

Численное и аналитическое решения гиперсингулярного уравнения в задаче о периодической системе трещин

Б. Я. Кантор, В. В. Науменко, О. В. Науменко, Е. А. Стрельникова

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Украина*

The paper is concerned with hypersingular integrals which arise when boundary integral equations are used to solve some problems in fracture mechanics. The hypersingular integral equation generated by the second boundary value problem for 2D Laplace equation is represented in the form permitting to obtain analytical solution of the problem concern with periodic crack system in the infinite elastic body. The numerical method for its solution is also proposed. The calculated examples reveal a high level of accuracy and numerical efficiency of the developed approach.

В реальных материалах всегда имеется большое число различного рода микродефектов, развитие которых под действием приложенной нагрузки приводит к появлению трещин и к их росту, то есть к локальному или полному разрушению тела. Необходимость решения практических вопросов о прочности элементов конструкций и сооружений с трещинами вызвала большой интерес исследователей к изучению процесса деформирования и разрушения реальных твердых тел. К настоящему времени в рамках линейной теории упругости решено довольно много различных задач о напряженно-деформированном состоянии тел с трещинами. Впервые задача теории упругости для растягиваемой на бесконечности плоскости, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, была рассмотрена в [1]. Сингулярные интегральные уравнения периодической задачи теории упругости для плоскости с коллинеарными трещинами построены в [2-4]

В данной работе задача о концентрации напряжений в упругой изотропной плоскости с системой разрезов сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению. В этом случае коэффициенты интенсивности напряжений выражаются через искомую плотность, а не через ее производную [2-4], что приводит к существенному повышению точности результатов. Вначале рассмотрено гиперсингулярное интегральное уравнение на криволинейном контуре; далее показано, что к уравнению такого вида сводится задача о периодической системе трещин в упругой плоскости.

Пусть контур L представляет собой дугу окружности радиуса R ; уравнение которой имеет вид $x_1 = R \cos \varphi$; $x_2 = R \sin \varphi$; $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Рассмотрим интегральное уравнение на этом контуре

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} dL = f(x), \quad x \in L. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned}x &= (R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0); \quad \xi = (R \cos \varphi, R \sin \varphi); \\n_x &= (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0); \quad n_\xi = (\cos \varphi, \sin \varphi).\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_\xi} \ln \frac{1}{r} = \frac{2(\text{grad}_r, n_x)(\text{grad}_r, n_\xi) - (n_x, n_\xi)}{r^2}.$$

После преобразований уравнение (1) примет вид

$$(\mathbf{A} \Gamma)(\varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(\varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} = f(\varphi_0). \quad (2)$$

При $\alpha=0$, $\beta = 2\pi$, $R=1$ уравнение (2) совпадает с рассмотренным в монографии Ю.В. Ганделя [5] гиперсингулярным уравнением в пространстве тригонометрических полиномов. В [5] показано, что

$$\begin{aligned}\mathbf{A} : \cos k\varphi &\mapsto -k \cos k\varphi_0; \\ \mathbf{A} : \sin k\varphi &\mapsto -k \sin k\varphi_0; \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся соотношениями (3) для построения аналитических решений уравнения (2) и тестирования алгоритма численного решения. При численной реализации предполагалось, что контур интегрирования разомкнут (для этого принималось, $\alpha=0$, $\beta = 2\pi - 0.00001$), а искомая плотность $\Gamma(\varphi)$ обращается в нуль на границах интервала интегрирования. Применялась кусочно-постоянная и кубическая аппроксимации плотности внутри элемента.

На рис. 1а) показана правая часть уравнения (2); она вычислялась по формуле $f(\varphi_0) = 8 \cos(8\varphi_0) + 9 \sin(9\varphi_0)$; аналитическое решение для такой правой части согласно [3] имеет вид $\Gamma(\varphi) = -\cos(8\varphi) - \sin(9\varphi) + 1$. Кривые 1 и 2 на рис. 1б) представляют аналитическое и численное решения рассматриваемого уравнения. Численное решение получено с использованием 40 граничных элементов с кубической аппроксимацией плотности; при аппроксимации контура использованы формулы, приведенные в [6,7].

