

УДК 519.63:532.5

Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень

А. Я. Бомба, А. П. Сафоник

*Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна*

У роботі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії) при моделюванні процесів очищення рідини від багатокomпонентних домішок сорбційними фільтрами. Побудовано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі, що описується системою нелінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін». На цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

Ключевые слова: *фільтрування, багатокomпонентна концентрація, конвекція, дифузія, масообмін, асимптотика, нелінійні сингулярно збурені задачі.*

В работе рассматриваются и решаются вопросы учета обратного влияния определяющих факторов (концентрации загрязнения жидкости и осадка) на характеристики среды (коэффициенты пористости, фильтрации, диффузии) на примере очистки жидкости от многокомпонентных примесей в сорбционных фильтрах. Построен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи, которая описывается системой нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен». На этом основании проведен компьютерный эксперимент.

Ключові слова: *фільтрування, многокомпонентная концентрация, конвекция, диффузия, массообмен, асимптотика, нелинейные сингулярно возмущенные задачи.*

In work questions of the accounting of return influence of characteristics of process (concentration of pollution of liquid and a deposit) on environment characteristics (factors of porosity, a filtration, diffusion) on an example of purification of liquid from multicomponent impurity in sorption filters are considered and solved. The algorithm of numerical and asymptotic approach of the solution of the corresponding modeling task which is described by system nonlinear singular the indignant differential equations of the convection-diffusion-mass exchange type is received. On this basis it is made the corresponding computer experiment.

Key words: *filtering, multicomponent concentration, convection, diffusion, mass exchange, asymptotic, nonlinear singular the indignant tasks.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Впродовж останнього десятиліття склад стічних вод (СВ) промислових підприємств зазнав значних змін. Це пов'язано зі зниженням об'єму СВ внаслідок застосування ресурсозберігаючих виробничих процесів, відмовою від будівництва локальних очисних споруд та ін. Вивчення складу домішок в металовмісних СВ різних промислових підприємств країн Східної Європи, України і Росії свідчить: у СВ спостерігається досить великим (у 10-30 разів) збільшення змісту іонів важких металів (ІВМ); концентрації супутніх компонентів (амонія, нафтопродуктів, органічних сполук і інших домішок)

можуть перевищувати концентрації ІВМ в десятки разів; значно підвищилася (в середньому в 3.5 разів і навіть більше) концентрація мінеральних солей, комплексних іонів; концентрація забруднюючих речовин, рН і буферна СВ варіюються в широких межах [1].

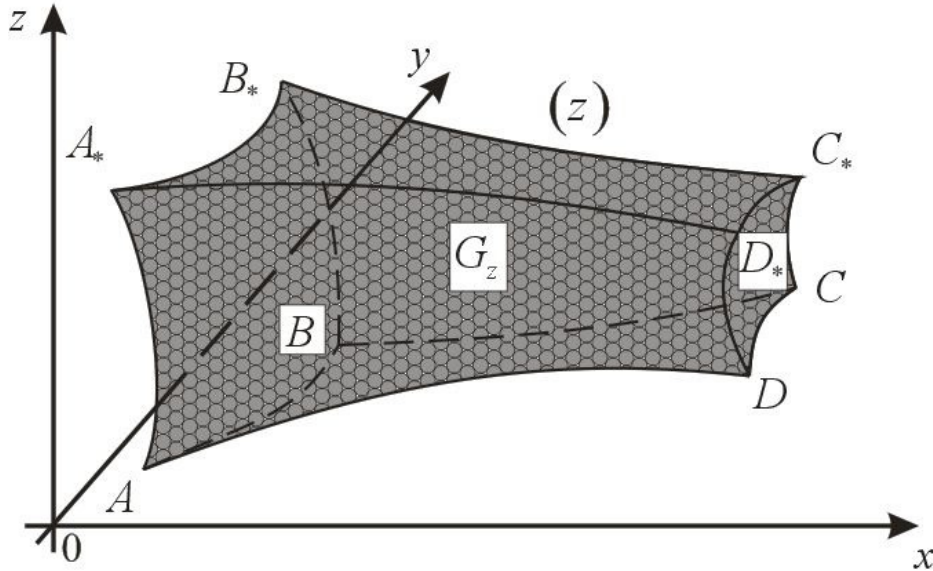


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (фільтр).

