УДК 519.812.4+519.865.7

Моделювання динаміки активної системи з екзомоделлю Харрода-Домара

С. М. Іванов, В. О. Касьянов
Херсонський національний технічний університет, Україна
Київський національний авіаційний університет, Україна

Стаття стосується проблеми побудови динамічної моделі активної системи. Застосовується варіаційний принцип при формуванні суб'єктивних переваг. Розглядається взаємний вплив суб'єктивних переваг з екзогенною моделлю Харрода-Домара. Виділяються дві альтернативи. Обговорюється модель кількості суб'єктивної інформації. Використовується ентропія Хартлі. Побудована повна динамічна модель активної системи, яка описується рівнянням Харрода-Домара. Наведені результати можуть бути використані при створенні інтелектуальних систем моделювання та підтримання прийняття рішень у різних предметних областях.

Ключові слова: *диференціальне рівняння Харрода-Домара, переваги, альтернативи, активна система.*

Статья касается проблемы построения динамической модели активной системы. Применяется вариационный принцип при формировании субъективных предпочтений. Рассматривается взаимное влияние субъективных предпочтений с экзогенной моделью Харрода-Домара. Выделяются две альтернативы. Обсуждается модель количества субъективной информации. Используется энтропия Хартли. Построена полная динамическая модель активной системы, которая описывается уравнением Харрода-Домара. Приведенные результаты могут быть использованы при создании интеллектуальных систем моделирования и поддержке принятия решений в различных предметных областях.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение Харрода-Домара, предпочтения, альтернативы, активная система.*

The article deals with problem of constructing the dynamic model of active system. The variational principle in the formation of subjective preferences is used. The mutual influence of the subjective preferences on the exogenous Harrod-Domar model is considered. The two alternatives are proposed. The model of amount of subjective information is discussed. Hartley entropy is used. The complete dynamic model of active system is given, which is described by the equation of Harrod-Domar. The given results can be used to create intelligent systems of modeling data and decision-support entities in different domains.

Key words: *differential equation of Harrod-Domar, preferences, alternatives, active system.*

1. Вступ

У галузі теорії активних систем (ТАС) [1] однією з актуальних є проблема побудови динамічної математичної моделі досліджуваної системи, яку можна назвати активною. Змістовно, у [1,2,3] наведено, що систему, у центрі якої знаходиться суб'єкт і в значній мірі визначає її функціонування, називають активною, а також застосовується теорія ігор для визначення оптимальної стратегії агента. Але зараз, окрім використання відомих рішень, що наведені в [1,2,3], спостерігається пошук нових рішень, наприклад, застосування варіаційного принципу формування переваг, який детально описаний у [4].

У [2,3] стверджується, що модель активної системи повинна враховувати прояви «активності» суб'єктів, що підлягають керуванню. Також у [5] зазначається, що дослідження економічних процесів у їх взаємозв’язку включає моделювання впливу об’єктивних економічних законів і факторів суб’єктивного характеру, під впливом яких вони перебувають. Застосуємо суб'єктивний аналіз [4], де постулюється варіаційний принцип формування переваг, розглядаються ендогенні процеси та досліджується вплив на екзогенні процеси, наприклад такі, що описуються моделлю Вальраса-Леонтьєва. Як розуміється у [6], суб’єктивний аналіз – це напрям теоретичних досліджень поведінки (діяльності з оцінювання альтернатив, вибору альтернатив та слідування зробленому вибору) суб’єкта у різних ситуаціях. Але дослідження динаміки взаємного впливу суб'єктивних переваг на дохід, який є прикладом екзогенної [4] моделі Харрода-Домара, не проводились і тому потребують подальшого розгляду.

Тому мета даної статті полягає у тому, щоб показати можливість використання варіаційного принципу [4] при моделюванні динаміки взаємного впливу переваг з екзогенною моделлю Харрода-Домара.

Використавши запропонований підхід у [4], необхідно скласти математичну модель макроекономічної активної системи, що описується рівнянням Харрода-Домара.

2. Теоретичне рішення

Застосувавши суб'єктивний аналіз [4], врахувавши, що переваги є ендогенним фактором, як описано в [4], то використаємо такий приклад екзогенного процесу як модель функціонування макроекономічної системи – диференціальне рівняння Харрода-Домара.

