

Анализ математической модели сети с вырождением

П. С. Кабелянц

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In the paper there is considered a transmission problem for a flow in engineering networks. Existence conditions for transfer maps are formulated in network the cases of linear and non-linear dependence between variables. The general solvability problem of a degenerate system is considered too.

1. Введение.

Задача передачи сигналов и построения передаточного отображения для электрических цепей изучалась в [1], но только в случае линейной зависимости между переменными цепи. В классических работах [2], [3] по сетевому анализу рассматривались преимущественно линейные системы. Задача анализа нелинейных сетей актуальна и возникает при математическом моделировании систем газодинамики, гидродинамики и др. [4], [5], [6]. Сложность современных инженерных сетей, осуществляющих транспорт газа и жидкости от источников к потребителям, требует применения общих методов теории графов и нелинейного анализа.

В данной работе рассматривается модель передачи потока (жидкости, газа) от p источников к p потребителям в инженерной сети с произвольным числом внутренних ветвей.

Цель работы – сформулировать условия на параметры внутренних трубопроводов и геометрию сети, при которых любое значение входных данных источника позволяет однозначно найти давления и потоки на внутренних участках и на выходе к потребителю.

2. Пример передающей сети с одним источником и потребителем.

Описание математической модели и решение поставленной задачи мы осуществим предварительно на примере инженерной сети, изображенной на рис. 1. Хотя для самого примера шаги преобразований достаточно элементарны, их представления используются при анализе произвольной сети в п. 3.

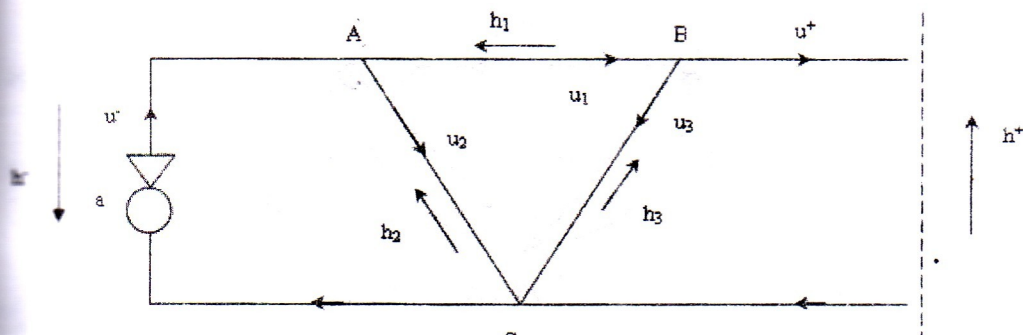


Рис. 1.

На входе сети активный элемент *a* (насосная станция, вентилятор и т.п.) создает разность давлений h^- и поток u^- . На выходе сети “потребитель” получает поток u^+ при разности давлений h^+ . Внутренними (пассивными) элементами сети являются участки трубопровода АВ, АС, ВС. Каждому из этих участков трубопровода соответствуют две неизвестные величины: h_j – разность давлений на этом участке и u_j – величина потока на этом участке. Введем векторы

$$\varphi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Все давления и потоки связаны линейными законами сохранения. Давления h_j и потоки u_j на трех внутренних участках трубопровода связаны линейными или нелинейными зависимостями

$$h = Z(u), \tag{1}$$

математическая форма и параметры которых уточняются ниже. Наша цель – сформулировать условия на параметры внутренних трубопроводов, при которых любое значение входных данных источника – вектора φ^- – позволяет однозначно найти компоненты векторов φ^-, φ^+ , то есть давления и потоки на внутренних участках и на выходе к потребителю. Иначе говоря, ищутся условия существования однозначных отображений R и W таких, что

$$u = R(\varphi^-), \tag{2}$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-). \tag{3}$$

Заметим, что ниже в п.3 топология произвольной сети будет учитываться с помощью матриц циклов и сечений, соответствующего ориентированного графа G_0 , который для примера сети рис.1 изображен на рис.2. Мы используем пример графа G_0 рис.2 для иллюстрации топологических ограничений в п.3.

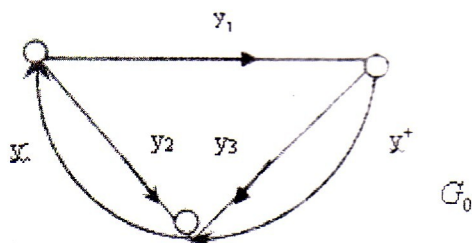


Рис. 2.

Запишем уравнения сохранения потока в узлах графа

$$u^+ - u_1 + u_3 = 0, \quad (4)$$

$$u_1 + u_2 - u^- = 0, \quad (5)$$

и уравнения баланса для разности давлений по замкнутым контурам (ячейкам)

$$h^+ - h_3 = 0, \quad (6)$$

$$h_2 + h^- = 0, \quad (7)$$

$$h_1 - h_2 + h_3 = 0. \quad (8)$$

Преобразуем систему уравнений Кирхгофа (4)–(8) к форме, которая далее будет использоваться для общей передающей сети с произвольным числом источников, потребителей и внутренних трубопроводов. Именно, уравнения (5) и (7) оставим без изменений; к уравнению (4) прибавим уравнение (5); к уравнению (6) прибавим уравнения (7) и (8); к уравнению (8) – уравнение (7):

$$u^+ + u_2 + u_3 - u^- = 0, \quad h^+ + h_1 + h^- = 0, \quad (9)$$

$$u_1 + u_2 - u^- = 0, \quad h_2 + h^- = 0, \quad h_1 + h_3 + h^- = 0. \quad (10)$$

