

## Математическая модель пьезоэлектрического резонатора с односторонне-выпуклой пластиной эллипсоидального типа

А. Ю. Шмалый

*Украинская Инженерно-Педагогическая Академия, Харьков, Украина*

The report addresses the mathematical model of a piezoelectric resonator with a one-side convex plate of an ellipsoidal shape. Space anisotropy is taken into account of quartz. In this model, we assume that the ellipse's focuses are not obligatory placed on the rotated axes. We show that such a disagreement strongly influences the frequency spectrum of the resonator eigenvibrations. The relations are derived to calculate the frequency spectrum and amplitudes of piezoelectric vibrations.

### 1. Введение.

Использование кварцевых резонаторов как основных элементов стабилизации частоты привело к необходимости исследования собственных колебаний пьезоэлектрических резонаторов. В частности, в прецизионных источниках колебаний основное применение нашли кварцевые резонаторы колебаний сдвига по толщине. Последние изготавливаются в виде тонких пьезоэлектрических пластин с одно- или двухсторонней кривизной и, чаще всего, с двухсторонне расположенными электродами.

Первая математическая теория колебаний тонких пьезоэлектрических пластин была предложена Миндлином в 50-х годах [1]. В дальнейшем она была развита в трудах Тирстена [2] и ряда других авторов ([3-6]). Основываясь на теории колебаний тонких пластин, в первую очередь были изучены кристаллические резонаторы с выпуклой сферической поверхностью (см.[2-4]). В дальнейшем теория была распространена на эллипсоидальную поверхность [5,6]. Следует, однако, отметить, что, несмотря на фундаментальность исходных уравнений, теория Тирстена развита в основном для наиболее важных случаев. При этом часть вопросов остается не изученной. Например, из недавней обзорной статьи Синха [5] следует, что решения найдены в предположении, что фокусы эллипса лежат на одной из осей плоскости пьезопластины. Однако возникают, по крайней мере, две задачи, предполагающие, что фокусы не лежат на осях: 1) учет ошибок изготовления пьезопластин; 2) введение искусственной асимметрии пьезопластины для регулировки спектра. При решении таких задач необходимо учитывать пространственную анизотропию кристалла, а не только ее проявление в направлении нормали к пьезопластине, как это было сделано в работе [6].

В данной работе рассматривается более общая математическая модель резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной эллипсоидального типа, в которой анизотропия предполагается как в направлении нормали, так и в плоскости пластины, а фокусы эллипса расположены произвольно по отношению к ее осям.

## 2. Частотный спектр собственных колебаний.

Рассмотрим кварцевый резонатор с односторонне-выпуклой поверхностью эллипсоидального типа (Рис.1). Координатные оси сориентированы таким образом, что ось  $x_2$  является нормалью к главной оси пластины, а ось  $x_1$  направлена вдоль оси второго поворота дважды повернутой кварцевой пластины. Эллипсоидальная поверхность сориентирована произвольным образом относительно осей исходной системы координат в плоскости  $x_1x_3$ . Радиусы эллипсоида в направлении  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  обозначены, соответственно,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Максимальная толщина пластины обозначена  $2h_0$ . Преобразования физических констант кварца в плоскость повернутого среза приведены в Приложении 1. Для обозначения поворота главных осей эллипсоида относительно осей  $x_1$  и  $x_3$  введен угол  $\alpha$  (Рис. 1в). Отметим, что частный случай такой модели ( $\alpha = 0$ ) изучен в работе [5].

