

## Дифракция плоской волны на два-периодической идеально проводящей ленточной двухслойной решётке

А. Г. Грунёв, В. А. Щербина

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

We study the three-dimensional diffraction problem for the plane wave on the two - periodically conductive lattice which is constructed from the system of tapes orthogonal to each and located in the parallel planes. The boundary problem is reduced to the system of the hypersingular integral equations. We describe also the algorithm of the numerical simulation.

1991 Mathematics Subject Classification 45-99

Дифракция плоской волны на решётке является одной из базовых задач радиофизики. Теория антенн, дифракционных решёток, фильтров и экранов, защищающих от электромагнитных волн в заданном интервале частот – вот те задачи, при решении которых используется теория решёток.

В точной постановке без упрощающих предположений задача о дифракции решалась до недавних пор в двумерном варианте, т.е. не в пространстве, а на плоскости. ([1]-[7], [10]-[16]) Вообще следует заметить, что литература по этим вопросам очень обширна.

В нашей работе в точной постановке рассматривается два-периодическая решётка, что делает задачу дифракции на ней существенно трёхмерной. Предложенный в [17] одним из авторов метод позволил сформулировать алгоритм для численного моделирования решения, одинаково эффективный в ближней и в дальней зоне. Авторам не известны работы, в которых была бы использована сходная методика.

Используемый в работе вариант метода граничных гиперсингулярных интегральных уравнений имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционной методикой. При переходе от плоских задач к трёхмерным одномерная сетка на границе (решётки) переходит в двумерную, т.е. система из  $N$  заменяется системой из  $N^2$  линейных алгебраических уравнений, что ведёт к резкому росту погрешности для приближённого решения. Это увеличение размерности СЛАУ в предложенном ниже методе нейтрализуется улучшением "качества" матрицы коэффициентов, в которой близкие к диагонали элементы в  $\delta^{-2}$  раз больше остальных (если через  $\delta$  обозначить шаг сетки).

### 1. Постановка задачи

В данной работе предлагается метод решения задачи рассеяния электромагнитной волны, нормально падающей на плоскую два-периодическую дифракционную решётку, представляющую собой,

совокупность  $S$  тонких идеально проводящих лент, которые расположены в параллельных плоскостях  $x_3 = \pm h$  (рис. 1.). В безразмерной системе координат ширина лент принимается равной двум, а периоды решётки по переменным  $x_1, x_2$  равным  $2d$  ( $d > 1$ ).

Задача состоит в нахождении вектора напряжённости полного электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  во всём пространстве. Полное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  является суперпозицией падающего поля  $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ , представляющего собой плоскую монохроматическую волну и возмущения  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ , которое порождено наличием экрана  $S$ , т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x})$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$$

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{k} e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})}, \mathbf{p}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \mathbf{p} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_3, (\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) = 0$$

где  $\mathbf{p}$  - волновой вектор,  $\mathbf{k}$  - вектор поляризации.

Таким образом, необходимо вне поверхности  $S$  определить решение системы однородных уравнений

$$\Delta \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \tag{1.1}$$

$$(\nabla, \mathbf{E}_1(\mathbf{x})) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S \tag{1.2}$$

с краевым условием

$$[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}(\mathbf{x})] = 0, \mathbf{x} \in S \tag{1.3}$$

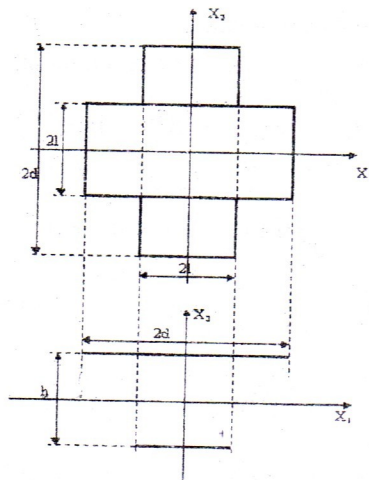


Рис. 1.