Из (9) можно выразить выходной вектор φ^+ через входной вектор φ^- и вектор u , исключая вектор h с помощью (1):

$$\varphi^+ = K\varphi^- - Nu - MZ(u). \quad (11)$$

Здесь K, M, N есть матрицы

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Благодаря (11) задача построения передаточного отображения W (3) сводится к нахождению отображения R (2), с помощью которого по заданному входному вектору φ^- определяется внутреннее состояние системы u . Если отображение R найдено, то передающее отображение выражается через него формулой

$$W(\varphi^-) = K\varphi^- - MZ(R(\varphi^-)) - NR(\varphi^-). \quad (12)$$

2.1. Линейный случай.

Предположим, что в (1) вектор h выражается через вектор u линейно с помощью диагональной матрицы импедансов Z :

$$h = Zu, \quad Z = \text{diag}\{z_i\}, i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (10) переменные h_i с помощью (13), получаем

$$(AZ + B)u = L\varphi^-, \quad (14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $z_2 z_3 \neq 0$, то матрица $AZ + B$ обратима. Вычислив обратную $(AZ + B)^{-1}$, получаем из (14) отображение R , а затем из (12) – отображение W :

$$u = (AZ + B)^{-1} L\varphi^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & 1 \\ -\frac{1}{z_2} & -\frac{z_1}{z_3} \\ -\frac{z_1 + z_2}{z_2 z_3} & 0 \end{pmatrix} \varphi^- = R\varphi^-,$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = (K\varphi^- - (MZ + N)R)\varphi^- = \begin{pmatrix} -1 - \frac{z_1}{z_2} & -z_1 \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_2 z_3} & 1 + \frac{z_1}{z_2} \end{pmatrix} \varphi^-. \quad (15)$$

Итак, если векторы h и u связаны системой линейных уравнений (13) и $z_2 z_3 \neq 0$, то существует матричное передаточное отображение W вида (15).

2.2. Нелинейный случай.

Предположим теперь, что в (1) компоненты вектора h зависят от одноименных компонент вектора u нелинейно:

$$h_i = \varphi_i(u_i), i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Типичным примером нелинейной связи φ_i между давлением и потоком в газовом трубопроводе является квадратичная зависимость $h_i = r_i u_i^2$ [2], хотя исследуются и другие зависимости. Комбинируя уравнения (10) и (16), получаем $u_1 + u_2 = u^-$, $0 = \varphi_2(u_2) + h^-$, $0 = \varphi_1(u_1) + \varphi_3(u_3) + h^-$.

Запишем эту систему уравнений в векторном виде

$$Du = f(t, u), \quad (17)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} u^- \\ \varphi_2(u_2) + h^- \\ \varphi_1(u_1) + \varphi_3(u_3) + h^- \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Исключим из системы (18) переменную u_1 :

$$0 = \varphi_2(u_2) + h^-, \quad 0 = \varphi_1(u^- - u_2) + \varphi_3(u_3) + h^-. \quad (19)$$

В векторной форме система (19) имеет вид

$$F(u_2, u_3, h^-, u^-) = 0, \quad (20)$$

где $F(u_2, u_3, h^-, u^-) = \begin{pmatrix} \varphi_2(u_2) + h^- \\ \varphi_1(u^- - u_2) + \varphi_3(u_3) + h^- \end{pmatrix}$.

В общем случае переменные сети h^-, u^-, u_i, h_i зависят от времени t . Рассмотрим уравнение (20) на некотором промежутке времени $[0, \tau]$, и введем обозначения для переменных в начальный момент времени $t = 0$:

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad u^-(0) = u_0^-, \quad h^-(0) = h_0^-.$$

Обозначим через $B(\bar{x}, r)$ шар в пространстве R^l :

$$B(\bar{x}, r) = \{x \in R^l : \|x - \bar{x}\|_{R^l} \leq r\}.$$

Для разрешимости уравнения (20) относительно u_2, u_3 и, следовательно, для существования передаточного отображения W , достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия.

1. Функции φ_i (16) непрерывно дифференцируемы по переменным g_i в шаре

$$B(u_0, r) \text{ пространства } R^3, \quad u_0 = u(0) = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^T.$$

В начальный момент выполнены равенства

2. $\varphi_2(u_{20}) = -h_0^-, \quad \varphi_1(u_0^- - u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = -h_0^-.$

3. $\frac{d\varphi_2}{du_2}(u_{20}) \frac{d\varphi_3}{du_3}(u_{30}) \neq 0.$

Условия 2 и 3 позволяют применить теорему о неявной функции [7]. Действительно, условие 2 означает, что при $t = 0$ уравнение (20) удовлетворяется:

$$F(u_{20}, u_{30}, h_0^-, u_0^-) = 0.$$

Условие 3 означает, что якобиан функции F по переменным u_2, u_3

$$\det \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_2}{du_2} & 0 \\ -\frac{d\varphi_1}{du_1} & \frac{d\varphi_3}{du_3} \end{pmatrix} = \frac{d\varphi_2}{du_2} \frac{d\varphi_3}{du_3} \text{ при } t = 0 \text{ отличен от нуля. Применяя теорему о}$$