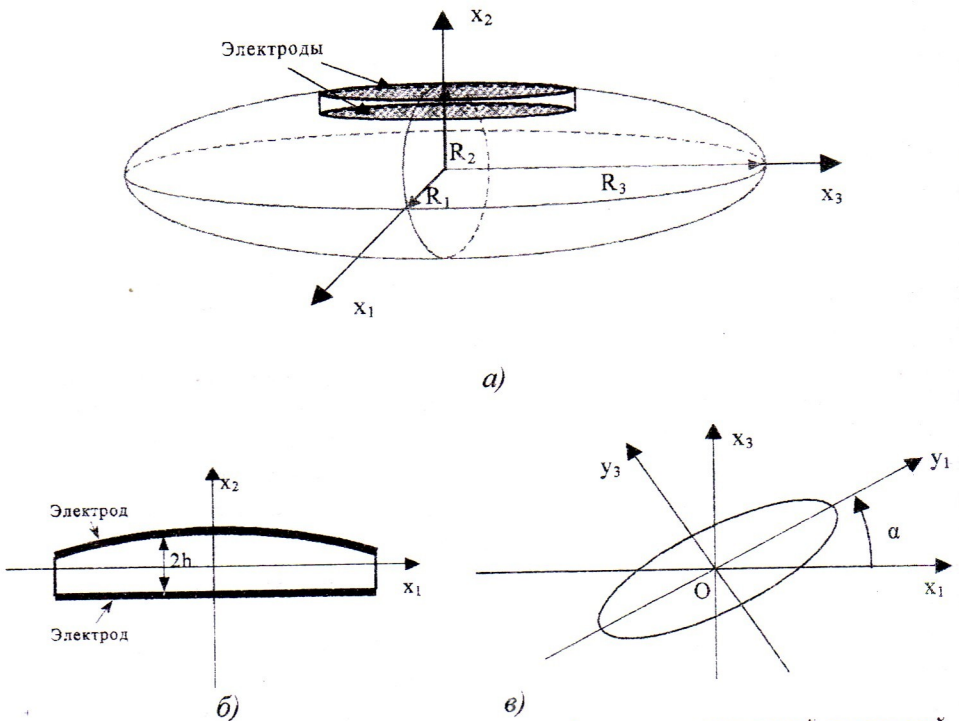


Рис 1. Модель кварцевого резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной эллипсоидальной формы: а) основной вид, б) сечение, в) вид сверху,  $\alpha$  - угол между главными осями эллипсоидальной граничной поверхности и осями исходной координатной системы.

Дифференциальное уравнение для нахождения главного смещения  $u_1^n$   $n$ -ой гармонической моды поперечных колебаний дважды повернутой кварцевой пластины запишем в виде [2]:



$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ M_n \frac{\partial^2 u_1^n}{\partial x_1^2} + P_n \frac{\partial^2 u_1^n}{\partial x_3^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h^2} u_1^n - \rho \ddot{u}_1^n \right] = \rho \omega^2 \frac{e_{26} V x_2}{\bar{c}^{(1)} 2h} e^{i\omega t}, \quad (1)$$

здесь  $u_1^n$  - смещение по толщине пластины с собственным значением  $\bar{c}^{(1)}$ ,  $V$  - напряжение возбуждения,  $2h$  - переменная толщина пластины,  $\rho$  - плотность пластины,  $e_{26}$  - пьезоэлектрическая константа,  $M_n$  и  $P_n$  выражаются громоздкими формулами, которые внесены в Приложение 2. Для  $\hat{c}^{(1)}$  приведем выражение [2]:

$$\hat{c}^{(1)} = \bar{c}^{(1)} \left( 1 - \frac{8k_1^2}{n^2 \pi^2} - 2\hat{R} \right), \quad (2)$$

где

$$k_1^2 = \frac{e_{26}^2}{\bar{c}^{(1)} \varepsilon_{22}}, \quad \hat{R} = \frac{2\rho' h'}{\rho h} \quad (3)$$

и  $2h'$  и  $\rho'$  обозначают толщину и плотность электрода,  $\varepsilon_{22}$  - диэлектрическая константа.

Решение (1) ищем в виде

$$u_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} u_1^n, \quad (4)$$

где  $u_1^n$  можно представить в виде

$$u_1^n = u^n(x_1, x_3) e^{i\omega t} \sin \frac{n\pi x_2}{2h}. \quad (5)$$

Пользуясь ортогональностью функций  $\sin \frac{n\pi x_2}{2h}$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  на интервале  $(-h, h)$ , из (1) получаем

$$M_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_1^2} + P_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_3^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h^2} u^n + \rho \omega^2 u^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\bar{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}. \quad (6)$$

Запишем выражение для переменной толщины  $2h$  в случае эллиптической граничной поверхности

$$2h = 2h_0 \left( 1 - \frac{R_2}{4h_0} (a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_3 + a_{13} x_3^2) \right), \quad (7)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{R_1^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_3^2} \cos^2 \alpha,$$

$$a_{12} = \left( \frac{1}{R_3^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \sin 2\alpha, \quad (8)$$

$$a_{13} = \frac{1}{R_3^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_1^2} \cos^2 \alpha.$$