В результаті на централізовані очисні споруди поступають різні за характеристиками СВ, а в приймальних місткостях водоочисних станцій утворюється суміш металовмісних багатокомпонентних СВ. У зв'язку з цим слід враховувати вплив багатокомпонентних вказаних вод на процеси, параметри і технології очищення, оскільки очисні споруди, існуючі на багатьох підприємствах, не можуть забезпечити отримання очищеної води нормативної якості. Крім того, для країн СНД (у тому числі України), в порівнянні з країнами Заходу, характерні жорсткіші вимоги відносно концентрацій ІВМ, аніонів, і інших домішок [2].

Проведений в [3-14] аналіз результатів досліджень свідчить про наявність складної структури взаємозалежностей різних факторів, що визначають процеси фільтрації та фільтрування через пористі середовища, які не враховувались у "традиційних" (класичних, феноменологічних) моделях таких систем. Врахування ж різних взаємовпливів, а також різних додаткових факторів, що вносяться до "вихідної" (базової) моделі з метою більш глибокого вивчення процесу, часто приводить дослідників до необхідності побудови громіздких і малоефективних (з точки зору чисельної реалізації і практичного використання) математичних моделей. Проте у багатьох практично важливих випадках при дослідженні таких процесів можна підходити з точки зору моделювання різного роду збурень відомих (ідеалізованих, усереднених, базових) фонів.

Відповідно до розглянутих вище проблем, у роботі розглядаються та вирішуються питання врахування зворотного впливу визначальних факторів

(концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії) при моделюванні процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень сорбційними фільтрами.

Розглянемо криволінійний паралелепіпед (фільтр) $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках і ребрах, еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z : f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z : f_2(x, y, z) = 0\}$, а також поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z : f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z : f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z : f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z : f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 1). Припускаємо [12], що частинки забруднення домішок речовини можуть переходити з одного стану в інший (процеси захоплення-відриву, сорбції-десорбції), при цьому концентрації забруднення впливають на характеристики відповідного середовища (пористість, коефіцієнт фільтрації, тощо). Концентрація забруднення є багатокомпонентною ($C = C(x, y, z, t) = (C_1, \dots, C_m) = (C_1(x, y, z, t), \dots, C_m(x, y, z, t))$), де C_i концентрація i -ої компоненти домішки ($i = \overline{1, m}$) у рідкому фільтруючому середовищі. Відповідний процес фільтрування з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу (концентрації забруднення рідини й осідання) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, масообміну й т. ін. по аналогії з [11, 12, 13]) для області $G = G_z \times (0, \infty)$ опишемо наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \sum_{l, g=1, l \neq g}^m k_{l, g} C_l C_g = D_i \Delta C_i + \varepsilon \alpha_i P, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u C_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q P, \end{cases} \quad (1)$$

$$C_i \Big|_{ABB_*A_*} = C_{i,*}(M, t), \quad \frac{\partial C_i}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD_*C_*} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \\ C_i(x, y, z, 0) = C_{i,0}^0(x, y, z), \quad P(x, y, z, 0) = P_0^0(x, y, z); \quad (2)$$

$$\bar{v} = \kappa(P) \bar{\nabla} \bar{\varphi}, \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (3)$$

$$\bar{\varphi} \Big|_{ABB_*A_*} = \bar{\varphi}_*, \quad \bar{\varphi} \Big|_{CDD_*C_*} = \bar{\varphi}^*, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (4)$$

де $P(x, y, z, t)$ – концентрація осаду у внутрішній точці (x, y, z) області завантаження в момент часу t ; β_i , α_i – коефіцієнти, що характеризують масові об'єми осадження домішок та відірваних від гранул завантаження частинок за одиницю часу, $\sigma(P)$ – пористість середовища ($\sigma(P) = \sigma_0 - \varepsilon \sigma_* P(x, y, z, t)$); $\bar{\nabla}$ – оператор Гамільтона; $\Delta = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}$ – оператор Лапласа; $D_i = d_{0i} \varepsilon$ – коефіцієнт дифузії домішки у рідині; σ_* , d_{0i} , ε – тверді параметри (характеризують відповідний м'який параметр $\sigma(P)$), що знаходяться експериментальним способом, ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складників