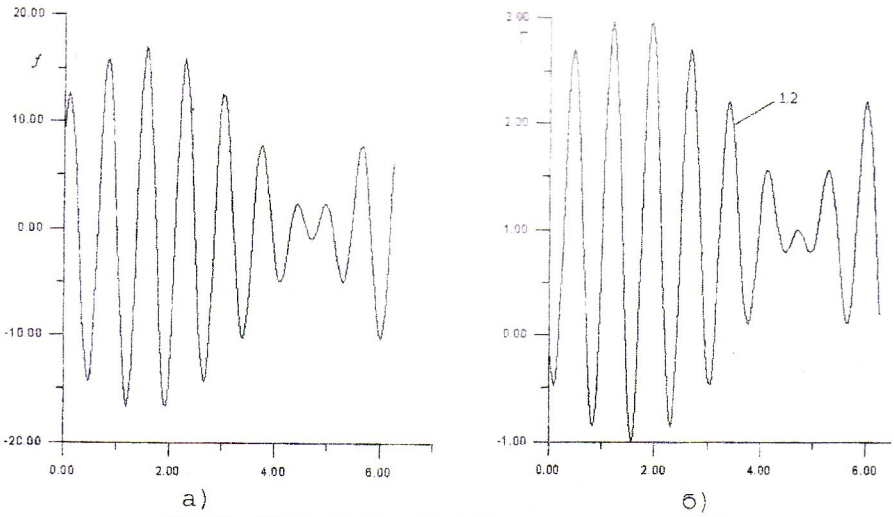


Рис.1. Плотность и правая часть уравнения (2)

При использовании кубических граничных элементов аналитическое и численное решение совпали с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. При использовании граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности точность $\varepsilon=10^{-3}$ была достигнута лишь при применении 160 элементов.

К уравнению вида (2) сводится задача об определении напряжений в пластине, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, берега которых нагружены произвольной несамоуравновешенной растягивающей нагрузкой (рис.2).

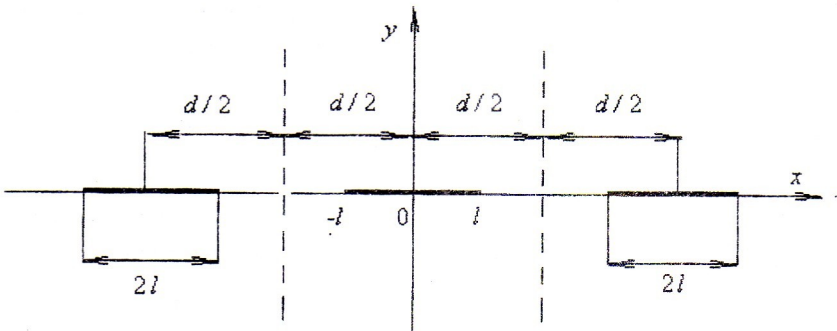


Рис.2. Периодическая система трещин.

В этом случае гиперсингулярное интегральное уравнение, описывающее поведение системы трещин, имеет вид

$$\int_{-l}^l \Gamma(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-x_0-kd)^2} dx = p(x_0); \quad (3)$$

Здесь

$$p(x_0) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) / M; \quad M = -\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)}.$$

Преобразуем ядро полученного гиперсингулярного уравнения [8]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - x_0 - kd)^2} = \frac{\pi^2}{d^2 \sin^2 \pi((x - x_0)/d)}.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma(\varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} = p_1(\varphi_0), \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi l}{d}; \quad p_1(\varphi_0) = 2dp(x_0); \quad \frac{l}{d} < \frac{1}{2}.$$

Аналитическое решение уравнения (4) получим следующим образом. Приведем (4) к виду [5]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma'(\varphi) \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) d\varphi = p_1(\varphi_0). \quad (5)$$

Полученное уравнение необходимо решать при дополнительном условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \Gamma'(\varphi) d\varphi = 0. \quad (6)$$

Воспользовавшись равенством

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{\cos^2(\varphi_0/2) [\operatorname{tg}(\varphi/2) - \operatorname{tg}(\varphi_0/2)]}$$

и сделав замену переменных

$$\eta = \operatorname{tg}(\varphi/2); \quad y = \operatorname{tg}(\varphi_0/2); \quad a = \operatorname{tg} \frac{\pi l}{d}; \quad p_2(y) = p_1(\varphi_0),$$

