Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.21
№ 605, 2003, с. 151-158

Спектральные разложения одного класса нестационарных случайных последовательностей.

Н. В. Черемская
Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", Украина

For receiving spectrum expansions some classes of nonstationary random sequences Hilbert approach and spectrum theory of not self-adjoint operators are used. These expansions are the superposition of noncorrelation discrete oscillators, but these shares are functional connected between themselves, unlike the stationarity random sequences. Beside the new type of spectrum expansions, which are the superposition of nonstationarity condition of discrete strings is appended.

Введение. Спектральные разложения случайных функций являются основой для прикладного анализа случайных процессов и последовательностей, т.к. представляют собой суперпозицию внутренних состояний гармонических осцилляторов с вещественными частотами [1]. В случае, когда условие стационарности (в широком смысле) нарушается, построение спектральной теории нестационарных случайных функций наталкивается на существенные трудности. По-видимому, построение общей теории вряд ли осуществимо. Поэтому более логичным является путь, когда выделяются некоторые классы нестационарных случайных функций. А.Н.Колмогоров в своих работах [2,3] впервые использовал спектральную теорию самосопряженных или унитарных операторов для построения спектральной теории стационарных случайных процессов или стационарных случайных последовательностей.

Постановка задачи. Построение спектральной теории нестационарных случайных последовательностей естественно теперь уже требует использования спектральной теории несамосопряженных или квазиунитарных операторов [4,5,6].

В данной работе предложен метод получения спектральных разложений нестационарных случайных последовательностей, у которых при вложении в гильбертово пространство соответствующая последовательность в этом пространстве имеет представление $x_n = A^n x_0$.

Решение задачи. Если A - самосопряженный ограниченный оператор, то корреляционная функция, которую можно вычислить как соответствующее скалярное произведение [7], зависит от суммы аргументов (ганкелева случайная последовательность). Для такой последовательности легко получить спектральное представление вида: $\xi_n = \int\limits_a^b \lambda^n dZ(\lambda)$, где $Z(\lambda)$-стандартный случайный процесс с некоррелированными приращениями.

Если последовательность неганкелева, но $\dim \overline{\operatorname{Im} AH} < \infty$, то для получения спектрального разложения можно привлечь методы теории несамосопряженных операторов и ассоциированных открытых систем [7]. Тройку $\left(H, A \in [H, H], \xi_0 \in H\right)$ будем называть операторным представлением случайной последовательности (т.е. в соответствующем гильбертовом пространстве последовательность имеет представление $x(n) = A^n x_0$).

Пусть теперь спектр оператора A дискретный и лежит в верхней комплексной полуплоскости. Введем подпространство гильбертова пространства H $E = \overline{\operatorname{Im} AH}$, пусть $\dim E = r < \infty$. Рассмотрим две последовательности некоррелированных случайных величин $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{a_k\}_{\alpha=1}^{r}$ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями ($Mz_k \overline{z}_j = \delta_{kj}$, $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Рассмотрим совокупность детерминированных функций $\psi_k(n)$, которая удовлетворяет системе разностных уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
& i\psi_k(n+1) + \lambda_k \psi_k(n) = \sum_{\alpha=1}^{r} u_k^{(\alpha)}(n) \sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k}, \\
& \psi_k(n)\big|_{n=0} = \psi_k(0), \\
& u_{k+1}^{(\alpha)}(n) = u_k^{(\alpha)}(n) - i\sqrt{\omega_\alpha} Ma_\alpha \overline{z_k} \psi_k(n), \\
& u_k^{(\alpha)}(n)\big|_{k=0} = 0, \quad u_k^{(\alpha)}(n) = Mu_k(n)\overline{a_\alpha},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где λ_k - собственные числа оператора A, а ω_α - собственные числа оператора $2JmA$.

Теорема 1.

Если $x(n,\omega)$ нестационарная случайная последовательность, которая имеет операторное представление в соответствующем гильбертовом пространстве вида $x(n) = A^n x_0$, то справедливо представление:

$$
x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n) z_k, \tag{2}
$$

где $\psi_k(n)$ находится из системы (1).

Доказательство.