Перепишем уравнение (6) с учетом выражения для толщины (7) и (8):

$$M_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_1^2} + P_n \frac{\partial^2 u^n}{\partial x_3^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h_0^2} \left( 1 + \frac{R_2}{2h_0} (a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_3 + a_{13} x_3^2) \right) u^n - \rho \omega^2 u^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\bar{c}^{(1)}} \frac{4V e^{i\omega t}}{n^2 \pi^2}, \quad (9)$$

Произведем замену переменных в уравнении (9), чтобы избавиться от коэффициентов при  $\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i^2}$ :

$$x_1 = \sqrt{M_n} \xi_1, \quad x_3 = \sqrt{P_n} \xi_3. \quad (10)$$

В результате произведенной операции получим

$$\frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial \xi_3^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h_0^2} \left( 1 + \frac{R_2}{2h_0} (a_{11} M_n \xi_1^2 + a_{12} \sqrt{M_n P_n} \xi_1 \xi_3 + a_{13} P_n \xi_3^2) \right) \hat{u}^n + \rho \omega^2 \hat{u}^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\bar{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}. \quad (11)$$

Теперь исключим произведение  $\xi_1 \xi_3$  в уравнении (11). Для этого производим поворот на угол  $\beta$ , вводя переменные

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \cos \beta + \xi_3 \sin \beta \\ \eta_3 = -\xi_1 \sin \beta + \xi_3 \cos \beta \end{cases} \quad (12)$$

где угол поворота

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{a_{12} \sqrt{M_n P_n}}{a_{13} P_n - a_{11} M_n} \right). \quad (13)$$

Получим уравнение более простого вида

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^n}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^n}{\partial \eta_3^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h_0^2} \left( 1 + \frac{R_2}{2h_0} (c_{11} \eta_1^2 + c_{13} \eta_3^2) \right) \bar{u}^n + \rho \omega^2 \bar{u}^n = \rho \omega^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e_{26}}{\bar{c}^{(1)}} \frac{4V}{n^2 \pi^2}, \quad (14)$$

где

$$c_{11} = a_{11} M_n \cos^2 \beta - \frac{1}{2} a_{12} \sqrt{M_n P_n} \sin 2\beta + a_{13} P_n \sin^2 \beta, \quad (15)$$

$$c_{12} = a_{11} M_n \sin^2 \beta + \frac{1}{2} a_{12} \sqrt{M_n P_n} \sin 2\beta + a_{13} P_n \cos^2 \beta. \quad (16)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (14), т. е. когда  $V = 0$ , имеет вид

$$\bar{u}_{nmp} = \left( \frac{\sqrt{b_1 b_3}}{\pi^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{m+p} m! p!}} e^{-\frac{\sqrt{b_1} \eta_1^2 - \sqrt{b_3} \eta_3^2}{2}} H_m(\eta_1 b_3^{1/4}) H_p(\eta_3 b_3^{1/4}), \quad (17)$$

где  $H_m$  и  $H_p$  полиномы Эрмита и

$$b_1 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)} R_2}{8h_0^3} c_{11}, \quad b_3 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)} R_2}{8h_0^3} c_{13}. \quad (18)$$

Из (17) следует, что квадраты частот, соответствующих найденным собственным колебаниям, определяются соотношением

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}^{(1)}}{4h_0^2 \rho} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2h_0 R_2}{\hat{c}^{(1)}}} \left( \sqrt{c_{11}} (2m+1) + \sqrt{c_{13}} (2p+1) \right) \right), \quad (19)$$

где

$$n = 1, 3, 5, \dots, \quad m, p = 0, 2, 4, \dots \quad (20)$$

Теперь найдем собственные колебания в исходной системе координат. Для этого из (17) с учетом преобразований (10) и (12) получим решение для уравнения (9)

$$u_{nmp} = \left( \frac{\sqrt{b_1 b_3}}{\pi^2 M_n P_n} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{m+p} m! p!}} e^{-\frac{\zeta_1^2 - \zeta_3^2}{2}} H_m(\zeta_1) H_p(\zeta_3), \quad (21)$$