неявной функции к уравнению (20), находим функции

$$u_2 = \alpha(h^-, u^-), \quad u_3 = \beta(h^-, u^-),$$

непрерывные в некотором шаре $B(\varphi^-(0), r_1)$ пространства R^2 и удовлетворяющие в нем уравнению (20). В том же шаре с помощью (17) находим u_1 , и затем h_1 из (16):

$$u_1(h^-, u^-) = u^- - \alpha(h^-, u^-),$$

$$h_1(h^-, u^-) = \varphi_1(u^- - \alpha(h^-, u^-)), \quad h_2(h^-, u^-) = \varphi_2(\alpha(h^-, u^-)),$$

$$h_3(h^-, u^-) = \varphi_3(\beta(h^-, u^-))$$

Таким образом, отображение R (2) имеет вид:

$$u = R(\varphi^-) = \begin{pmatrix} u^- - \alpha(h^-, u^-) \\ \alpha(h^-, u^-) \\ \beta(h^-, u^-) \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить передаточное отображение W (3) по формуле (12):

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = \begin{pmatrix} -h^- - \varphi_1(u^- - \alpha(h^-, u^-)) \\ u^- - \alpha(h^-, u^-) - \beta(h^-, u^-) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Значения выходных переменных φ^+ сети рис. 1 в момент времени t определяется некоторой точкой из допустимого многообразия $\Xi_t = \{u(t), \varphi^-(t)\}$

в пятимерном пространстве R^5 . При $t=0$ для начальных данных $u_0 = u(0)$, $\varphi_0^- = \varphi^-(0)$ допустимое многообразие

$$\Xi_0 = \{(u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_0^-, h_0^-) \in R^5 : \varphi_1(u_0^- - u_{20}) - \varphi_2(u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = 0,$$

$$h_0^- = \varphi_2(u_{20}), \quad u_{10} = u_0^- - u_{20}\}$$

двумерно и определяется поверхностью

$$\Gamma = \{(u_{20}, u_{30}, u_0^-) \in R^3 : \varphi_1(u_0^- - u_{20}) - \varphi_2(u_{20}) + \varphi_3(u_{30}) = 0\}.$$

Итак, если вектор (u_{20}, u_{30}, u_0^-) принадлежит многообразию Γ , функции φ и векторы u_{20}, u_{30} удовлетворяют условиям 1-3, то существует передаточное отображение W , имеющее вид (21) и определяющее выходные параметры φ^+ по заданным входным параметрам φ^- таким, что $u^-(0) = u_0^-$, $h^-(0) = h_0^-$.

3. Передающая сеть с p источниками и p потребителями.

Рассмотрим математическую модель передающей инженерной сети рис. 3, которая имеет p источников, p потребителей и произвольное число промежуточных (внутренних) ветвей

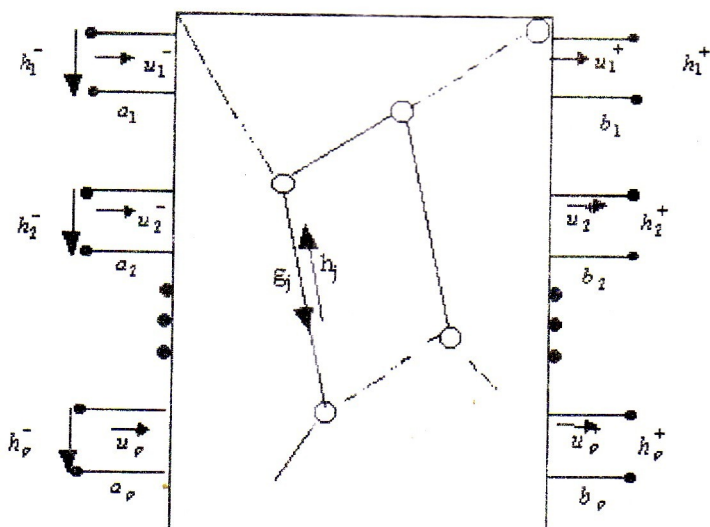


Рис. 3.

На входе сети активные элементы a_i (насосные станции, вентиляторы и т.п.) создают разности давлений h_i^- и потоки u_i^- . На выходе сети "потребители" b_i получают потоки u_i^+ при разностях давлений h_i^+ . Внутренними (пассивными) элементами сети являются m участков трубопровода. Каждому из этих участков трубопровода соответствуют две неизвестные величины: h_j – разность давлений на этом участке и u_j – величина потока на этом участке [5]. Введем векторы

$$h^- = (h_1^-, \dots, h_p^-)^r, u^- = (u_1^-, \dots, u_p^-)^r, \varphi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix},$$

$$h^+ = (h_1^+, \dots, h_p^+)^r, u^+ = (u_1^+, \dots, u_p^+)^r, \varphi^+ = \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix},$$

$$h = (h_1, \dots, h_m)^r, u = (u_1, \dots, u_m)^r.$$

Как и в разделе 1 будем искать условия существования однозначных отображений R (2) и W (3). Для записи уравнений Кирхгофа интерпретируем сеть как ориентированный граф G , содержащий n вершин и k дуг. Обозначим через Y^-, Y^+, Y_0 подмножества дуг, соответствующие входным активным элементам, потребителям на выходе и внутренним элементам соответственно.