Включим A в операторный комплекс $K = \left(A, H, g_1, \ldots, g_r, J = I\right)$. Тогда [7] комплекс K можно представить в виде сцепления операторных комплексов $K_m^{\perp}$

где $K_m^{\perp}$ - проекция комплекса K на подпространство $H_m^{\perp} = H_{m-1} \ominus H_m$, где $H_m = H \ominus H_m^{\perp}$, а H_m^* - возрастающая система конечномерных инвариантных подпространств $H_0^* = 0 \subset H_1^* \subset H_2^* \subset \ldots$ такая, что $\dim(H_{m+1}^* \ominus H_m^*) = 1$ и $\lim\limits_{m\to\infty} H_m^* = H$. Комплекс $K_m^{\perp}$ имеет структуру $K_m^{\perp} = P_m^{\perp} H = \left(A_m^{\perp}, H_m^{\perp}, g_1^{(m)}, \ldots, g_r^{(m)}, I\right)$, $A_m^{\perp} h_m = \lambda_m h_m$, $g_\alpha^{(m)} = P_m^{\perp} g_\alpha = \langle g_\alpha, z_m \rangle z_m$. $P_m^{\perp}$ - проекция на подпространство $H_m^{\perp} = H_{m-1} \ominus H_m$, где $H_m = H - H_m^*$.

Обозначим $z_m(n) = \psi_m(n) z_m$. Имеем для открытой системы, ассоциированной с комплексом K_m,

$$\psi_m(n+1) + i\lambda_m \psi_m(n) = -i\sum_{\alpha=1}^{r} u_{\alpha,m}(n)\langle g_\alpha, z_m\rangle,$$

$$\psi_m\big|_{n=0} = \psi_{m,0},$$

$$v_{\alpha,m}(n) = u_{\alpha,m}(n) - i\langle \overline{g_\alpha, z_m}\rangle \psi_m(n).$$

Тогда, используя результаты работы по сцеплению операторных комплексов [4], получаем все утверждения теоремы, учитывая, что g_α можно выбрать в виде $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|}\, a_\alpha$, где $|\omega_\alpha|$ - собственные числа оператора $2JmA$. Рассматривая $2JmA = B$, $B = B^*$ и выбирая базисом собственные векторы a_α оператора B, имеем:

$$Bu = B\left(\sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha a_\alpha\right).$$

Т.к., $\omega_\alpha = sign\omega_a |\omega_\alpha|$ получаем

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \langle \cdot, a_\alpha\rangle B a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \omega_\alpha \langle \cdot, a_\alpha\rangle a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} \mathrm{E}_\alpha \langle \cdot, g_\alpha\rangle_{g_\alpha}.$$

Итак,

$$g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|}\, a_\alpha,$$

$$\omega_1, \ldots, \omega_p > 0,$$

$$\omega_{p+1}, \ldots, \omega_r < 0.$$

Учитывая, что элементами гильбертова пространств H и E являются случайные величины, а ортогональность эквивалентна некоррелированности, получаем утверждения теоремы.

Замечание.

Из результатов работ [8,9] легко получить следующие необходимые и достаточные условия операторного представления случайной последовательности.

Для того чтобы случайная последовательность $x(n,\omega)$ имела операторное представление в гильбертовом пространстве $H_x = \overline{\bigvee_n x(n,\omega)}$ необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция удовлетворяла следующему условию

$$\left|\sum_{n,m} K(n+1,m)a_n\overline{a_m}\right|^2 \le \sum_{n,m=1}^{\infty} K(n,m)a_n\overline{a_m}\sum_{n,m=1}^{\infty} K(n,m)b_n\overline{b_m}$$

Пусть теперь в соответствующем операторном представлении оператор A имеет бесконечнократный спектр в нуле и конечномерное неэрмитово подпространство (вольтерров диссипативный оператор).

Включим A в комплекс $\tilde{K} = \left(\tilde{A}, \tilde{H}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r, I\right)$, где $\tilde{g}_\alpha = \sqrt{\omega_\alpha}a_\alpha \left(\alpha = \overline{1,r}\right)$ $Ma_\alpha\overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, тогда по теореме 8.3 [7] комплекс $\tilde{K}$ является унитарно эквивалентным комплексу $K = \left(A, L^2_{[0,l]}, g_1(x), \dots, g_r(x), I\right)$, где

$$Af(x) = i\int_0^x f(y)\overline{g(y)}g(y)\,dy, \qquad 0 \le x \le l, \qquad f(x) \in L^2_{[0,l]},$$

$$g(x) = \left(\theta_1(x), \dots, \theta_r(x)\right),$$

$$\int_0^l g(x)\overline{g(x)}dx = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_r \end{pmatrix},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left|\theta_\alpha(x)\right|^2 \equiv 1, \qquad (0 \le x \le l).$$

Введем функцию $Z_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x' \le x \le x \\ 0, & x \notin [x', x''] \end{cases}$, где $\Delta = [x', x'']$ $(0 \le x' < x'' \le l)$.