где

$$\begin{cases} \zeta_1 = b_1^{1/4} \left( \frac{x_1}{\sqrt{M_n}} \cos \beta + \frac{x_3}{\sqrt{P_n}} \sin \beta \right) \\ \zeta_3 = b_3^{1/4} \left( -\frac{x_1}{\sqrt{M_n}} \sin \beta + \frac{x_3}{\sqrt{P_n}} \cos \beta \right) \end{cases}, \quad (22)$$

Таким образом, формулы (19) и (21) определяют частотный спектр и собственные колебания резонатора. Ниже мы приводим результаты численного анализа частотного спектра.

### 3. Численный эксперимент.

Уравнение (19) было использовано для вычисления резонансных частот дважды повернутой пьезопластины кварцевого резонатора SC-среза с ориентацией  $uxbl/+16.3^\circ/-34.5^\circ$ . Было рассмотрено два варианта геометрии пластины. В первом случае рассматривалась пластина эллипсоидального типа с параметрами  $R_1 = 299.7$  мм,  $R_2 = R_3 = 300$  мм и  $2h_0 = 1$  мм. Второй из рассмотренных случаев соответствовал резонатору, у которого  $R_1 = 240$  мм,



$R_2 = R_3 = 300$  мм и  $2h_0 = 1$  мм. Результаты численного анализа показаны, соответственно, на Рис. 2 и Рис. 3 в полярных координатах при повороте от 0 до  $\pi$ , где угол есть  $\alpha$  (Рис. 1в), а радиус соответствует абсолютному смещению частоты  $f_{nmp} = \omega_{nmp} / 2\pi$  резонатора по отношению к той же частоте при  $\alpha = 0$ .

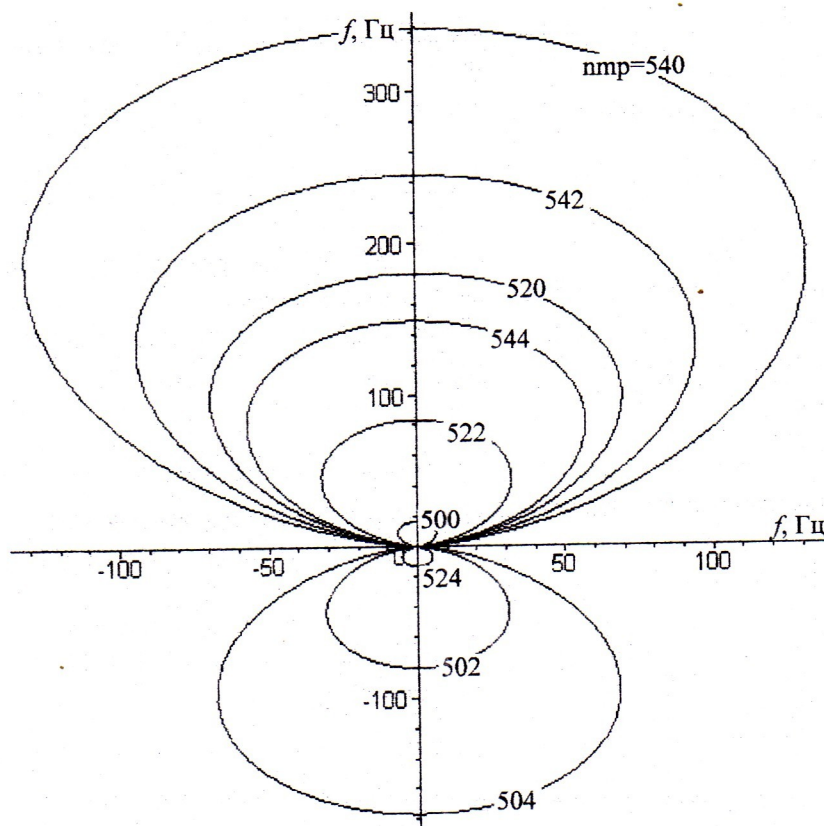


Рис 2. Абсолютные смещения ближайших частот спектра кварцевого резонатора с параметрами  $R_1 = 299.7$  мм,  $R_2 = R_3 = 300$  мм и  $2h_0 = 1$  мм.