которое означает, что тангенциальная составляющая вектора напряжённости полного электрического поля на идеально проводящих лентах обращается в ноль. Условие (1.2) обеспечивает отсутствие зарядов вне поверхности  $S$ . Кроме того, решение должно удовлетворять условию излучения, обеспечивающему отсутствие в представлении для  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$  волн, приходящих из бесконечности.

Кроме этих условий на  $E_1(\mathbf{x})$  естественно потребовать, чтобы  $E_1(\mathbf{x}) = E_1(\mathbf{x} + 2\mathbf{n}_1\mathbf{e}_1\mathbf{d} + 2\mathbf{n}_2\mathbf{e}_2\mathbf{d})$ .

В силу периодичности  $E_0(\mathbf{x})$ ,  $E_1(\mathbf{x})$  достаточно рассмотреть задачу в базовой ячейке  $\Sigma = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}_1| < \mathbf{d}, |\mathbf{x}_2| < \mathbf{d}\}$ .

Ищем решение в виде

$$E_1(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \int_{S_0} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (1.4)$$

где  $S_0 = S \cap \Sigma$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{y}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{y})\mathbf{e}_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{y})\mathbf{e}_2$ ,  $\Phi(\mathbf{x})$  - фундаментальное два - периодическое решение уравнения

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) + p^2 \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - 2\mathbf{n}\mathbf{d}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.5)$$

где  $2\mathbf{n}\mathbf{d} = 2\mathbf{d}(\mathbf{n}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{n}_2\mathbf{e}_2)$ . Ясно, что  $E_1(\mathbf{x})$  будет удовлетворять всем условиям задачи, если за счёт выбора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$  удастся удовлетворить краевому условию (1.3).

Выбор решения такого вида обосновывается ещё и тем, что потенциал двойного слоя имеет непрерывную производную при переходе через поверхность. Подставляя выражение (1.4) в условие (1.3), получим уравнение относительно вектора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$ , которое после простых преобразований будет иметь вид

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = (\mathbf{k}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{e}_2) e^{ip_3x_3}, \mathbf{x} \in S_0 \quad (1.6)$$

или, покомпонентно, домножив уравнение (1.6) на  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  скалярно, получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_{S_0} \mathbf{j}_1(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = \mathbf{k}_2 e^{ip_3x_3} \\ \int_{S_0} \mathbf{j}_2(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_3} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = -\mathbf{k}_1 e^{ip_3x_3} \end{cases}, \mathbf{x} \in S_0 \quad (1.7)$$

Уравнения этой системы независимы, а их решение сводится к решению уравнения

$$\int_{S_1} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} + \int_{S_2} \mathbf{v}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = \mathbf{k} e^{ip_3x_3}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{x}_3 = \pm \mathbf{h}$ ,  $S_1, S_2$  - это отрезки лент, попавшие в базовую ячейку  $\Sigma$ . Таким образом, для рассматриваемой решётки поставленная задача сводится к решению граничного уравнения для вектора  $\mathbf{j}(\mathbf{y})$  в векторной форме (1.6) или к системе гиперсингулярных интегральных уравнений (1.7), которая сводится к решению гиперсингулярного уравнения (1.8).

## 2. Дискретизация

Функция  $u(y)$  периодична по  $y_1$ , а  $v(y)$  периодична по  $y_2$  и они допускают разложение

$$u(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi m \frac{y_1}{d}} u_m(y_2), \quad v(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{y_2}{d}} v_n(y_1)$$

Функция  $\Phi(x)$  - гладкая при фиксированном  $x_3 \neq 0$  два - периодическая функция по переменным  $x_1, x_2$ , так что её коэффициенты Фурье в разложении

$$\Phi(x) = \sum_{n_1, n_2} e^{i\frac{\pi}{d}(n_1 x_1 + n_2 x_2)} \Phi_{n_1, n_2}(x_3) \quad (x_3 \neq 0) \quad (2.1)$$

экспоненциально быстро убывают при  $|n_1| + |n_2| \rightarrow \infty$ . В разложении

$$\Phi(x) = \sum_n e^{i\frac{\pi}{d} n x_1} \Phi_n(x_2, x_3) \quad (2.2)$$

коэффициенты  $\Phi_n(x_2, 0)$  - периодические обобщённые функции, которые мы будем рассматривать как слабый предел при  $x_3 \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\int_{-d}^d \Phi_n(y, 0) \psi(y) dy = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-d}^d \Phi_n(y, x) \psi(y) dy,$$

где  $\psi(y)$  - гладкая периодическая функция.

