Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 605, 2003, с. 3-8

УДК 539.3

Численное решение методом граничных элементов динамических задач теории упругости для тел с трещинами в пространстве изображений Лапласа

А. А. Бобылев, О. В. Тейтель

Днепропетровский национальный университет, Украина

The questions of boundary element method practical realization for solving of elastodynamic problems for finite bodies with cracks in the Laplace transformation space are considered. The comparative analysis with model problem of calculation effectiveness of different integral expressions for solving is conducted.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению динамических задач теории упругости для тел с трещинами является подход, основанный на применении интегральных преобразований. При этом, если рассматриваются установившиеся колебания тела, обычно используется интегральное преобразование Фурье, в случае же неустановившихся движений тела используется интегральное преобразование Лапласа. Аналитическое решение полученных граничных задач в пространстве изображений Лапласа удается найти только для тел канонической формы, поэтому в подавляющем большинстве практических задач приходится использовать численные методы [1].

Анализ опубликованных работ отечественных и зарубежных ученых [2, 3] показал, что перспективным направлением является применение к решению данного класса задач метода граничных элементов. Одной из проблем, возникающих при численной реализации метода граничных элементов, является выбор наиболее рационального с точки зрения вычислительной эффективности интегрального представления решения.

В настоящей работе авторами рассмотрены вопросы практической реализации метода граничных элементов и выполнен сравнительный анализ вычислительной эффективности различных вариантов метода граничных элементов при решении динамических задач теории упругости для тел с трещинами в пространстве изображений Лапласа.

Рассматривается невесомое упругое однородное изотропное тело, которое занимает плоскую конечную область Ω с границей Γ и содержит трещину в форме незамкнутой двусторонней кривой Ляпунова Γ_t.

Поверхность тела Γ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_u$. На части поверхности Γ_S заданы граничные условия в напряжениях, а на части поверхности Γ_u - в перемещениях. В пространстве изображений они имеют вид

$$\overline{\sigma}_{ij}(x,k)\nu_j(x) = \overline{q}_{si}(x,k), \qquad \forall x \in \Gamma_S.$$
$$\overline{u}_i(x,k) = \overline{g}_i(x,k), \qquad \forall x \in \Gamma_u. \tag{1}$$

Граничные условия на берегах трещины в пространстве изображений Лапласа задаются в виде

$$\overline{\sigma}_{ij}^{-}(x,k)\nu_j(x) = -\overline{\sigma}_{ij}^{+}(x,k)\nu_j(x) = \overline{q}_{ti}(x,k), \quad \forall x \in \Gamma_t, \tag{2}$$

знаки “+” и ”-“ относятся к противоположным берегам трещины.

Задача состоит в определении изображений полей перемещений $\overline{u}(x,k)$, деформаций $\overline{\varepsilon}(x,k)$ и напряжений $\overline{\sigma}(x,k)$, удовлетворяющих уравнению движения в перемещениях, имеющему в пространстве изображений Лапласа вид (3)

$$(C_1^2 - C_2^2)\overline{u}_{i,ij} + C_2^2\overline{u}_{j,ii} - k^2\overline{u}_j = 0, \tag{3}$$

где k - параметр преобразования Лапласа, C_1 и C_2 - скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно, равные

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}; \qquad C_2^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho},$$

соотношениям Коши, закону Гука, граничным условиям на поверхности тела Γ (1) и берегах трещины Γ_t (2).

Введем граничные потенциалы для задачи в изображениях

$$U_i^k(\varphi, x, S) = \int_S U_{ij}(x,\xi,k)\varphi_j(\xi,k)dS; \tag{4}$$

$$W_i^k(\psi, x, S) = \int_S W_{ij}(x,\xi,k)\psi_j(\xi,k)dS; \tag{5}$$

$$K_i^k(\varphi, x, S) = \int_S K_{ij}(x,\xi,k)\varphi_j(\xi,k)dS; \tag{6}$$

$$F_i^k(\psi, x, S) = \int_S F_{ij}(x,\xi,k)\psi_j(\xi,k)dS. \tag{7}$$

Здесь $U_{ij}(x,\xi,k)$ - фундаментальное решение уравнения движения в пространстве изображений Лапласа [4], φ, ψ - плотности потенциалов простого и двойного слоя соответственно, S - кривая Ляпунова класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Остальные ядра получаются применением специального дифференциального оператора к $U_{ij}(x,\xi,k)$. Соответствующие выражения приведены в работе [2].