процесу над іншими, а саме, десорбційні складники та явища міжкомпонентної взаємодії цього процесу є малими порівняно з іншими його складниками); $C_i^*(M, t)$, $C_{i,0}^0(x, y, z)$ — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G ; M — довільна точка відповідної поверхні; $\bar{\varphi}$ — фільтраційний потенціал ($0 < \bar{\varphi}_* \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\varphi}^* < \infty$); $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}| > v_* \gg \varepsilon$); $\kappa = K(P)$ — коефіцієнт фільтрації відповідного пористого середовища ($K(P)$ — задана, достатнього гладка функція); \vec{n} — зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Прийmemo, що задача (3), (4) на просторове конформне відображення $G_w \mapsto G_z$ ($G_w = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \bar{\varphi}_* < \varphi < \bar{\varphi}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ — відповідна G_z область комплексного потенціалу) при деякому усередненому значенні $\kappa \in$ розв'язана [1, 7], зокрема, побудовано динамічну сітку та поле швидкості \vec{v} , обчислено фільтраційну витрату $Q = Q_* Q^*$. Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi, \eta)$, $y = y(\varphi, \psi, \eta)$, $z = z(\varphi, \psi, \eta)$ у системі (1) та умовах (2), приходимо до відповідної задачі для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(\rho)c_i)}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_i}{\partial \varphi} + \beta_i c_i + \varepsilon \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_l c_g = \\ = \varepsilon d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_i}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) + \varepsilon \alpha_i \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_u - \varepsilon \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho, \end{cases} \quad (5)$$

$$c_i(\bar{\varphi}_*, \psi, \eta, t) = c_i^*(\psi, \eta, t), \quad c_{i,\varphi}(\bar{\varphi}^*, \psi, \eta, t) = 0,$$

$$c_{i,\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = c_{i,\psi}(\varphi, Q_*, \eta, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, 0, t) = c_{i,\eta}(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0,$$

$$c_i(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0(\varphi, \psi, \eta), \quad \rho(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (6)$$

де $c_i = c_i(\varphi, \psi, \eta, t) = C_i(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$,

$$\rho = \rho(\varphi, \psi, \eta, t) = P(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$b_1 = b_1(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \psi)^2, \quad b_2 = b_2(\varphi, \psi, \eta) = (\vec{\nabla} \eta)^2, \quad d_1 = d_1(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \psi,$$

$$d_2 = d_2(\varphi, \psi, \eta) = \Delta \eta$$

$$v^2(\varphi, \psi, \eta) = v_x^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) +$$

$$+ v_y^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) + v_z^2(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta))$$

(див., напр., [11, 12]).

2. Асимптотика розв'язку

Розв'язок задачі (5), (6) з точністю $O(\varepsilon^n)$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів [11, 12, 13]:

$$c_i = c_{i,0} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j c_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{i,j} + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{\Pi}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j} + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j} + R_{c,i}, \quad (7)$$

$$\rho = \rho_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \rho_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{P}_j + \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \tilde{P}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{P}}_j + \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon^{j/2} \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j + R_\rho, \quad (8)$$

де $R_{c,i}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon), R_\rho(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ — залишкові члени, $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t)$, $\rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ — члени регулярної частини асимптотики ($i = \overline{1, m}; j = \overline{0, n}$); $\Pi_{i,j}(\xi, \psi, \eta, t), \bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на виході з фільтра) ($j = \overline{0, 2}$), $\tilde{\Pi}_{i,j}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t), \tilde{P}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$ — в околі $\varphi = \bar{\varphi}^*$ (поправки на вході у фільтр) ($j = \overline{0, 2}$), а функції $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ та $\tilde{P}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t), \tilde{P}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t), \tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = \overline{0, 3}$) — в околах $\psi = 0, \psi = Q^*, \eta = 0, \eta = Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтра), відповідно; $\xi = (\varphi^* - \varphi)/\varepsilon, \tilde{\xi} = (\varphi - \varphi^*)/\varepsilon, \tilde{\psi} = \psi/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\psi}} = (Q^* - \psi)/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\eta} = \eta/\sqrt{\varepsilon}, \tilde{\tilde{\eta}} = (Q^* - \eta)/\sqrt{\varepsilon}$ — «розтяги» відповідних змінних.