Модель макроекономічної динаміки з неперервним часом, запропонованої Харродом і Домаром [7], описує динаміку доходу $Y(t)$, який розглядається як сума споживання $C(t)$ та інвестицій $I(t)$. Економіка вважається закритою, чистий експорт дорівнює нулю і державні витрати не виділяються. Основне припущення: швидкість зростання доходу пропорційна інвестиціям: $I(t) = B \cdot \frac{\partial Y}{\partial t}$, де B - коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу. Динаміка споживання є заданою функцією.

У [7] стверджується, що вказані обмеження істотно звужують описання динаміки реальних макроекономічних процесів. Однак простота цієї моделі дозволяє не тільки більш глибоко зрозуміти вплив інвестицій на дохід, але й провести моделювання динаміки взаємного впливу суб'єктивних переваг з описаною екзогенною моделлю і таким чином створити модель активної макроекономічної системи, що описується рівнянням Харрода-Домара.

Розглянемо спільне моделювання динаміки переваг з екзогенною моделлю Харрода-Домара при наявності взаємного впливу. Нехай існує макроекономічна активна система, що включає в якості суб'єкта – споживача, що отримує дохід і приймає рішення щодо його розподілення на інвестиції й споживання, керуючись своїми перевагами. Переваги до інвестицій й споживання описує динамічна функція переваг, що зазвичай нормована (1):

$$\pi(t,\sigma_1)+\pi(t,\sigma_2)=1, \qquad (1)$$

де $\pi(t,\sigma_1)=\pi_1$ - невід'ємне значення функції переваг щодо інвестицій, а $\pi(t,\sigma_2)=\pi_2$ - невід'ємне значення функції переваг щодо споживання.

У моделі Харрода-Домара передбачається, що споживання з плином часу зростає за експоненціальним законом з постійним темпом r, але при побудові активної системи, сформулюємо наступне припущення: нехай швидкість зміни споживання з плином часу прямо пропорційно відповідному значенню функції переваг, помноженому на його поточне значення.

При відомих початкових значеннях $C(0)=C_0$ сформулюємо задачу Коши (2):

$$\begin{cases} \dfrac{dC(t)}{dt}=\pi_2\cdot r\cdot C(t), \\ C(0)=C_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Знайдемо розв'язання даної задачі, що представляє собою диференційне рівняння з роздільними змінними (3):

$$C(t)=C_0\cdot e^{\pi_2\cdot r\cdot t} \qquad (3)$$

Динаміка зміни доходу Харрода-Домара [7] $Y(t)$ є рішенням диференціального рівняння (4):

$$Y(t)=B\cdot Y'(t)+C(t) \qquad (4)$$

З урахуванням запропонованих припущень, що описуються моделями (1), (2) і (3), запишемо модель Харрода-Домара таким чином, щоб вона враховувала суб'єктивні переваги π_1 і π_2. Для цього, використавши умову нормування (1), припишемо $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i, n=2$ до $Y(t)$, а потім, замість $Y(t)$, підставимо праву частину рівняння (4), а замість $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i$, підставимо $(\pi_1+\pi_2)=\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i, n=2$, тоді:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i\cdot Y(t)=B\cdot Y'(t)+C(t), \models\Rightarrow (\pi_1+\pi_2)\cdot Y(t)=B\cdot Y'(t)+C(t), \models\Rightarrow$$

$$\models\Rightarrow \pi_1 Y(t)+\pi_2 Y(t)=Y(t)=\pi_1\left[B\cdot Y'(t)+C(t)\right]+\pi_2\left[B\cdot Y'(t)+C(t)\right], \models\Rightarrow$$

Розкривши дужки, отримаємо (5):

$$\models\Rightarrow Y(t)=\pi_1 B\cdot Y'(t)+\pi_1 C(t)+\pi_2 B\cdot Y'(t)+\pi_2 C(t). \qquad (5)$$

Позначка $\models\Rightarrow$ означає слідування перетворення від одного математичного виразу до іншого.

У загальному випадку загальне розв'язання диференційного рівняння (4) має вид (6):

$$Y(t)=C_1 e^{t/B}+y_1(t), \qquad (6)$$

де $y_1(t)$ - яка-небудь функція, що задовольняє рівнянню (4), а C_1 - константа інтегрування. Частковий розв'язок $y_1(t)$ визначається за заданою функцією $C(t)$ і, як правило [7], шукається у тому самому виді, що і функція $C(t)$.