Учитывая свойства упругих потенциалов и граничные условия на поверхности тела и трещины, можно записать несколько вариантов систем граничных интегральных уравнений для непрямой и прямой формулировок метода граничных элементов.

Непрямой метод граничных элементов.

Вариант 1:

$$1/2\varphi_i(x,k)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{si}(x,k),$$
$$\forall x\in\Gamma_S,$$

$$\begin{aligned} &U_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+U_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{g}_i(x,k), && \forall x\in\Gamma_u, \\ &K_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{ti}(x,k), && \forall x\in\Gamma_t. \end{aligned} \tag{8}$$

Вариант 2:

$$\begin{aligned} &F_i^k(\psi,x,\Gamma_S)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{si}(x,k), && \forall x\in\Gamma_S, \\ &-1/2\psi_i(x,k)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_S)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_{1t})=\bar{g}_i(x,k), && \forall x\in\Gamma_u, \\ &F_i^k(\psi,x,\Gamma_S)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_{1t})=\bar{q}_{ti}(x,k), && \forall x\in\Gamma_t. \end{aligned} \tag{9}$$

Вариант 3:

$$\begin{aligned} &1/2\varphi_i(x,k)+K_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{si}(x,k), && \forall x\in\Gamma_S, \\ &-1/2\psi_i(x,k)+U_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{g}_i(x,k), && \forall x\in\Gamma_u, \\ &K_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{ti}(x,k), && \forall x\in\Gamma_t. \end{aligned} \tag{10}$$

Вариант 4:

$$\begin{aligned} &F_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+K_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{q}_{si}(x,k), && \forall x\in\Gamma_S, \\ &-1/2\psi_i(x,k)+U_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+W_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=\bar{g}_i(x,k), && \forall x\in\Gamma_u, \\ &F_i^k(\varphi,x,\Gamma_S)+K_i^k(\psi,x,\Gamma_u)+F_i^k(\psi,x,\Gamma_t)=-\bar{q}_{ti}(x,k), && \forall x\in\Gamma_t. \end{aligned} \tag{11}$$

Прямой метод граничных элементов.

Вариант 1:

$$\begin{aligned} &-U_i^k(\bar{q}_u,x,\Gamma_u)+\frac{1}{2}\bar{u}_{si}(x,k)+W_i^k(\bar{u}_s,x,\Gamma_S)+W_i^k(\Delta\bar{u},x,\Gamma_t)= \\ &\qquad =U_i^k(\bar{q}_s,x,\Gamma_S)-W_i^k(\bar{g},x,\Gamma_u), \qquad \forall x\in\Gamma_S, \\ &U_i^k(\bar{q}_u,x,\Gamma_u)-W_i^k(\bar{u}_s,x,\Gamma_S)-W_i^k(\Delta\bar{u},x,\Gamma_t)= \\ &\qquad =-U_i^k(\bar{q}_s,x,\Gamma_S)+\frac{1}{2}\bar{g}_i(x,k)+W_i^k(\bar{g},x,\Gamma_u), \qquad \forall x\in\Gamma_u, \qquad (12) \\ &K_i^k(\bar{q}_u,x,\Gamma_u)-F_i^k(\bar{u}_s,x,\Gamma_S)-F_i^k(\Delta\bar{u},x,\Gamma_t)= \end{aligned}$$

$$= -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ti}(x,k), \quad \forall x \in \Gamma_t .$$

Вариант 2:

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= \frac{1}{2}\bar{q}_{si}(x,k) - K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S ,$$
$$\frac{1}{2}\bar{q}_{ui}(x,k) - K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) - F_i^k(\delta, x, \Gamma_{2t}), \ \forall x \in \Gamma_u , \quad (13)$$
$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ti}(x,k), \quad \forall x \in \Gamma_t$$