Шляхом підстановки співвідношень (7), (8) у (5), (6) і виконання стандартної процедури «прирівнювання» коефіцієнтів біля однакових степенів ε , одержимо такі задачі для знаходження $c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t), \rho_j(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = \overline{0, n}$)

$$\begin{cases} \sigma_0 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial c_{i,0}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,0} = 0, & \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0}, \\ c_{i,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_{i,0}^0, & c_{i,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) = c_{i^*}(\psi, \eta, t), \\ \rho_0(\varphi, \psi, \eta, 0) = \rho_0^0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -\sigma_* \rho_{j-1} \frac{\partial c_{i,j}}{\partial t} + v^2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \varphi} + \beta_i c_{i,j} + \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1} = U_{i,j}, \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} = \sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1}, \\ c_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, \quad c_{i,j}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0, \\ \rho_j(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

Внаслідок послідовного розв'язування задач (9)-(10) матимемо [1-3]

$$c_{i,0} = \begin{cases} c_{i,*}(\psi, \eta, t - f) \exp \left[-\beta_i \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{v^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} \right], & t \geq f, \\ c_{i,0}^0(f^{-1}(f - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \exp \left[-\frac{\beta_i t}{\sigma_0} \right], & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_0 = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,0} \right) d\tilde{t} + \rho_0^0,$$

$$c_{i,j} = \begin{cases} e^{-\lambda_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{U_{i,j}(s, \psi, \eta, f(s, \psi, \eta) - f + t)}{v^2(s, \psi, \eta)} e^{\lambda_2(s, \psi, \eta, t)} ds, & t \geq f, \\ -\frac{e^{-\lambda_1}}{\sigma_*} \int_0^t \frac{U_{i,j}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\rho_{j-1}(f^{-1}(s + f - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} e^{\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, s)} ds, & t < f, \end{cases}$$

$$\rho_j = \int_0^t \left(\sum_{u=1}^m \beta_u c_{u,j} - \sum_{q=1}^m \alpha_q \rho_{j-1} \right) d\tilde{t},$$

$$\text{де } U_{i,j}(\varphi, \psi, \eta, t) = d_{0i} \left(v^2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \varphi^2} + b_1 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \psi^2} + b_2 \frac{\partial^2 c_{i,j}}{\partial \eta^2} + d_1 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \psi} + d_2 \frac{\partial c_{i,j}}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \alpha_i \rho_{j-1} - \sum_{l,g=1, l \neq g}^m k_{l,g} c_{l,j-1} c_{g,j-1}, \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\lambda_1(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho_{j-1}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f) c_{i,j}(s, \psi, \eta, f(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - f)}{v^2(s, \psi, \eta)} ds,$$

$$\lambda_2(\varphi, \psi, \eta, t) = -\beta_i \int_0^t \frac{\rho_{j-1}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s}) c_{i,j}(f^{-1}(\tilde{s} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{s})}{\sigma(f^{-1}(\tilde{t} + f(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\tilde{s},$$

$$f(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds}{v^2(s, \bar{\psi}, \bar{\eta})} \text{ — час проходження відповідною частинкою шляху від}$$

точки $(x(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi_*, \bar{\psi}, \bar{\eta})) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), y(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}), z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}))$

$z(\varphi, \bar{\psi}, \bar{\eta}) \in G_z$ уздовж відповідної лінії течії (як перетину деяких двох поверхонь $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}$, $0 \leq \bar{\psi} \leq Q_*$, $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}$, $0 \leq \bar{\eta} \leq Q^*$), f^{-1} — функція, обернена до f відносно змінної φ (відзначимо, що така функція існує, оскільки $v^2(\varphi, \psi, \eta)$ — неперервно диференційовна, обмежена, додатно визначена функція).