Для визначення загального розв'язання рівняння (5), його частковий розв'язок будемо шукати у виді (7):

$$y_1(t) = A \cdot e^{\pi_2 rt}. \tag{7}$$

Знайдемо константу A таким чином, щоб ця функція задовольняла рівнянню (5). Підставивши функцію $y_1(t)$ і її похідну в рівняння (5), отримаємо (8):

$$\begin{gathered} Ae^{\pi_2 rt} = \pi_1\pi_2 BrAe^{\pi_2 rt} + \pi_1 C_0 e^{\pi_2 rt} + \pi_2^2 BrAe^{\pi_2 rt} + \pi_2 C_0 e^{\pi_2 rt}, |\Rightarrow \\ |\Rightarrow A = \pi_1\pi_2 BrA + \pi_1 C_0 + \pi_2^2 BrA + \pi_2 C_0, |\Rightarrow \\ |\Rightarrow A = \frac{C_0}{1 - \pi_1\pi_2 Br - \pi_2^2 Br} |\Rightarrow A = \frac{C_0}{1 - Br\pi_2}. \end{gathered} \tag{8}$$

Відповідно з (6), загальне розв'язання рівняння в (5) має вид (9):

$$Y(t) = C_1 e^{t/B} + Ae^{\pi_2 rt}. \tag{9}$$

Константу інтегрування C_1 знайдемо, підставивши у рівняння (9) $t = 0$: $Y(0) = C_1 + A, |\Rightarrow C_1 = Y(0) - A$. Тому динаміка $Y(t)$ при відомому початковому значенні $Y(0) = Y_0$ описується функцією (10):

$$\begin{gathered} Y(t) = \left[Y(0) - A\right] \cdot e^{t/B} + Ae^{\pi_2 rt}, |\Rightarrow \\ |\Rightarrow Y(t) = \left[Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br\pi_2}\right] \cdot e^{t/B} + \left[\frac{C_0}{1 - Br\pi_2}\right] \cdot e^{\pi_2 rt}. \end{gathered} \tag{10}$$

Проаналізуємо та розглянемо числові приклади цих функцій (3) і (10) з плином часу, причому функція переваг, у даному випадку, не виділяється явно, а функція інвестицій дорівнює, як у [7]: $I(t) = Y(t) - C(t)$.

Нехай задані початкові умови, як у [7]: $Y_0 = 1000$, $C_0 = 200$, $B = 2$, $r = 0.75$. Проаналізуємо вплив суб'єктивних переваг.

Якщо $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, то модель (10) повністю перетворюється у модель Харрода-Домара (рис. 1) (11):

$$\begin{cases} Y(t) = \left[Y_0 - A\right] e^{t/B} + Ae^{rt}, \\ A = \dfrac{C_0}{1 - Br}. \end{cases} \tag{11}$$

Згідно з [7], економіка, яка описується рівнянням Харрода-Домара, існує до тих пір, поки $Y(t)$ не стане дорівнювати нулю. Знайдемо час існування такої економіки t_ℓ, тобто коли $Y(t_\ell) = 0$. Розв'язавши рівняння (10) при зазначеній умові та при наведених початкових значеннях вище, отримаємо, що $t_\ell = 5.01105$. Може настати момент часу, коли $Y(t)$ буде від'ємним, а це означає, що випуск безприбутковий, витратний. Коли $I(t)$ буде від'ємним – це означає, що така економіка має борги.

Тепер знайдемо момент часу t_m, коли рівень доходу [7] буде максимальним, тобто рівність нулю екстремуму функції $Y(t)$. Цей момент часу визначається з умови: $Y'(t_m) = 0, |\Rightarrow t_m = 3.38919$.

