная ДР полностью прозрачна для Е-поляризованных волн, исключая режимы скольжения высших гармоник, которые носят характер поверхностных волн. В случае Н-поляризации падающая волна «не замечает» решетки.

**4. Решение задачи модифицированным методом перерасложения (ММП)**

Представим математическую модель исходной задачи как итог двойного предельного перехода ( $h=0, d=l$ ) от ДР из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения к линейной решетке.

$$(M) \sum_n b_n e^{i h_n y} = 0, \tag{3}$$

$$(II) \sum_n b_n e^{i h_n y} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin \frac{\pi m}{d} \left( y + \frac{d}{2} \right), \tag{4}$$

$$(III) \sum_n b_n \gamma_n e^{i h_n y} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m (d_m - c_m) \sin \frac{\pi m}{d} \left( y + \frac{d}{2} \right), \tag{5}$$

$$\text{где } \gamma_n = \frac{2\pi}{l} |n| \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} - \left( 1 + \frac{\kappa}{n} \sin \zeta \right)^2}, \quad q_m = \frac{\pi m}{d} \sqrt{\frac{\tau^2}{m^2} - 1}, \quad \tau = \frac{2d}{\lambda},$$

а остальные обозначения соответствуют [4].

Из уравнений (3) и (4) следует прямая пересчетная формула (ППФ) - (уравнение связи)

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} m (c_m + d_m) B_n^m(\tau_n), \quad \text{где } B_n^m(\tau_n) = \frac{e^{i\tau_n} - (-1)^m e^{-i\tau_n}}{\left( \frac{\pi m}{2} \right)^2 - \tau_n^2}, \quad \tau_n = \pi(n + \nu). \tag{6}$$

Из уравнения (4) получаем обратную пересчетную формулу (ОПФ)

$$x_m = \frac{\pi m}{2} \sum_n b_n B_n^m(-\tau_n), \quad x_m = c_m + d_m, \quad (m=1, 2, \dots) \tag{7}$$

Трансформируя уравнение (5) к виду

$$(III) \sum_{n \neq 0} b_n |n| \eta_n e^{i h_n y} = \kappa (1 - b_0) \cos \zeta, \tag{8}$$

и исключая из него  $b_n$  посредством (6), получаем СЛАУ-1 для определения неизвестных  $x_m$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x_m c_{ms} = \frac{4\kappa}{\pi} B_0^s(-\tau_0) \cos \zeta, \quad (s=1, 2, \dots) \quad (9)$$

где

$$c_{ms} = -i\kappa \cos \zeta B_0^m(\tau_0) B_0^s(-\tau_0) + \sum_{n \neq 0} |n| B_n^m(\tau_n) B_n^s(-\tau_n) - \sum_{n \neq 0} |n| \tilde{\chi}_n B_n^m(\tau_n) B_n^s(-\tau_n), \quad (10)$$

а параметр малости  $\tilde{\chi}_n$  определен выражением (2).

Результаты расчетов СЛАНУ-1 в виде (8) показали, что в случае нормального падения плоской Е-поляризованной волны на линейную решетку ее амплитудный спектр содержит нулевую и первые парные гармоники, что совпадает с результатами [6].

Для случая наклонного падения Е-поляризованной волны на линейную решетку из системы уравнений (8) получаем численные значения, подтверждающие правильность выражений (3) – (4).

### 5. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

На рис. 1 приведены амплитудный спектр и лучевая диаграмма линейной решетки для случая нормального падения ( $\zeta=0$ ) на нее плоской Е-поляризованной волны, длина которой равна половине периода решетки. Из рисунка видно, что в спектре, кроме основной, присутствуют только вторые парные гармоники, с амплитудами, равными 0.5. Из лучевой диаграммы следует, что направления распространения этих гармоник перпендикулярны образующим элементов решетки и лежат в плоскости решетки (случай скольжения гармоник).

Для случая нормального падения ( $\zeta = 0$ ) в точках скольжения  $n$ -тых парных гармоник ( $\kappa_n = |n|$ ) имеем

$$b_0 = 1, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}, \quad (n \neq 0).$$

Аналогичные результаты получены в [6] для решетки из тонких проволок.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для наклонного падения ( $\zeta=40$ ) плоской Е-поляризованной волны для случая, когда в режиме скольжения находится  $-1$ -я гармоника. Основная гармоника при этом полностью проходит через решетку. В случае наклонного падения точки скольжения гармоник определяются по формуле

$$\kappa_n = \frac{|n|}{1 - \text{sign}(n) \sin \zeta},$$

где  $\text{sign}(n) = \frac{|n|}{n}$  - знаковая функция.