получим согласно [3], что

$$\Gamma'(y) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2} p_2(\eta)}{(1 + \eta^2)(\eta - y)} d\eta. \quad (7)$$

При $p_2(y) = p = \text{const}$ интеграл в (7) вычислим аналитически. Будем иметь

$$\Gamma'(y) = -2\pi p a \sqrt{1+a^2} \frac{y}{(1+y^2)\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Интегрируя полученное равенство с учетом (6) и учитывая, что $y = \operatorname{tg}(\varphi/2)$, определяем

$$\Gamma(\varphi) = p \ln \left| \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi l/d)} - \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi l/d) - \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi l/d)} + \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi l/d) - \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}} \right|. \quad (8)$$

Таким образом, получено аналитическое решение уравнения (2) в классе функций, отличных от тригонометрических полиномов.

На рис. 3 показаны аналитическое и численное решения уравнения (4) при $p_2(y)=1$; $d=4$; $l=1$. Цифрой 1 на рис.3 отмечено аналитическое решение, цифрой 2 – численное.

Аналитическое решение построено по формуле (8), численное получено с использованием метода граничных элементов (МГЭ). Применены граничные элементы с постоянной аппроксимацией плотности внутри элемента. Гиперсингулярные интегралы с такой плотностью вычислены аналитически по формулам [6]. Этот вариант МГЭ по сути является методом дискретных особенностей [10]. При использовании 80 элементов достигнута точность $\varepsilon=10^{-3}$. Отметим, что при $d=2l$ и $p_2(y)=\operatorname{const}$ как численно, так и аналитически не удается получить решение уравнений (2),(5), так как в этом вырожденном случае расстояние между трещинами в периодической системе равно нулю.

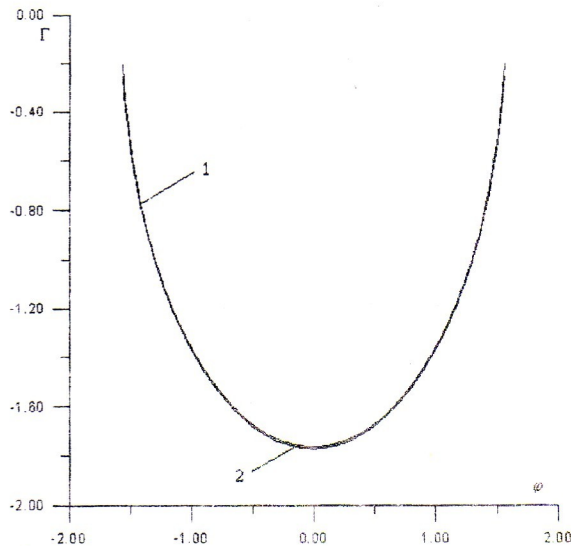


Рис.3. Аналитическое и численное решения уравнения (5).

По найденному аналитическому или численному решению с помощью формул, полученных в [3,9], определяются коэффициенты интенсивности напряжений в пластине, ослабленной периодической системой трещин, что позволяет оценить прочность элементов конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. ОНТИ, М. – Л., 1935, 134с.
2. Габдулахаев Д.В., Душков П.Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода// Изв. вузов. Математика.–1973.– №7.– С.12-24.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.–Киев: «Наукова думка», 1976, 444с.
4. Mykhas'kiv V.V., Stapaniuk O.I. Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack //Mechnica Int. J. Italian Assotiation of Theoretical and Applied Mechanics.– 2001.–V.31.–N4.–P. 479-495.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. 92 с. Харьков 2000
6. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. //Доповіді Національної Академії Наук України.–2001.–№3.–С.27-31.
7. Еселева Е.В., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Гиперсингулярное уравнение в задаче определения аэродинамических нагрузок на лопасти ветроустановок. // Проблемы машиностроения .–2000 № 6053-4. –С. 62–69.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.–1100 с.
9. Михаськив В.В. Моделирование трехмерного нестационарного взаимодействия трещин в упругом теле при помощи функций их раскрытия //Прикладная механика.–2001.–т32.–№1.–С.83-92.
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, теории упругости и дифракции волн. М.: ТОО «Янус», 1995, 520 с.