Введем векторы разности давлений и потоки всех ветвей

$$\bar{h} = (h_1^+ \dots h_p^+ h_1^- \dots h_p^-)^r, \bar{u} = (u_1^+ \dots u_p^+ u_1^- \dots u_p^-)^r.$$

Уравнения Кирхгофа в векторной форме можно записать как

$$S\bar{u} = 0, \quad Q\bar{h} = 0, \quad (22)$$

где S, Q – матрицы сечений и циклов графа G . В работе [1] для записи уравнений передающей электрической цепи вводилась симметричная пара каркасов. Там показано, что наличие симметричной пары каркасов является необходимым и достаточным для существования обратимого передаточного матрицы W линейной электрической цепи.

По определению модельный граф G передающей сети обладает симметричной парой каркасов, если множество Y_0 внутренних ветвей содержит также подмножество внутренних ветвей $Y_T (\subset Y_0)$, что $Y^- \cup Y_T$ есть множество всех дуг некоторого каркаса (остова) T_- графа G и одновременно $Y^+ \cup Y_T$ есть также множество всех дуг некоторого каркаса T_+ графа G . Каркас T_- называется *входным*, T_+ – *выходным*, а сама пара T_-, T_+ называется *симметричной парой каркасов* [1].

Будем предполагать, что в модельном графе G , отвечающем инженерной сети рис. 3., существует симметричная пара каркасов T_-, T_+ . Вводя множество $Y_C = Y_0 \setminus Y_T$ внутренних дуг кокаркасов, получаем следующее разбиение множества всех дуг

$$Y = Y^+ \cup Y_T \cup Y_C \cup Y^- \quad (23)$$

В уравнениях Кирхгофа (22) положим $S = S_+, Q = Q_-$, где S_+ – фундаментальная матрица сечений графа W по каркасу T_+ , Q_- – фундаментальная матрица циклов графа G по каркасу T_- [1], [8].

Соответственно разбиению множества дуг (23) векторы \bar{h} и \bar{u} разбиваются на блоки

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} h^+ \\ h_T \\ h_C \\ h^- \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} h^+ \\ h_T \\ h_C \\ h^- \end{pmatrix}.$$

Фундаментальные матрицы имеют следующую блочную структуру:

$$S_+ = \begin{matrix} Y^+ & Y_0^T & Y_0^C & Y^- \\ Y^+ & \begin{pmatrix} E_p & 0 & S_1 & S_3 \\ 0 & E_{n-p-1} & S_2 & S_4 \end{pmatrix} \\ Y_0^C & \begin{pmatrix} 0 & Q_1 & E_{m-n+p+1} & Q_3 \\ E_p & Q_2 & 0 & Q_4 \end{pmatrix} \\ Y^+ & \end{matrix} \quad (24)$$

где размерности матричных блоков таковы: $\bar{\phi}\bar{\phi} - h = Zu$, $D - (n-p-1) \times (m-n+p+1)$, $S_3 - p \times p$, $S_4 - (n-p-1) \times p$, $Q_1 - (m-n+p+1) \times (n-p-1)$, $Q_2 - p \times (n-p-1)$, $Q_3 - (m-n+p+1) \times p$, $Q_4 -$

$p \times p$. Наконец, E_j – единичная матрица размерности j . Запишем уравнения Кирхгофа (22) с фундаментальными матрицами S_+ , Q_- (24):

$$u^+ + S_1 u_C + S_3 u^- = 0, \quad h^+ + Q_2 h_T + Q_4 h^- = 0, \quad (25)$$

$$u_T + S_2 u_C + S_4 u^- = 0, \quad Q_1 h_T + h_C + Q_3 h^- = 0. \quad (26)$$

Из (25) можно выразить выходной вектор Φ^+ через входной вектор Φ^- и вектор u с помощью (11) со следующими матрицами K , M и N

$$K = \begin{pmatrix} -Q_4 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}.$$

С учетом (11) задача построения передаточного отображения W (12) как и в разделе 2 сводится к нахождению отображения R .

3.1. Линейный случай.

Предположим, что зависимость вектора h от вектора u является линейной и описывается с помощью диагональной матрицей Z размерности $m \times m$:

$$h = Zu; \quad Z = \text{diag}\{z_T, z_C\}. \quad (27)$$

Выделение диагональных подматриц z_T, z_C соответствует разбиению векторов u и h по внутренним ветвям Y_T, Y_C (см. (23)):

$$u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_T \\ h_C \end{pmatrix}$$

Комбинируя уравнения (26) и (27), получаем равенство вида (14), с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_1 & E_{m-n-p+1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & S_4 \\ -Q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\det H \neq 0$, $H = (z_C - Q_1 z_T S_2)$, то матрица $(AZ + B) = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ Q_1 z_T & z_C \end{pmatrix}$