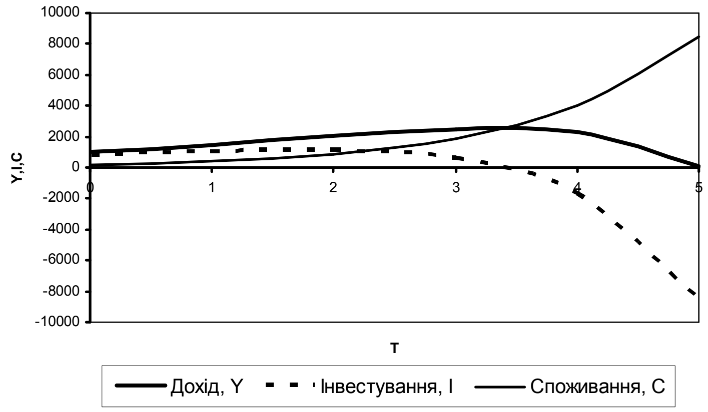

Рис. 1. Траєкторії доходу, інвестування і споживання при $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$

Якщо $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$, то модель (10) приймає наступний вид: $Y(t) = (Y_0 - C_0) \cdot e^{t/B} + C_0$, що є випадком, коли споживання у системі не змінюється з плином часу, тобто $C(t) = C_0 = \text{const}$. І якщо $Y_0 > C_0$, то дохід у такій економічній системі необмежено зростає з плином часу за експоненціальним законом (рис. 2).

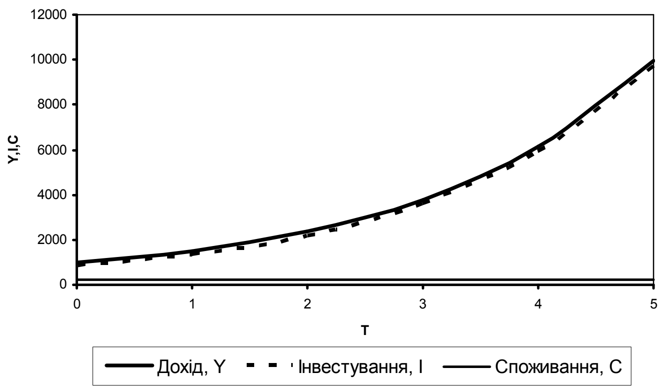

Рис. 2. Траєкторії доходу, інвестування і споживання при $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$

Якщо $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$, то суб'єкт рівномірно розподіляє свій дохід на споживання та інвестиції (рис. 3).

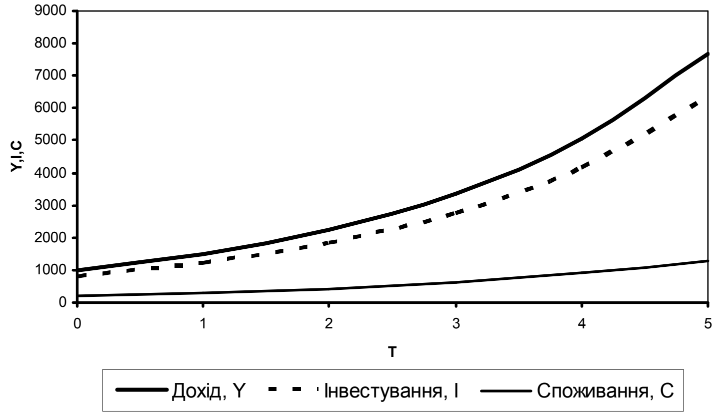

Рис. 3. Траєкторії доходу, інвестування і споживання при $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

Якщо ж перевага до збереження $\pi_1 = 0.3$, а до споживання $\pi_2 = 0.7$, то час існування такої економіки не довгий, $t_\ell = 8.92574$, а момент часу, коли рівень доходу максимальний $t_m = 6.97414$ (рис. 4).

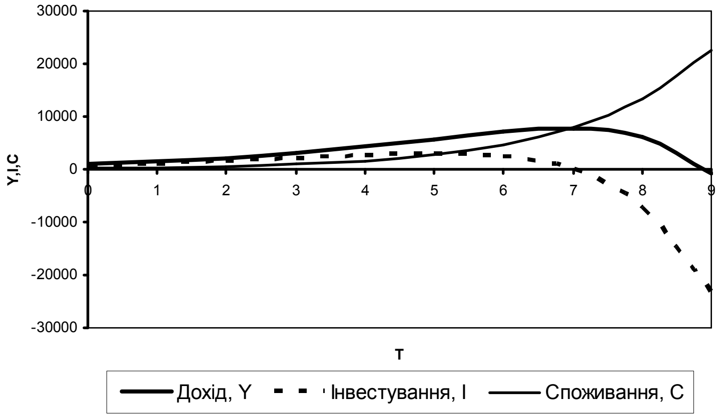

Рис. 4. Траєкторії доходу, інвестування і споживання при $\pi_1 = 0.3$, $\pi_2 = 0.7$