Функції $\Pi_{ij}(\xi, \psi, \eta, t)$, $\bar{P}_j(\xi, \psi, \eta, t)$ ($i=0, 1$), $\tilde{\Pi}_{i,j}(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{P}_j(\tilde{\xi}, \psi, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\Pi}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{P}}_j(\varphi, \tilde{\mu}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}_{i,j}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{\tilde{\tilde{P}}}_j(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ та $\hat{\tilde{\tilde{\tilde{\Pi}}}}_{i,j}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{\tilde{\tilde{\tilde{P}}}}_j(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ знаходяться аналогічно [12]. Оцінка залишкових членів проводиться аналогічно [13].

3. Результати числових розрахунків

Наведемо результати числового експерименту для фільтра, обмеженого поверхнями: $f_1(x, y, z) = x - 1,25$; $f_2(x, y, z) = (x - 2,5466434)^2 + y^2 + z^2 - 0,1187841$, $f_3(x, y, z) = (x - 1,25)^2 + (y - 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124$; $f_4(x, y, z) = (x - 1,25)^2 + z^2 + (y + 3,8471044)^2 + z^2 - 16,3627124$; $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = [x(x - 2,5) + y^2 + z^2]^2 + 6,25y^2 - 36,4276695z^2$.

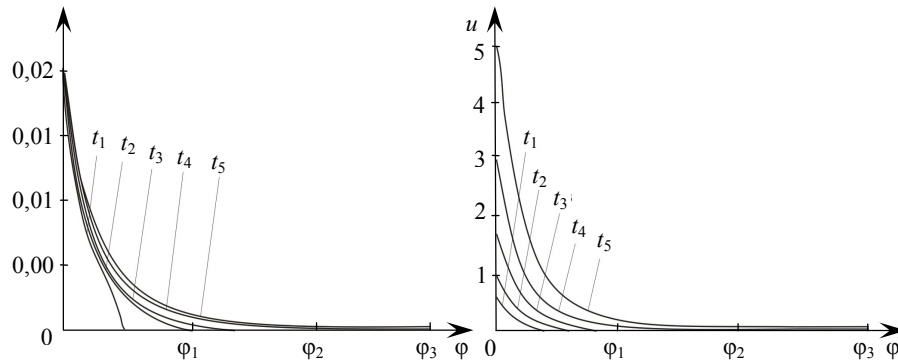


Рис. 2. Розподіл концентрації розчинної речовини й осаду вздовж лінії течії $\{(\varphi, \psi, \eta) : \bar{\varphi}_* \leq \varphi \leq \bar{\varphi}^*\}$ у моменти часу

$$t_i \in \{0,21; 0,38; 0,52; 0,65; 0,87\} \quad (i = \overline{1,5})$$

Для такого фільтра характерна значна просторовість засипки, «монотонність звуження» в напрямку від входу до виходу фільтра (вибір саме такої форми «підказує» практика), та взаємна ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєве для спрощення процедури побудови просторового конформного відображення). На основі [13] побудовано розрахункову динамічну сітку

в G_z : $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_i \stackrel{\text{df}}{=} \bar{\varphi}_* + [(\bar{\varphi}^* - \bar{\varphi}_*)i]/n, i = \overline{0, n}$, $\psi(x, y, z) = \bar{\psi}_j \stackrel{\text{df}}{=} (Q_*j)/m$,
 $j = \overline{0, m}, \eta(x, y, z) = \bar{\eta}_k \stackrel{\text{df}}{=} (Q_*k)/l, k = \overline{0, l}$ для $\bar{\varphi}_* = 0$, $\bar{\varphi}^* = 8000$, $\kappa = 1$, $n = 30$,
 $m = 16$, $l = 16$ (параметри n, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,651$, обчислено величини швидкості фільтрації $|v|$ та функцій $d_{i0}(\varphi, \psi, \eta)$ ($i = 1, 2$). При цьому нев'язки розрахованих конструкцій не перевищують 0,001 [12].