Из анализа Рис. 2 и Рис. 3 следует, что при изменении угла  $\alpha$  изменяется частотный спектр кварцевого резонатора, а именно: 1) частоты с индексами  $nmp = nm0$  увеличиваются при изменении индекса  $m$ , 2) частоты с индексами  $nmp = n0p$  уменьшаются при изменении индекса  $p$ . При этом, если оба индекса  $m$  и  $p$  отличны от нуля, характер изменения частот более сложный, т.е. частоты могут, как увеличиваться, так и уменьшаться.

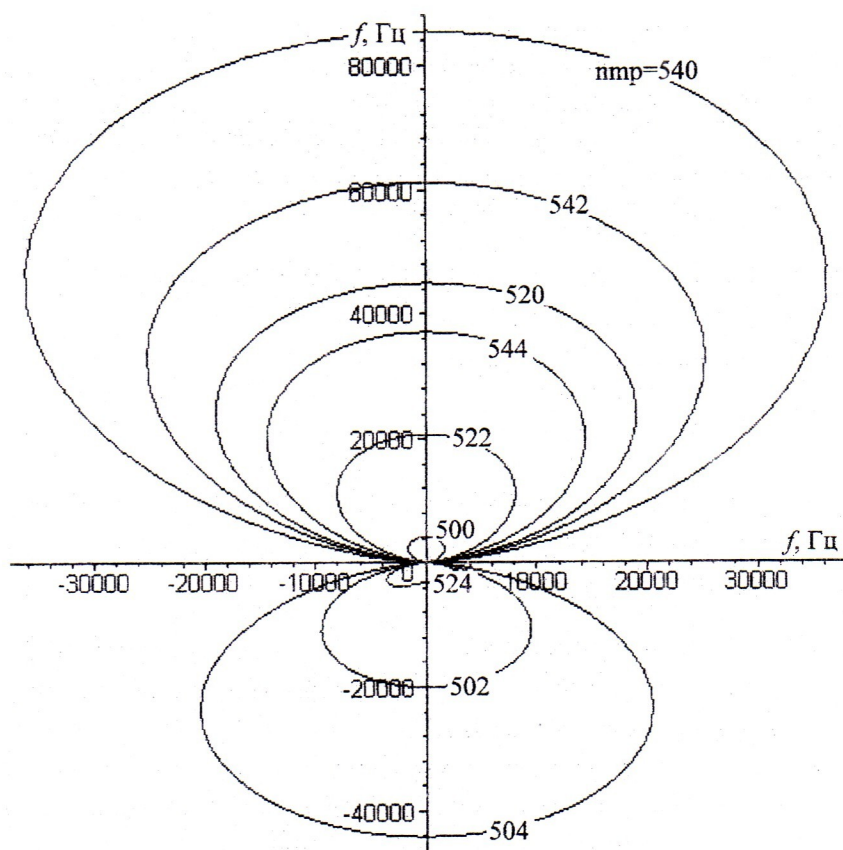


Рис 3. Абсолютные смещения ближайших частот спектра кварцевого резонатора с параметрами  $R_1 = 240$  мм,  $R_2 = R_3 = 300$  мм и  $2h_0 = 1$  мм.

#### 4. Заключение.

В данной работе рассмотрена математическая модель резонатора с выпуклой пьезоэлектрической пластиной эллипсоидального типа, в которой анизотропия предполагается как в направлении нормали, так и в плоскости пластины, а фокусы эллипса не лежат на осях. Предложенная модель позволяет учитывать угол поворота  $\alpha$  в плоскости пластины. Более общий случай пространственного дополнительного поворота находится в стадии изучения.

#### Приложение 1. Преобразование эластических констант.

Уравнение линейной пьезоэлектрической теории Стивенса и Тирстена [2] для нахождения колебаний пьезопластины имеет вид

$$\hat{c}_{2nr2} \hat{u}_{r,22} + (\hat{c}_{2nr\nu} + \hat{c}_{2m\nu}) \hat{u}_{r,2\nu} + \hat{c}_{mrv} \hat{u}_{r,\nu\nu} = \rho \hat{u}_n, \quad (23)$$

здесь

$$\hat{c}_{2nr2} = \hat{c}_{2nr2} + \hat{e}_{22n} \hat{e}_{22r} / \hat{\epsilon}_{22}, \quad (24)$$

где  $\hat{u}_n$ ,  $\rho$  механическое смещение и плотность, а  $\hat{c}_{mnr2}$ ,  $\hat{e}_{rnm}$ ,  $\hat{\epsilon}_{nm}$ , соответственно, эластические, пьезоэлектрические и диэлектрические константы, вычисленные в системе координат пластины.