обратима и можно построить отображение R , а, значит, и передаточное отображение W (12):

$$u = R\Phi^- = (AZ + B)^{-1} L\Phi^- = \begin{pmatrix} S_2 H^{-1} Q_3 & S_4 + S_2 H^{-1} Q_1 z_T S_4 \\ -H^{-1} Q_3 & -H^{-1} Q_1 z_T S_4 \end{pmatrix} \Phi^-$$

$$\Phi^+ = W(\Phi^-) = (K\Phi^- - (MZ + N)R)\Phi^- =$$

$$= \begin{pmatrix} -Q_4 + Q_2 z_T S_2 H^{-1} Q_3 & -Q_4 + Q_2 z_T (S_4 + S_2 H^{-1} Q_1 z_T S_4) \\ S_3 - S_1 H^{-1} Q_3 & S_3 - S_1 H^{-1} Q_1 z_T S_4 \end{pmatrix} \Phi^-. \quad (28)$$

Итак, если векторы h и u связаны системой линейных уравнений (27) и

$$\det(z_C - Q_1 z_T S_2) \neq 0, \quad (29)$$

то существует передаточное отображение W вида (28), определяющее выходной вектор φ^+ по произвольно заданному вектору φ^- .

В примере сети рис.1 для графа G_0 рис.2 имеем $p=1, n=3, m=3$. Граф G_0 обладает симметричной парой каркасов T_{\pm} . Входной T_- состоит из дуг $\{y^-, y_1\}$, выходной T_+ состоит из дуг $\{y^+, y_1\}$. Построим фундаментальную матрицу сечений по каркасу T_+ и фундаментальную матрицу циклов по каркасу T_- :

$$S_+ = \begin{matrix} & y^+ & y_1 & y_2 & y_3 & y^- \\ y^- & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ y_1 & \\ y_2 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ y_3 & \\ y^+ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Известно, что блоки S_i, Q_j (24) здесь таковы:

$$S_1 = (11), S_2 = (10), S_3 = S_4 = -1, Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = Q_4 = 1.$$

Уравнения (26)–(27) превращаются в уравнения (9)–(10), условие $\det H \neq 0$ – в условие $z_2 z_3 \neq 0$, а передаточное отображение W (28) – в (15).

3.2. Нелинейный случай.

Предположим, что вектор h зависит от вектора u нелинейно:

$$h_i = \varphi_i(t, u_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Запишем импедансную зависимость (30) в векторном виде:

$$h_T = \varphi_T(t, u_T), \quad h_C = \varphi_C(t, u_C). \quad (31)$$

Комбинируя уравнения из (26) и (31), получаем

$$u_T + S_2 u_C = -S_4 u^-, \quad (32)$$

$$0 = Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(t, u_T) - \varphi_C(t, u_C). \quad (33)$$

В векторной форме система уравнений (32)–(33) имеет вид $Du = f(t, u)$ (17) с матрицей D и отображением f вида:

$$D = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(t, u_T) - \varphi_C(t, u_C) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Рассмотрим полученное уравнение $Du = f(t, u)$ на некотором промежутке времени $[0, \tau]$, и введем обозначения для переменных в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(0) = u_0, \quad u_T(0) = u_{T0}, \quad u_C(0) = u_{C0}, \quad u^-(0) = u_0^-, \quad h^-(0) = h_0^-. \quad (35)$$

Теорема 1. Пусть модельный граф G , отвечающий инженерной сети рис. 3, обладает симметричной парой каркасов, импедансная зависимость между параметрами внутренних ветвей сети описывается нелинейными соотношениями (30) и выполнены следующие условия.

1. Импедансные функции φ_i (30) непрерывно дифференцируемы по переменным u_i в шаре $B(u_0, r)$ пространства R^m ;

В начальный момент выполнены равенства

$$2. Q_1 \varphi_T(-S_4 u_0^- - S_2 u_{C0}) + \varphi_C(u_{C0}) = Q_3 h_0^-;$$

3. $\det \left(Q_1 \frac{\partial \varphi_T}{\partial u_T}(0, u_{T0}) S_2 - \frac{\partial \varphi_C}{\partial u_C}(0, u_{C0}) \right) \neq 0$, где Q_1, Q_3, S_2, S_4 – блоки топологических матриц циклов и сечений (24).

Тогда в сети существует передаточное отображение $W: \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}$ определенное в некоторой окрестности начального значения входного вектора $\begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}_{t=0}$.

Доказательство. Выражаем из уравнения (32) переменную u_T , $u^+ + u_2 + u_3 - u^- = 0$, и подставляем в уравнение (33):

$$F(t, u_C, h^-, u^-) = 0. \quad (36)$$

Здесь $F(t, u_C, h^-, u^-) = Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(t, -S_4 u^- - S_2 u_C) - \varphi_C(t, u_C)$.

Условия 2 и 3 позволяют применить теорему о неявной функции [7]. Действительно, условие 2 означает, что при $t=0$ уравнение (36) удовлетворяется: $F(0, u_{C0}, h_0^-, u_0^-) = 0$.