На рис. 2 показано розподіл концентрації $c_1(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$, $c_2(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ і $\rho(\varphi, \psi_5, \eta_5, t)$ вздовж ліній течії для $c_{1,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 170 \exp(-\varphi^2)$ мг/л, $c_{2,0}^0(\varphi, \psi, \eta) = 35 \exp(-\varphi^2)$ мг/л, $c_1^*(\psi, \eta, t) = 170$ мг/л, $c_2^*(\psi, \eta, t) = 35$ мг/л, $\rho_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$, $\beta_1 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-1}$, $\alpha_1 = 0.35 \text{ c}^{-1}$, $\beta_2 = 0.2 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.1 \text{ c}^{-1}$, $\sigma_0 = 0.5$, $\sigma_* = 1$, $\varepsilon = 0.001$.

На рис. 3 представлені дані, отримані в результаті натурних експериментів (відповідає індексу «exp») відповідно до класичної моделі Мінца (відповідає індексу «М») [14] і розраховані по формулах (4) (відповідає індексу «р»). Розрахунки по формулах (4) дають більше точні в порівнянні із класичною моделлю Мінца. Отримані результати дають можливість розраховувати динаміку просування концентрації забруднення й осідання уздовж фільтра (рис. 4).

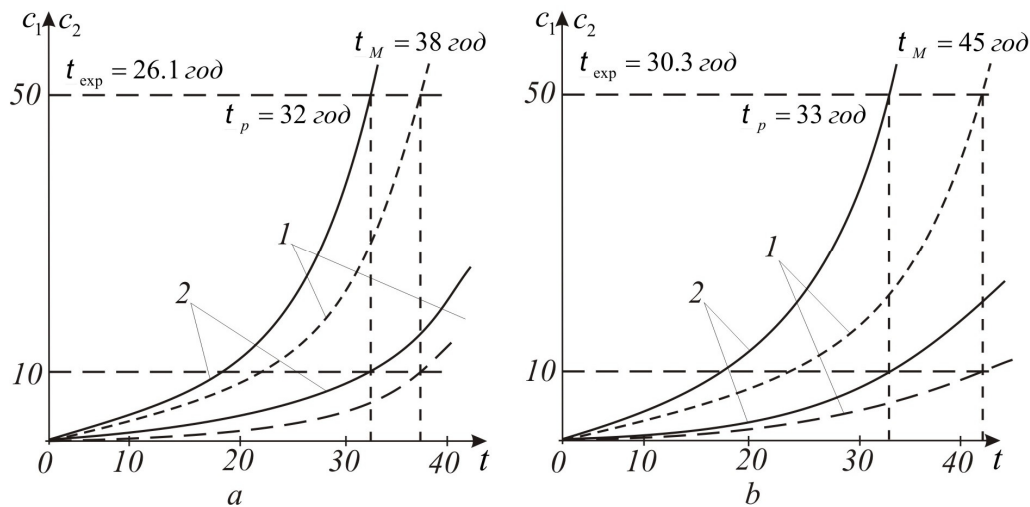


Рис. 3. Графіки розподілу концентрації домішок на виході фільтра протягом часу захисної дії: 1 – за Мінцом; 2 – по формулах (4) при $d = 0.78$ мм, $v = 10$ м/год (а) і $d = 0.78$ мм, $v = 9$ м/год (б).