Здесь и далее мы следуем [2]. Уравнение для нахождения колебаний по толщине получается из уравнения (23), если брать только зависимость от  $x_2$ :

$$\hat{c}_{2nr2} \hat{u}_{r,22} = \rho \hat{u}_n, \quad (25)$$

Антисимметрическое решение для колебаний по толщине имеет вид

$$\hat{u}_r = A_r \sin(\eta x_2) \exp(i\omega t). \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (25), получим

$$\left( \hat{c}_{2nr2} - \frac{\rho \omega^2}{\eta^2} \delta_{nr} \right) A_r = 0. \quad (27)$$

Ненулевое решение существует, когда детерминант матрицы коэффициентов при  $A_r$  обращается в нуль, т. е.

$$\det(\hat{c}_{2nr2} - \bar{c} \delta_{nr}) = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) приводит к кубическому уравнению для  $\bar{c}$ . Поскольку  $\hat{c}_{2nr2}$  является симметрической положительно определенной матрицей, то существует три вещественных положительных корня  $\bar{c}^{(i)}$ , где  $i=1,2,3$ . Эти корни, или собственные значения, связаны с тремя взаимно ортогональными собственными векторами  $A_r^i$ . После нормализации этих векторов получим матрицу  $Q_{ir}$ , компоненты которой имеют вид  $q_r^{(i)} = A_r^{(i)} / N_{(i)}$ , где  $A_r^{(i)} A_r^{(j)} = N_{(i)}^2 \delta_{ij}$ .

Применяя матрицу  $Q_{ir}$  для перехода вектора смещения  $\hat{u}_r$  в системе координат пластины к вектору смещения  $u_r$  в системе собственных векторов решения по толщине, из уравнения (23) получим

$$\bar{c}^{(j)} u_{j,22} + c_{2jia} u_{i,2a} + c_{2ija} u_{i,2a} + c_{ajib} u_{i,ab} = \rho \ddot{u}_j, \quad (29)$$

где  $i, j = 1, 2, 3$  и  $a, b = 1, 3$ . При этом эластические константы имеют следующие формулы преобразования:

$$\bar{c}^{(j)} \delta_{ij} = \hat{c}_{2nr2} Q_{ir} Q_{jn}, \quad (30)$$

$$c_{2jia} = Q_{jn} Q_{ir} \hat{c}_{2nra}, \quad (31)$$

$$c_{2ija} = Q_{ir} Q_{jn} \hat{c}_{2rna}, \quad (32)$$

$$c_{ajib} = Q_{jn} Q_{ir} \hat{c}_{anrb}. \quad (33)$$

В работе используется сокращенное обозначение для индексов тензора  $c_{ijkl}$ :

|           |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ij или kl | 11 | 22 | 33 | 23 | 31 | 12 | 32 | 13 | 21 |
| p или q   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |

При этом тензор  $c_{ijkl}$  переходит в тензор  $c_{pq}$ .



**Приложение 2.** Вычисление коэффициентов  $M_n$  и  $P_n$  по методике Стивенса и Гирстена [2].

$$M_n = M_n^1 \cos^2 \hat{\beta}_n - Q_n^1 \sin \hat{\beta}_n \cos \hat{\beta}_n + P_n^1 \sin^2 \hat{\beta}_n, \quad (34)$$

$$P_n = M_n^1 \sin^2 \hat{\beta}_n + Q_n^1 \sin \hat{\beta}_n \cos \hat{\beta}_n + P_n^1 \cos^2 \hat{\beta}_n, \quad (35)$$

$$\hat{\beta}_n = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{-Q_n}{M_n - P_n} \right), \quad (36)$$