Для коэффициентов прохождения  $b_n$  в режиме моноскольжения имеем

$$b_0 = 1, \quad b_n = -(-1)^{-n} \quad n \neq 0$$

На рис. 3 представлена аналогичная ситуация для +1-й гармоники дифракционного спектра.

На рис. 4 показан режим бискольжения (двойного скольжения) -2-й и +1-й гармоник. Попрежнему отсутствует отражение волны от решетки, т.е. имеет место полное прохождение волны через решетку. Значения амплитуд дифракционных спектров определяются по формулам:

$$b_0 = 1, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{|k|}{n + |k|}, \quad b_{-k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{n}{n + |k|},$$

где  $n$  и  $k$  - номера соответственно положительных и отрицательных гармоник, которые одновременно находятся в режиме скольжения, распространяясь в противоположных направлениях поперек лент решетки. Точки скольжения в этом режиме легко определяются, а именно:

$$\kappa_{n>0} = \kappa_{k<0} = \frac{n + |k|}{2}.$$

Значение угла падения  $\zeta$ , соответствующего режиму бискольжения гармоник, определяется по формуле

$$\zeta = \arcsin \frac{|k| - n}{|k| + n}, \quad |k| \geq n.$$

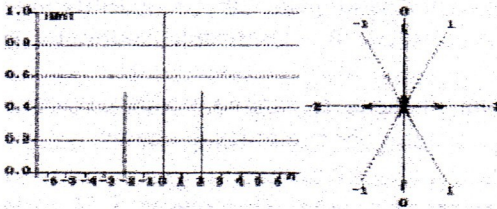


Рис. 1. Амплитудный спектр и лучевая диаграмма линейной ДР ( $\zeta=0$ ,  $\kappa=2$ ).

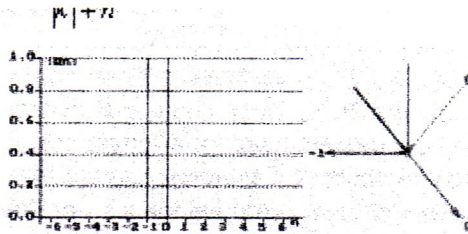


Рис. 2. Режим скольжения для -1-й гармоники ( $\zeta=40$ ,  $\kappa=0.608$ ).

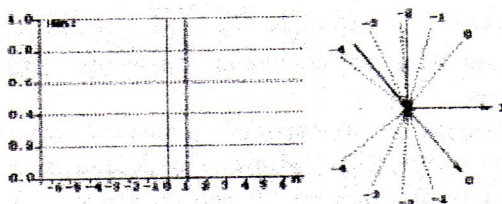


Рис. 3. Режим скольжения для +1-й гармоники ( $\zeta=40$ ,  $\kappa=2.800$ ).

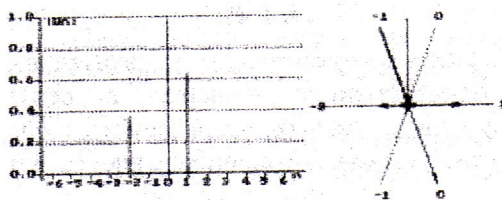


Рис. 4. Режим бискольжения для -2-й и +1-й гармоник ( $\zeta=19.471$ ,  $\kappa=1.5$ ).

#### 6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований.

Рассмотрены дифракционные спектры линейной ДР, для которой имеют место полное прохождение основной волны и режимы моно- и двойного скольжения для высших гармоник.

Анализ спектров щелевой решетки (дополнительной к линейной ДР), при возбуждении ее плоской Н-поляризованной волной проводится аналогичным образом.

Учитывая ключевой характер задачи, необходимо получить ее решение с привлечением аппарата теории обобщенных функций.

Авторы выражают благодарность Жолткевичу Г.Н. за творческое участие в работе и полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жолткевич Г.Н., Хорошун В.В., Хохольков В.Б. Численное моделирование постоянных распространения основной и высших гармоник дифракционного спектра в гиромагнитной среде // Тез.докл.
2. Stroke G.W. Diffraction gratings. - In.: Handbuch der Physik. Berlin, Springer.- 1967.- Bd.29.-P.426-754.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. . Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ, т.32, № 6054, 1962.- С. 381-394.
4. Хорошун В.В. О модификации метода задачи Римана-Гильберта для случая наклонного падения плоской электромагнитной волны на решетку из лент // Вестн. Харьк. Ун-та, Радиофизика и электроника.- 1998.- №405.- С. 137-141.
5. Малин В.В. К теории ленточных решеток конечного периода // Радиотехника и электроника, 1963.- Т. 8, №2, С. 211- 221.
6. Wessel W. Hochfreq. u.Electroakust.- 1939, v.54, N2.