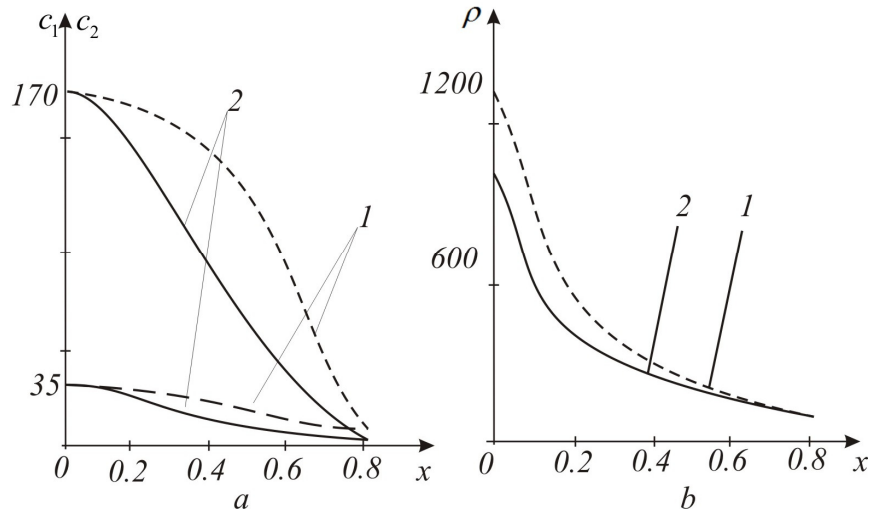


Рис. 4. Розподіл концентрації домішок (а) і осаду (б) уздовж фільтра в момент часу $t = 26$ год: 1 – за Мінцом; 2 – по формулах (4) при $d = 0.78$ мм, $v = 10$ м/год.

4. Висновки за результатами і напрямком подальших досліджень

У роботі побудована просторову математичну модель, яка враховує зворотний вплив визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії, масообміну і т.ін.) при моделюванні процесів очищення рідин від багатоконпонентних забруднень сорбційними фільтрами.

Запропоновано алгоритм розв'язання відповідної модельної задачі. Наведено результати розрахунків розподілу концентрації домішок і масового об'єму домішок по висоті фільтруючого пористого завантаження для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях швидкості фільтрування, і характеристик завантаження фільтра для сорбційних фільтрів з урахуванням зворотного впливу концентрації осаду на характеристики середовища й швидкість фільтрування. Проведено порівняльну характеристику даних, отриманих експериментальним шляхом, розрахованих на основі класичної моделі Мінца й отриманих нами в результаті розрахунків (зокрема, згідно з даними, наведеним на рис. 3-4, бачимо, що точність наших розрахунків значно більше в порівнянні з розрахунками отриманими відповідно до класичної моделі Мінца).

ЛІТЕРАТУРА

1. Филипчук В. Л. Рационализация технологических схем очистки металлосодержащих многокомпонентных сточных вод промышленных предприятий // ХиТВ. – 2002, – т. 24, – № 6, – С. 567-576.
2. Долина Л.Ф. Современная техника и технологии для очистки сточных вод от солей тяжелых металлов: Монография. – Дн-вск.: Континент, - 2008. - 254 с.
3. Elimelech, M. Predicting collision efficiencies of colloidal particles in porous media, Water Research., 26(1), 1-8, 1992.

4. Elimelech, M. Particle deposition on ideal collectors from dilute flowing suspensions: Mathematical formulation, numerical solution and simulations. *Separations Technology*, 4, 186-212, 1994.
5. Jegatheesan, V. Effect of surface chemistry in the transient stages of deep bed filtration, PhD Dissertation, University of Technology Sydney, pp. 300, 1999.
6. Johnson, P. R. and Elimelech, M. Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption, *Langmuir*, 11(3), 801-812, 1995.
7. Ison, C.R. and Ives, K.J. Removal mechanisms in deep bed filtration, *Che. Engng. Sci.*, 24, 717-729, 1969.
8. Ives, K.J. Theory of filtration, special subject No.7, Int. Water Supply congress, Vienna, 1969.
9. Ives, K.J. Rapid filtration, *Water Research*, 4(3), 201-223, 1970.
10. Petosa, A.R., Jaisi, D.P., Quevedo, I.R., Elimelech, M., and Tufenkji, N. "Aggregation and Deposition of Engineered Nanomaterials in Aquatic Environments: Role of Physicochemical Interactions", *Environmental Science & Technology*, Volume 44, September 2010, pages 6532–6549.
11. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція – дифузія" / Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. – Рівне : НУВГП, 2008. – 252 с.
12. Бомба А.Я. Нелинейные задачи типа фильтрация-конвекция-диффузия-массообмен при условиях неполных данных / Бомба А. Я., Гаврилюк В.И., Сафоник А.П., Фурсачик Е.А. // Монография. – Ривне : НУВГП, 2011. – 276 с.
13. Бомба А.Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків просторових модельних задач процесу фільтрування / Андрій Бомба, Юрій Климюк, Андрій Сафоник, Віктор Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-38.
14. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Минц Д. М. // М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.