То же самое справедливо и для функций

$$L\Phi_n(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_n(x, y) \Big|_{y=0}$$

С учётом введенных обозначений уравнение (1.8) сводится к системе вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^1 u_m(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy + \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{d} n x} L\Phi_{n,m}(2h) \int_{-1}^1 v_n(y) e^{-i\frac{\pi}{d} n y} dy_1 = \frac{1}{2d} e^{ip_3 h} \delta_{m,0} \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{d} n x} L\Phi_{n,m}(-2h) \int_{-1}^1 u_n(y) e^{-i\frac{\pi}{d} n y} dy_2 + \\ & \int_{-1}^1 v_m(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy_1 = \frac{1}{2d} e^{-ip_3 h} \delta_{m,0} \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; |x| < 1.$$

Входящий в эти уравнения гиперсингулярный интегральный оператор вида

$$\int_{-1}^1 u(y) L\Phi_m(x-y, 0) dy \quad (2.4)$$

определён на функциях вида  $u(y) = w(y)\sqrt{1-y^2}$ ,  $w(y) \in C^{1,\alpha}[-1,1]$  [8].  
 Неизвестные  $u_n(y)$ ,  $v_n(y)$  принадлежат этому классу [9], и мы, не меняя названий искомых функций, всюду в (2.3) заменим  $u_n(y) \rightarrow u_n(y)\sqrt{1-y^2}$ ,  $v_n(y) \rightarrow v_n(y)\sqrt{1-y^2}$ . Оператор (2.4) после простых преобразований сводится к интегралу вида

$$\int_{-1}^1 \frac{F(x-y)}{(x-y)^2} \sqrt{1-y^2} dy \quad (2.5)$$

где  $F(x-y) = w(y)L\Phi_n(x-y, 0)(x-y)^2$  - Гельднера функция, т.е.  $F \in C_{[-1,1]}^{1,\alpha}$ .

Для приближённого вычисления интеграла (2.4) воспользуемся следующей квадратурной формулой, предложенной в [3]

$$[D\gamma](t_j) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda(t_k) (1-t_k^2) \frac{1-(-1)^{j+k}}{(t_j-t_k)^2} - \frac{n}{2} \gamma(t_j) \quad (2.6)$$

где оператор  $D\gamma(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{(s-t)^2} \sqrt{1-t^2} dt$ ,  $t_k = \cos \frac{\pi k}{n}$ ,  $k = 1..n$ . После замены

рядов по  $m$  частичными суммами, а интегралов - суммами вида (2.6), система (2.3) сведётся к системе линейных алгебраических уравнений для значений неизвестных  $u_n(y)$ ,  $v_n(y)$  в узлах сетки.

### 3. Фундаментальное решение

Два - периодическое фундаментальное решение исследуемой задачи удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi(x) + p^2\Phi(x) = \sum_n \delta(x-2nd) \quad (3.1)$$

Подставляя (2.1) в (3.1), получим для неизвестных коэффициентов  $\Phi_{n,m}(z)$  следующее уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_{n,m}^2 \right) \Phi_{n,m}(z) = \delta(z), \mu_{n,m}^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 (m^2 + n^2) - p^2,$$

С учётом условия излучения

$$\Phi_{n,m}(x_3) = \begin{cases} \frac{-e^{-\mu_{n,m}|x_3|}}{2\mu_{n,m}}, \mu_{n,m}^2 > 0 \\ \frac{ie^{-i|\mu_{n,m}||x_3|}}{2|\mu_{n,m}|}, \mu_{n,m}^2 < 0 \\ |x_3|/2, \mu_{n,m} = 0 \end{cases}$$