$\langle Z_{\Delta 1}, Z_{\Delta 2}\rangle = d\langle \Delta_1 \cap \Delta_2\rangle$, где d – длина интервала $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Тогда g_α и $f(x)$ как элементы гильбертова пространства $L^2_{[0,l]}$ можно представить в виде

$$g_\alpha = \int_0^l \theta_\alpha(x)\,dZ_{[0,x]},$$

$$f = \int_0^l f(x)\,dZ_{[0,x]}.$$

Уравнения открытой системы, ассоциированной с комплексом, принимает вид:

$$f(n+1,x)-i\left(i\int_0^x f(n,y)\sum_{\alpha=1}^r \overline{\theta_\alpha(y)}\theta_\alpha(x)\,dy\right)=-i\sum_{\alpha=1}^r u_\alpha(n)\theta_\alpha(x),$$

$$f(n,x)\big|_{n=0}=f_0(x),$$

$$v_\alpha(n)=u_\alpha(n)-i\int_0^l f(n,y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy,$$

$$f(n+1,x)=-i\sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x)\left[u_\alpha(n)-i\int_0^x f(n,y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy\right].$$

Таким образом,

$$f(n+1,x)=-i\sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x)u_\alpha(n,x), \tag{3}$$

где

$$u_a(n,x)=u_\alpha(n)-i\int_0^x f(n,y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy,$$

$$u_\alpha(n,x)\big|_{x=0}=0,$$

$$\frac{du_\alpha(n,x)}{dx}=-if(n,x)\overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Т.к. $\tilde{A}=\bigcup A\bigcup^{-1}$, где $\bigcup$ - унитарный оператор, отображающий $L^2_{[0,l]}$ на H, и полагая $Z_x=Uz_{[0,x]}$ получаем теорему.

Теорема 2.

Для каждой последовательности $x_n=A^n x_0$ конечного квазиранга, где A вполне несамосопряженный оператор со спектром в нуле, существует спектральная мера $z_x(0\le x\le l)$ и множество функций $\theta_\alpha(x)\left(\alpha=\overline{1,r}\right)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$\langle\Delta_1 z,\Delta_2 z\rangle=\rho(\Delta_1\cap\Delta_2)$, *где* $\Delta_k z(k=1,2)$ - *приращения* z_k *соответственно на интервалах* Δ_k, $\rho(\Delta_1\cap\Delta_2)$ - *длина общей части интервалов* Δ_k*;*

$$\sum_{\alpha=1}^r|\theta_\alpha(x)|^2\equiv1 \qquad (0\le x\le l);$$

3) $\displaystyle\int_0^l\theta_a(x)\overline{\theta_\beta(x)}dx=\omega_\alpha\delta_{\alpha\beta},$

а последовательность x_n можно представить в виде:

$$x_n=\int_0^l f(n,x)\,dz_x, \tag{4}$$

где функция $f(n,x)$ находится из системы уравнений (3)

Т.к., $W(n,m)=i\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\varphi_\alpha(n)J_{\alpha\beta}\overline{\varphi_\beta(m)}=i\sum_{\alpha=1}^{r}\mathrm{E}_\alpha\varphi_\alpha(n)\overline{\varphi_\beta(m)}$, где

$$\mathrm{E}_\alpha=\begin{cases}1,\alpha=\overline{1,p}\\-1,\alpha=\overline{p+1,r}\end{cases}$$

и $\varphi_\alpha(n)=\left\langle A^n x_0,\tilde{g}_\alpha\right\rangle_H=\int_0^l f(n,x)\overline{g_\alpha(x)}dx$, то в данном случае $g_\alpha(x)=\theta_\alpha(x)$ и

$$f(n,x)=-i\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_\alpha(x)u_\alpha(n-1,x).$$

Положив $u_\alpha(n)=0$ и $x=l$, получаем, что $\varphi_\alpha(n)=iu_\alpha(n-1,l)$,

$$\begin{aligned}&f(n+1,x)=-i\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_\alpha(x)u_\alpha(n,x),\\&u_\alpha(n,x)=u_\alpha(n)-i\int_0^x f(n,y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy,\\&u_\alpha(n)\equiv 0,\qquad f(n,y)\big|_{n=0}=f_0(y),\qquad ,\\&\frac{du_\alpha(n+1,x)}{dx}=-if(n+1,x)\theta_\alpha(x),\\&\frac{du_\alpha(n+1,x)}{dx}=-\sum_{\beta=1}^{r}\theta_\beta(x)u_\beta(n,x)\overline{\theta_\alpha(x)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Таким образом, $W(n,m)$ можно представить в виде $W(n,m)=i\sum_{\alpha=1}^{r}\mathrm{E}_\alpha u_\alpha(l,m)\overline{u_\alpha(l,m)}$, где $u_\alpha(x,n)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных разностных уравнений

$$\frac{du_\alpha(n+1,x)}{dx}+\sum_{\beta=1}^{r}\theta_\beta(x)u_\beta(n,x)\overline{\theta_\alpha(x)}=0,$$

$$u_\alpha(0,n)=0,$$

$$u_\alpha(x,0)=-i\int_0^x f_0(y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy,$$