$$M_n^1 = c_{11} - \frac{c_{16}^2}{\bar{c}^{(1)}} + r_2 (c_{12} + c_{66}) + r_5 (c_{17} + c_{86}) + \frac{4(r_2 \bar{c}^{(1)} - c_{66})(r_2 \bar{c}^{(2)} + c_{12})}{\bar{c}^{(2)} \kappa_2 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_2 \frac{n\pi}{2} + \frac{4(r_5 \bar{c}^{(1)} - c_{86})(r_5 \bar{c}^{(3)} + c_{17})}{\bar{c}^{(3)} \kappa_3 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_3 \frac{n\pi}{2}, \quad (37)$$

$$Q_n^1 = 2c_{51} - \frac{2c_{16}c_{56}}{\bar{c}^{(1)}} + r_2 (c_{52} + c_{76}) + r_4 (c_{12} + c_{66}) + r_3 (c_{17} + c_{86}) + r_5 (c_{36} + c_{57}) + \frac{4(r_2 \bar{c}^{(1)} - c_{66})(r_4 \bar{c}^{(2)} + c_{52}) + (r_2 \bar{c}^{(2)} + c_{12})(r_4 \bar{c}^{(1)} - c_{76})}{\bar{c}^{(2)} \kappa_2 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_2 \frac{n\pi}{2} + \frac{4(r_5 \bar{c}^{(1)} - c_{86})(r_3 \bar{c}^{(3)} + c_{57}) + (r_5 \bar{c}^{(3)} + c_{17})(r_3 \bar{c}^{(1)} - c_{36})}{\bar{c}^{(3)} \kappa_3 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_3 \frac{n\pi}{2}, \quad (38)$$

$$P_n^1 = c_{58} - \frac{c_{56}^2}{\bar{c}^{(1)}} + r_4 (c_{52} + c_{76}) + r_3 (c_{36} + c_{57}) + \frac{4(r_4 \bar{c}^{(1)} - c_{76})(r_4 \bar{c}^{(2)} + c_{52})}{\bar{c}^{(2)} \kappa_2 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_2 \frac{n\pi}{2} + \frac{4(r_3 \bar{c}^{(1)} - c_{36})(r_3 \bar{c}^{(3)} + c_{57})}{\bar{c}^{(3)} \kappa_3 n \pi} \operatorname{ctg} \kappa_3 \frac{n\pi}{2}, \quad (39)$$

$$r_2 = \frac{c_{12} + c_{66}}{\bar{c}^{(1)} - \bar{c}^{(2)}}, \quad r_3 = \frac{c_{36} + c_{57}}{\bar{c}^{(1)} - \bar{c}^{(3)}}, \quad (40)$$

$$r_4 = \frac{c_{52} + c_{76}}{\bar{c}^{(1)} - \bar{c}^{(2)}}, \quad r_5 = \frac{c_{86} + c_{17}}{\bar{c}^{(1)} - \bar{c}^{(3)}},$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{\bar{c}^{(1)}}{\bar{c}^{(2)}}}, \quad \kappa_3 = \sqrt{\frac{\bar{c}^{(1)}}{\bar{c}^{(3)}}}. \quad (41)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin R. D. Mathematical theory of vibrations of elastic plates // Proc. 11th Freq. Control Symp. – 1957. – P. 1-40.
2. Stevens D. S., Tiersten H. F. An analysis of doubly rotated quartz resonators utilizing essentially thickness modes with transverse variation // J. Acoust. Soc. Am. 79(6). – June 1986. – P. 1811-1826.
3. Tiersten H. F., Lwo B. J., Dulmet B. Analysis of transversely varying thickness modes in trapped energy resonators with shallow contours // IEEE Int. FCS. – 1994. – P. 172-183.
4. EerNisse E. P. Analysis of thickness modes of contoured, doubly-rotated, quartz resonators // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., vol. 48, no. 5. – 2001. – P. 1351-1361.
5. Sinha B. K. Doubly rotated contoured quartz resonators // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., vol. 48, no. 5. – 2001 – P. 1162-1180.
6. Slavov S. H. Modes of Vibrations. Motion Inductance. And Resonance Interval of Circular, Convex AT-cut Beveled Design Trapped Energy Quartz Resonators // Appl. Phys. A 40. – 1986. – P. 59-65.