Поскольку решение уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \pm a^2 \right) u_{\pm}(x, z) = \delta(x)\delta(z), \quad a > 0$$

с учётом условия излучения имеет вид

$$u_+(x, z) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}\left(a\sqrt{x^2+z^2}\right), u_-(x, z) = \frac{-1}{2\pi} K_0\left(a\sqrt{x^2+z^2}\right) \text{ и}$$

$u_0 = \frac{1}{4\pi} \ln(x^2+z^2)$ , то  $L\Phi_n(x, 0)$  можно представить в виде сумм

формальных рядов

$$L\Phi_m(x, 0) = \begin{cases} \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\lambda_m|x-2nd|)}{|x-2nd|}, \lambda_m^2 = \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 - p^2 > 0 \\ \frac{-i\lambda_m}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(\lambda_m|x-2nd|)}{|x-2nd|}, \lambda_m^2 = p^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-2nd|^2}, p^2 = \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Что касается первой суммы из стоящих справа в (3.2), то она экспоненциально быстро сходится. На интервале  $|x| < 1$  только слагаемое при  $n = 0$  в этой сумме является обобщённой функцией. Сходится и третья сумма в (3.2). Что касается второй суммы по  $n$ , то она нуждается в регуляризации.

#### 4. Регуляризация

$$\Phi_m(x, z) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \Phi_{m,n}(z) = \frac{1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{e^{-\mu_{m,n}|z|}}{2\mu_{m,n}}$$

$$\text{где } \mu_{m,n} = \begin{cases} \pi\gamma\sqrt{(m^2+n^2)/\gamma^2-1}, (m^2+n^2)/\gamma^2 > 1 \\ i\pi\gamma\sqrt{1-(m^2+n^2)/\gamma^2}, (m^2+n^2)/\gamma^2 < 1 \end{cases}$$

где  $\gamma = 4/\lambda$ , т.е. равно отношению периода решётки к длине падающей волны. Таким образом

$$L\Phi_m(x, 0) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{\mu_{m,n}}{2} \text{ - обобщённо сходящийся ряд Фурье.}$$

Рассмотрим следующее уравнение

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left( \left( \frac{\pi\gamma_q}{2} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{2} \right)^2 \right) \right) \Psi_m(x, z; \gamma_q) = \delta(z) \sum$$

т.е.

$$\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \gamma_q) = \frac{-1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_0 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 + \gamma_q^2} \sqrt{(x/2 - 2n)^2 + (z/2)^2} \right)$$

а с другой стороны

$$\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{e^{-v_{m,n}(\gamma_q)|z|}}{2v_{m,n}(\gamma_q)},$$

$$\text{где } v_{n,m}^2(\gamma_q) = \left( \frac{\pi \gamma_q}{1} \right)^2 \left( (m^2 + n^2) / \gamma_q^2 + 1 \right)$$

Таким образом  $\Psi_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{-1}{16} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \frac{v_{m,n}(\gamma_q)}{2}$ . Представим  $L\Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{0})$  в виде

$$L\Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{-1}{8l^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n \frac{x}{2}} \left( \mu_{m,n} - \sum_{q=1}^3 C_q v_{m,n} \right) - \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^3 C_q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0 \left( \pi \sqrt{m^2 + \gamma_q^2} \sqrt{(x/2 - 2n)^2 + (z/l)^2} \right)$$

Выберем коэффициенты  $C_q$  так, чтобы при  $\gamma^2 > m^2$ , т.е. в (3.2)  $p^2 - \left( \frac{\pi m}{d} \right)^2 > 0$ ,  $\mu_{m,n} - \sum_{q=1}^3 C_q v_{m,n}(\gamma_q) = 0 \left( \frac{1}{n^5} \right)$

Решая эту систему, получим

$$C_q = (-1)^{q-1} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^3 \frac{(\gamma^2 - \gamma_r^2)}{(\gamma_q^2 - \gamma_r^2)}$$

т.е. коэффициенты  $C_q$  не зависят от  $m, n$ .