Вариант 3:

$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= \frac{1}{2}\bar{q}_{si}(x,k) - K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S ,$$
$$U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= -U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + \frac{1}{2}\bar{g}_i(x,k) + W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_u , \quad (14)$$
$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ti}(x,k), \quad \forall x \in \Gamma_t .$$

Вариант 4:

$$-U_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + \frac{1}{2}\bar{u}_{si}(x,k) + W_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + W_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= U_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - W_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u), \quad \forall x \in \Gamma_S ,$$
$$\frac{1}{2}\bar{q}_{ui}(x,k) - K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) + F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) - F_i^k(\delta, x, \Gamma_{2t}), \quad \forall x \in \Gamma_u , \quad (15)$$
$$K_i^k(\bar{q}_u, x, \Gamma_u) - F_i^k(\bar{u}_s, x, \Gamma_S) - F_i^k(\Delta\bar{u}, x, \Gamma_t) =$$
$$= -K_i^k(\bar{q}_s, x, \Gamma_S) + F_i^k(\bar{g}, x, \Gamma_u) + \bar{q}_{ti}(x,k), \quad \forall x \in \Gamma_t .$$

Для численного решения полученных систем граничных интегральных уравнений (8)-(15) применяется метод граничных элементов с дискретизацией уравнений методом коллокаций. В качестве граничных элементов используются одноузловые элементы с постоянной аппроксимацией неизвестных функций. Вычисление интегралов, входящих в системы граничных интегральных уравнений, производится двумя способами. Если точка коллокации не принадлежит граничному элементу, то вычисляемый по этому элементу интеграл является регулярным и его значение определяется численно с помощью квадратурных формул Гаусса. Если же точка коллокации принадлежит граничному элементу, то интеграл по этому элементу имеет особенность и вычисляется аналитически.

В качестве модельной рассматривается задача о плоской деформации под действием ударной нагрузки однородного изотропного упругого тела, занимающего круговую область Ω радиуса R. Тело содержит прямолинейную трещину Γ_t длиной l, расположенную на диаметре тела с центром в точке O.

Проведенный авторами на основании вычислительных экспериментов сравнительный анализ показал, что расхождение численных результатов, полученных для рассмотренных интегральных представлений решения при одинаковой граничноэлементной аппроксимации не превышало 2%.

Зависимость изображения нормального раскрытия в центре трещины от параметров граничноэлементной сетки для случая, когда на поверхности тела заданы нормальные напряжения $\overline{q}_s$, а на поверхности трещины нормальные напряжения $\overline{q}_t$ приведена в табл. 1. Параметры материала тела, внешняя нагрузка и размеры тела имели следующие значения: $E = 2\times10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м3, $k = 6.356$, $\overline{q}_s = 20$ МПа, $\overline{q}_t = 20$ МПа, $R = 10$ м. В табл. 1 введены следующие обозначения: N_1 – число граничных элементов на берегах трещины Γ_t, N_2 – число граничных элементов на границе тела Γ.

Таблица 1. Изображение нормального раскрытия в центре трещины

	$N_1 = 11$	$N_1 = 31$	$N_1 = 51$	$N_1 = 71$	$N_1 = 91$
$N_2 = 100$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 200$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 350$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 550$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728
$N_2 = 800$	-0.137853	-0.137883	-0.137877	-0.137794	-0.137728

Таким образом, разработанные вычислительные алгоритмы обеспечивают высокую точность и устойчивость численных результатов и в дальнейшем могут быть использованы при исследовании ударных взаимодействий упругих тел конечных размеров с трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, - 1985. – 264 с.
2. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Неклассические проблемы механики разрушения. Том 4. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев: Наукова Думка, - 1993. – 237 с.
3. Masahiro A., Tadaharu A., Hiroyuki M. Boundary element analysis for unsteady elastodynamic problems based on the Laplace transform // JSME Int. J. A. - 1999, - 42, N 4, - P. 507-514.
4. Cruse T. A., Rizzo F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem // J. Math. Anal. Appl.-1968.-22, N1. P.244-259.

21 мая 2003 г.