Условие 3 означает, что якобиан $\frac{\partial F}{\partial u_C}$ при $t=0$ отличен от нуля. Применяя

теорему о неявной функции к уравнению (36), находим функцию $u_C = \alpha(t, h^-, u^-)$, удовлетворяющую уравнению (36). Она определена и непрерывна в некоторой области $[0, \tau_0] \times B(\varphi^-(0), r_1)$. Подставляем функцию

$\alpha(t, h^-, u^-)$ в уравнение (32) и находим u_T : $u_T = -S_4 u^- - S_2 \alpha(t, h^-, u^-)$

Теперь можно получить отображение R и передаточное отображение W :

$$u = R\varphi^- = \begin{pmatrix} -S_4 u^- - S_2 \alpha(t, h^-, u^-) \\ \alpha(t, h^-, u^-) \end{pmatrix}.$$

$$\varphi^+ = W(\varphi^-) = \begin{pmatrix} -Q_4 + Q_2\varphi_T(t, -S_4u^- - S_2\alpha(t, h^-, u^-)) \\ S_3 + S_1\alpha(t, h^-, u^-) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Значение выходного вектора φ^+ в момент времени t определяется некоторой точкой из допустимого многообразия $\Xi_t = \{u(t), \varphi^-(t)\}$ в пространстве R^{m+p} .

При $t = 0$ для начальных данных (35) допустимое многообразие имеет вид

$$\Xi_0 = \{(u_{T0}, u_{C0}, u_0^-, h_0^-) \in R^{m+p} : Q_1\varphi_T(0, -S_4u_0^- - S_2u_{C0}) + \varphi_C(0, u_{C0}) = Q_3h_0^-, u_{T0} = -S_4u_0^- - S_2u_{C0}\}.$$

Итак, если вектор (u_{C0}, u_0^-, h_0^-) принадлежит многообразию

$$\Gamma = \{(u_{C0}, u_0^-, h_0^-) \in R^{m-n+3p+1} : Q_1\varphi_T(0, -S_4u_0^- - S_2u_{C0}) + \varphi_C(0, u_{C0}) = Q_3h_0^-\},$$

функции φ_T, φ_C и вектор u_{C0} удовлетворяют условиям 1-3, то существует передаточное отображение W , имеющее вид (37) и определяющее выходной

вектор φ^+ по заданному входному вектору $\varphi^- = \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix}$ такому, что

$u^-(0) = u_0^-, h^-(0) = h_0^-$. Функция φ^+ непрерывна в области

$[0, \tau_0] \times B(\varphi^-(0), r_1)$. Теорема доказана.

Для сети из раздела 1 передаточное отображение W (37) имеет вид (21).

3.3 Случай дифференциальной импедансной зависимости.

Предположим, что в правой части импедансных уравнений (30) можно выделить линейную дифференциальную часть

$$h_T = v_T u_T' + \psi_T(u_T), \quad h_C = v_C u_C' + \psi_C(u_C), \quad (38)$$

где v_T, v_C – диагональные матрицы.

Тогда векторное уравнение (32) сохраняется, а уравнение (33) заменяется следующим

$$Q_1 v_T u_T' + v_C u_C' = Q_3 h^- - Q_1 \psi_T(u_T) - \psi_C(u_C). \quad (39)$$

Совокупность уравнений (32), (39) записывается в виде векторного дифференциального уравнения

$$Du' = f(t, u), \quad (40)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} E_{n-p-1} & S_2 \\ Q_1 v_T & v_C \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ Q_3 h^- - Q_1 \psi_T(u_T) - \psi_C(u_C) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_T \\ u_C \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Квадратная матрица D может быть необратимой, и тогда (40) мы называем вырожденным дифференциальным уравнением (по другой терминологии – система дифференциально-алгебраических уравнений – DAEs).

Достаточные условия разрешимости уравнения (40) получены в [10] (теорема 1). Применительно к конкретному виду (41) матрицы D и функции

$f(t, u)$ указанные условия разрешимости из [10] можно уточнить следующим образом.

Утверждение 1. Пусть модельный граф G , отвечающий инженерной сети рис. 3, обладает симметричной парой каркасов, импедансная зависимость между параметрами внутренних ветвей сети описывается уравнениями (38), функция Ψ_T удовлетворяет условию Литвица по u_T , функция Ψ_C удовлетворяет условию Литвица по u_C . Если $\det v_C \neq 0$, то в сети существует

передаточное отображение $W: \begin{pmatrix} h^- \\ u^- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h^+ \\ u^+ \end{pmatrix}$, определенное в некоторой

окрестности начального значения входного вектора $\begin{pmatrix} h^- \\ g^- \end{pmatrix}_{t=0}$.

4. Условия разрешимости вырожденной системы полулинейных уравнений.

Рассмотрим уравнение вида (17) на отрезке $[0, \tau]$ в общем случае

$$Du(t) = f(t, u), \quad (42)$$

не предполагая, что матрица D и отображение f имеют специальный вид (18) или (34). Здесь матрица D – квадратная вырожденная матрица размерности $m \times m$. Значения вектор-функций $u(t)$ и $f(t, u)$ лежат в пространстве R^m .

Рассмотрим линейный оператор $D: R^m \rightarrow R^m$, отвечающий матрице D в координатном базисе $e_1 = (100\dots 0)^T, \dots, e_m = (00\dots 01)^T$ пространства R^m , а также сопряженный линейный оператор $D^*: R^m \rightarrow R^m$, отвечающий матрице D^T .