## 5. Численный эксперимент

При проведении численного эксперимента было получено достаточно точное решение для длинных волн. При уменьшении длины падающей волны до величины полпериода решётки наблюдается резкое колебание энергии. На рис. 2-3 изображена зависимость осреднённой по периоду мощности отражённой волны в дальней зоне электромагнитного поля от параметра  $\gamma = 4/\lambda$  на одной сетке и удвоенной сетке.

$$N(\gamma) = \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 |E_1(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2$$

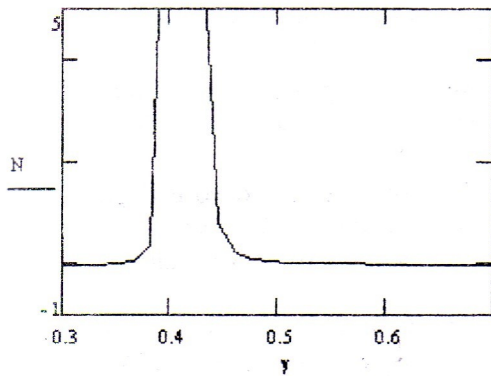


Рис. 2

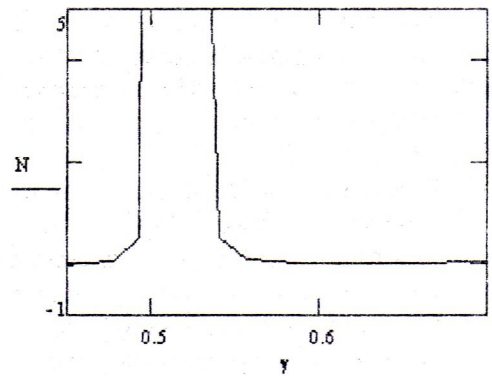


Рис. 3

В последние годы резко увеличился интерес к численному моделированию решений трёхмерных задач дифракции. Данная работа на важном для приложений примере демонстрирует большие возможности нового метода как раз для численного моделирования решений пространственных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. - ЖТФ, 1962, 32:4, с. 371-394.
2. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики. // Теория функций, функциональный анализ их приложения – 1982. – вып. 38, - с. 15-18.
3. Гандель Ю.В. Методы дискретных особенностей в задачах электродинамики. // Вопросы кибернетики. – Москва: Изд-во АН СССР, 1986. –ВК –№124 – с. 166-183.
4. Гандель Ю.В., Кравченко В.Ф., Морозова Н.Н. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент. // Электромагнитные волны и электронные системы. –М. –1997. – т.2, №2. – с. 14-26.
5. Гандель Ю.В. Методы парных сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решётках. // Электромагнитные явления. – 1998. – т.1., №1. – с. 220-232.
6. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Особенности численного решения сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на многоэлементных решётках. // Электромагнитные явления. –2001. – т.3, №3. – с. 53-61
7. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование численного решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решётках. // Дифференциальные уравнения. –2003. –т.39, №9
8. Гандель Ю.В., Ерёменко С.В., Полянская Т. В. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей двумерных задач дифракции электромагнитных волн. -Х.:ХГУ, - 1992.



9. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах.- М., - 1996.
10. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. - 400 с.
11. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. - 288 с.
12. Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. - Киев: Наук. думка, 1983. - 252 с.
13. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. - Киев: Наук. думка, 1984. - 294 с.
14. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Дифракционные решетки. - Киев: Наук. думка, 1986. - 232 с. - (Резонансное рассеяние волн: В 2-х т.; Т.1).
15. Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток. - Киев: Наук. думка, 1989. - 216 с.
16. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, 1997. - 284 с.
17. Щербина В. А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в  $\mathbf{R}^3$ . // Электромагнитные явления - 1998. - т. 1. №4.
18. Щербина В. А. Периодические фундаментальные решения для уравнения Гельмгольца. // ЖВМ и МВ - 1989. - т. 29. №2.