а $f_0(x)$ - начальный элемент последовательности $f(n,x)=A^n f_0(x)$ в гильбертовом пространстве $L^2_{[0,l]}$. Решение этой системы позволяет найти функцию $f(n,x)$ в спектральном разложении $x_n=\int\limits_0^l f(n,x)dZ_x$ по формуле:

$$f(n,x)=i\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{du_\alpha(n,x)}{dx}\theta_\alpha(x).$$

Эту формулу легко получить, используя условие $\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\left|\theta_\alpha(x)\right|^2=1$ и уравнения

$$u_\alpha(n,x)=-i\int\limits_0^x f(n,y)\overline{\theta_\alpha(y)}dy.$$

Основные результаты. Таким образом, спектральная теория несамосопряженных операторов позволила для нестационарных случайных последовательностей, которые допускают операторные представления получить спектральные разложения.

Эти представления являются аналогом спектральных разложений стационарных случайных последовательностей, которые представляют собой суперпозицию состояний дискретных осцилляторов, амплитуды которых некоррелированы между собой и не связаны функционально. А в нестационарном случае для дискретного спектра получается суперпозиция внутренних состояний дискретных осцилляторов с частотами, лежащими в верхней полуплоскости, причем, как и в стационарном случае амплитуды некоррелированы, но уже функционально связаны реккурентным соотношением. Кроме того, появляются принципиально новые типы спектральных разложений, когда последовательность представляется в виде суперпозиции внутренних состояний дискретных струн.

Используя операцию сцепления операторных комплексов и операторных систем, ассоциированных с операторными комплексами, можно получать спектральные разложения общего вида (когда спектр нестационарной случайной последовательности расположен в конечной части комплексной полуплоскости или расположен на конечном интервале вещественной оси, каждая точка которого является точкой спектра бесконечной кратности).

Аналогичный подход может быть использован при построении дискретных случайных полей, для которых соответствующая последовательность в гильбертовом пространстве имеет вид $x(n,p)=A_1^n A_2^p x_0$, где A_j - ограниченные дважды перестановочные несамосопряженные операторы. Используя спектральную теорию операторов [10], для $x(n,p)$ можно получить представления вида $x(n,p)=\int\limits_D f(n;\lambda;p;\mu)\xi(d\lambda;d\mu)$, где $\xi(\Delta)$ стандартная стохастическая мера, определенная на прямоугольниках $\Delta\subseteq D$ $D=[a;b]\times[c;d]$ $M\xi(\Delta_1;\Delta_2)=S(\Delta_1\cap\Delta_2)$, где $S(\Delta_1\cap\Delta_2)$

площадь прямоугольников $\left(\Delta_1 \bigcap \Delta_2\right)$. Функция $f\left(n;\lambda;p;\mu\right)$ находится из системы дифференциально-разностных уравнений аналогичной системе (4), а $A_1 f\left(u;v\right) = i\int\limits_0^u f\left(\tau_1;v\right)d\tau_1;\quad A_2 f\left(u;v\right) = i\int\limits_0^v f\left(u;\tau_2\right)d\tau_2$.

В случае, когда у диссипативных операторов A_1 и A_2 с дискретным спектром имеется общая цепочка инвариантных подпространств, то для $x\left(n,p\right)$ можно получить представление вида: $x\left(n,p\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi_k\left(n,p\right)z_k\left(\omega\right)$, где некоррелированные случайные величины, а $\psi_k\left(n,p\right)$ находятся из системы разностных уравнений вида (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов //М.,1977, 654с.
2. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений//ДАН СССР, 1940, т.26, № I.
3. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые интересные кривые в гильбертовом пространстве.//ДАН СССР,1940,т.26,№2.
4. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. //М., Наука, 1966, 298с.
5. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов // М.: Наука, 1969. - 287с.
6. Kuzhel A. Characteristic Functions and Models of Nonself - Adjoint Operators. // Kluwer Academic Publishers, Dokdnecht, Boston, London, 1996, 267p.
7. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах //Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, 160с.
8. Янцевич А.А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве I. Корреляционная теория. // теория функций, функциональный анализ и приложения: сборник. - Харьков. - 1986. - Вып. 45. - С.139-141.
9. Маркус А.Г., Цекановский Э.Р., Янцевич А.А. Линейно представимые решения дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.// Математические методы кибернетики: сборник. - Киев. - 1980. - С.28-38.
10. Золотарев В.А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. ДАН Арм.ССР, XII, № 3, 136-140.]