Пространство W допускает следующие разложения в ортогональные суммы подпространств:

$$R^m = \text{Im } D^* \oplus \text{Ker } D = \text{Im } D \oplus \text{Ker } D^*, \quad (43)$$

где $\text{Im } D = \{Dx, x \in R^m\}$, $\text{Im } D^* = \{D^*y, y \in R^m\}$ – образы операторов D и D^* , а $\text{Ker } D$ и $\text{Ker } D^*$ – ядра операторов D и D^* .

Оператор D имеет следующую блочную структуру относительно разложений (43):

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}: \text{Im } D^* \oplus \text{Ker } D \rightarrow \text{Im } D \oplus \text{Ker } D^*,$$

где $D_1: \text{Im } D^* \rightarrow \text{Im } D$ есть обратимый оператор.

Введем в R^m ортопроекторы N_1, N_2 на подпространства $\text{Ker } D$, $\text{Im } D^*$ и ортопроекторы M_1, M_2 на подпространства $\text{Ker } D^*$, $\text{Im } D$:

$$N_1 : R^m \rightarrow \text{Im } D^*, \quad N_2 : R^m \rightarrow \text{Ker } D,$$

$$M_1 : R^m \rightarrow \text{Im } D, \quad M_2 : R^m \rightarrow \text{Ker } D^*,$$

$$N_1 + N_2 = E_m, \quad N_1^2 = N_1, \quad M_1 + M_2 = E_m, \quad M_1^2 = M_1.$$

Проекционным операторам N_1, N_2 и M_1, M_2 в координатном базисе пространства R^m отвечают матрицы N_1, N_2 и M_1, M_2 размерности $(m \times m)$, для которых мы сохраняем обозначения порождающих операторов. Введем

матрицу Якоби $\frac{\partial f}{\partial u}$ размерности $m \times m$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим $N_i u(t) = u^i(t)$, $M_i f(t, u) = f^i(t, u^1, u^2)$, $N_i u_0 = u_0^i$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(t, u)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных для всех $t \in [0, \tau]$ и всех u из некоторого шара $B(u_0, r)$;

2) проекция f^1 функции $f(t, u_1, u_2)$ на подпространство $\text{Im } D$ не зависит от проекции решения u на подпространство $\text{Im } D^*$: $f^1(t, u^1, u^2) = \psi(t, u^2)$;

3) начальное значение правой части содержится в образе оператора D : $f(0, u_0) \in \text{Im } D$;

4) В начальной точке $(0, u_0)$ справедливо $\det \left(\frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial f^2}{\partial u^1} D_1^{-1} \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \right) \neq 0$.

Тогда при всех t из некоторого нетривиального интервала $0 \leq t \leq \tau_0$ существует единственное решение $u(t) = (u_1, \dots, u_m)(t)$ уравнения (42) со значениями u^i в шаре $B(u_0, r_0)$.

Доказательство. Уравнение (42) можно представить в виде

$$D_1 u^1(t) = f^1(t, u^2), \tag{44}$$

$$0 = f^2(t, u^1, u^2). \tag{45}$$

Выражаем из уравнения (44) переменную u^1

$$u^1(t) = D_1^{-1} f^1(t, u^2) \tag{46}$$

и подставляем в уравнение (45)

$$F(t, u^2) = 0. \quad (47)$$

Здесь $F(t, u^2) = f^2(t, D_1^{-1} f^1(t, u^2), u^2)$.

Условия 3–5 позволяют применить теорему о неявной функции [7] к уравнению (47). Действительно, условия 2 и 3 означают, что при $t = 0$ уравнение (47) удовлетворяется

$$f^2(0, D_1^{-1} f^1(0, u_0^2), u_0^2) = 0.$$

Условие 5 означает, что якобиан $\frac{\partial F}{\partial u^2}$ при $t = 0$ отличен от нуля. Применяя теорему о неявной функции к уравнению (47), находим функцию

$$u^2(t) = \alpha(t), \quad (48)$$

удовлетворяющую уравнению (47). Она определена и непрерывна на некотором интервале $[0, \tau_0]$. Подставляем функцию $\alpha(t)$ в уравнение (46) и находим u^1 :

$$u^1(t) = D_1^{-1} f^1(t, \alpha(t)). \quad (49)$$

Тогда, функция $u(t) = u^1(t) + u^2(t)$ является решением уравнения (42) на нетривиальном интервале $[0, \tau_0]$. Теорема доказана.

Замечание. Для модели передающей сети (рис.3) из раздела 2 условия теоремы 2 совпадают с условиями теоремы 1.

Действительно, вычислим проекторы, соответствующие разложению (43)

$$N_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -S_2 \\ 0 & E_{m-n+1} \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-n+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} u_T + S_2 u_C \\ 0 \end{pmatrix}, u_2(t) = \begin{pmatrix} -S_2 u_C \\ u_C \end{pmatrix},$$

$$f_1(t, u) = \begin{pmatrix} -S_4 u^- \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_3 h^- - Q_1 \varphi_T(u_T) - \varphi_C(u_C) \end{pmatrix}.$$

Условия 1 и 2 теоремы 1 совпадают с условиями 1 и 2 теоремы 2. Ясно, что функция $f_1(t, u^1, u^2)$ не зависит от переменной u^1 . Следовательно, условие 3 теоремы 2 выполнено. Проверим условие 4:

$$\frac{\partial f^1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial u^2} = Q_1 \frac{\partial \varphi_T}{\partial u_T} S_2 - \frac{\partial \varphi_C}{\partial u_C}.$$

Следовательно, условие 4 теоремы 2 совпадает с условием 3 теоремы 1.

5. Численное решение начальной задачи для вырожденного дифференциального уравнения.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения вида (40) на отрезке $[0, \tau]$ в общем случае

$$Du'(t) = f(t, u), \quad (50)$$

$$u = u_0. \quad (51)$$

Здесь матрица D – квадратная вырожденная матрица размерности $m \times m$. Значения вектор-функций $u(t)$, $f(t, u)$ и вектор u_0 лежат в пространстве R^m .

Будем предполагать, что условия утверждения 1 выполнены. Построим вычислительную схему приближенного решения задачи (50)–(51).

Уравнение (50) можно записать в виде

$$D_1 \frac{d}{dt} u^1(t) = f^1(t, u^1, u^2), \quad (52)$$

$$0 = f^2(t, u^1, u^2) \quad (53)$$

с соответствующими начальными условиями $u^i(0) = N_i u_0 = u_0^i, i = 1, 2$.

Здесь матрица D_1 и вектор-функции $u^1(t)$, $f^1(t, u^1, u^2)$, $u^2(t)$ соответствуют блочному разложению (43). Аппроксимируем производную $\frac{du^1(t)}{dt}$ в узлах

сетки $\omega_\delta = \{t_i = i\delta, i = 0, \dots, N, N\delta = \tau\}$ соотношением

$$\frac{du^1}{dt}(t_i) \approx \frac{u^1(t_{i+1}) - u^1(t_i)}{h}, i = 0, \dots, N-1. \quad \text{Обозначим: } u^1(t_i) = u_i^1, u^2(t_i) = u_i^2.$$

Тогда в узлах сетки система уравнений (52)–(53) примет вид

$$\frac{u_i^1 - u_{i-1}^1}{h} = D_1^{-1} f^1((i-1)\delta, u^1, u^2), \quad (54)$$

$$f^2(i\delta, u_i^1, u_i^2) = 0, \quad (55)$$

$i = 1, \dots, N$. Для нахождения $u(t_i)$ из (54) находится u_i^1 через известные u_{i-1}^1 и u_{i-1}^2 , а затем полученный результат подставляется в нелинейное уравнение (55), которое решается относительно u_i^2 , например, методом Ньютона.

Программная реализация предложенного алгоритма осуществлена в среде Visual C++.

Заметим, что для численного решения задачи (50)–(51), можно было применить разностную схему непосредственно к уравнению (50) (смотри, например [11]–[12]). В предложенном методе разностная схема применяется к преобразованной системе (52)–(53), в которой часть уравнений является дифференциальными, часть – алгебраическими. Благодаря этому предложенный алгоритм быстрее сходится к решению исходной задачи.

6. Выводы

В работе предложена математическая модель передачи потока в инженерной сети с нелинейными зависимостями между переменными. В разделе 3 получены условия на параметры и топологию сети, при которых любой заданный входной поток при заданном входном давлении однозначно определяют поток и давление, получаемые потребителями. При этом используются как классические методы анализа сетей, которые берут начало от работ Г.Р. Кирхгофа, так и техника анализа многополосных электрических цепей с помощью графов, развитая в работах А.Г. Руткаса.

В разделе 4 рассмотрена вырожденная система полулинейных уравнений, обобщающая модель передачи потока в инженерной сети из п.3.2. Получены условия локальной разрешимости этой системы. В разделе 5 описан алгоритм численного решения вырожденной системы дифференциальных полулинейных уравнений, обобщающей модель передачи потока из п.3.4.

Предложенная в работе модель может быть использована для управления системами водоснабжения, для обеспечения работы газопроводов, при проектировании шахтно-вентиляционных сетей. Результаты, полученные в статье, позволяют сформулировать условия на геометрию сети, при которых происходит корректная передача векторного потока воды, газа или воздуха от источников к потребителям.

Заметим, что в статье рассмотрена передача потока, усредненного по каждой ветви. Инженерные сети с потоками, зависящими не только от времени, но и от положения на ветви, анализировались в [4], [5], однако задача передачи векторного потока не исследовалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руткас А.Г. Матрицы передачи и рассеяния многополосника.// Математическое моделирование и теория электрических цепей. – вып. 16. – 1978. – С.3–15.
2. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 274с.
3. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки. – М.: Связь, 1978. – 448с.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688с.
5. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. – М.: Стройиздат, 1990. – 366с.
6. Евдокимов А. Г., Петросов В. А. Информационно-аналитические системы управления инженерными сетями жизнеобеспечения населения. – Харьков, 1998. – 411 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:Мир, 1970. – 720с.
8. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 496с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576с.
10. Кабалянц П.С. Анализ математической модели нелинейной цепи с вырождением.//Радиоэлектроника и информатика. – №3. – 2003.

11. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Численные методы решения сингулярных систем. – Новосибирск: Наука, Сиб. Отд-ние, 1989. – 223с.
12. Campbell S.L., Hollenbeck R., Yeomans K. and Zhong Y. Mixed symbolic-numerical computations with general DAEs.// Numerical Algorithms. – 1998. -- P. 73–83, 85–94.