Попередні графіки, що зображені на рис. 1 – 4, демонструють вплив незмінних з часом переваг, а при розгляді динаміки переваг, необхідно зобразити динамічну функцію $\pi(t, \sigma_i)$ у явному вигляді. Застосування варіаційного принципу при формуванні переваг на основі суб'єктивної інформації $I_s(t, \sigma_i)$ про альтернативу σ_i було змістовно розглянуто у [8], що представлено формулами (12):

$$\pi(t, \sigma_i) = \frac{I_s(t, \sigma_i) e^{\beta I_s(t, \sigma_i)}}{\sum_{i=1}^{n} I_s(t, \sigma_i) e^{\beta I_s(t, \sigma_i)}}, \; I_s(t, \sigma_i) = \frac{1}{-\ln P(t, \sigma_i)}, \tag{12}$$

де $P(t,\sigma_i)$, а точніше, як у [8], $P_q(t,\sigma_i)$, $q=\overline{(1..m)}$ – це ймовірність того, що суб'єкт «отримав», зрозумів і усвідомив інформацію про альтернативу $\sigma_i, i=\overline{(1..n)}, \sigma_i \in S_a$ від джерела інформації q, $q=\overline{(1..m)}$ – індекс джерела інформації, m – кількість цих джерел; n – кількість альтернатив, S_a – множина альтернатив.

У даній статті не розглядається передача інформації від різних джерел, тому індекс «q» опускається.

Модель $I_s(t,\sigma_i)$, яка представлена у (12), приймає вид негентропії. Як зазначено у [9], негентропія вживатися головним чином у двох значеннях: як кількість інформації, яка дорівнює різниці між початковою (до отримання повідомлення) і кінцевою (після отримання повідомлення) ентропій, і як величина, зворотна ентропії, що виражає упорядкованість матеріальних об'єктів.

Використавши таку модель кількості (суб'єктивної [8,10]) інформації, як величину, зворотну ентропії:

$$I_s(t,\sigma_i)=\frac{1}{H(t,\sigma_i)}=\frac{1}{-\ln P(t,\sigma_i)},$$

де $H(t,\sigma_i)=-\ln P(t,\sigma_i)$ – хартлієвська ентропія [11], можна знайти кількість суб'єктивної інформації про кожну альтернативу. Одиницями вимірювання кількості суб'єктивної інформації у даному випадку є «нат$^{-1}$».

Ймовірність $P(t,\sigma_i)$ має бути нормованою, тобто $\sum_{i=1}^{n} P(t,\sigma_i)=1$. Врахувавши описаний експеримент у [8], для розрахунку цієї ймовірності наведемо наступне припущення: нехай ймовірності $P(t,i)$ розподілені за показовим законом, тобто (13):

$$P(t,i)=\begin{cases}0, t \le 0,\\ 1-e^{-\lambda_i t}, t>0,\end{cases} \qquad (13)$$

де $P(t,i)$ - це ймовірність того, що суб'єкт «отримав», зрозумів і усвідомив інформацію про альтернативу $i=\overline{(1..n)}$, яку можна розрахувати за допомогою проведення експерименту, описаного у [8]. У даному випадку позначення альтернативи «σ_i» замінено позначенням «i», щоб показати, що ці значення $P(t,i)$ можуть відрізнятися від $P(t,\sigma_i)$, адже ці значення $P(t,i)$ не нормовані.

Слід також зазначити, що ймовірності $P(t,i)$ та $P(t,\sigma_i)$ можуть бути розраховані не тільки за допомогою проведення описаного експерименту в [8], а також експертними методами.

У даній статті розглядаються тільки дві альтернативи, тому нормування представляється формулою: $P(t,\sigma_i)=\frac{P(t,i)}{P(t,1)+P(t,2)}$, де у даному випадку $P(t,1)$ є ймовірність до інвестування і $P(t,2)$ є ймовірність до споживання.

Отримавши початкове значення $P(t,i)$, яке, згідно з (13), дорівнює $P(t,i) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, де λ_i - деяка величина, яку назвемо інтенсивністю інформаційних потоків щодо інвестування та споживання, $i = \overline{(1..2)}$, а t - час. Коли $t < 0$ - це час, коли інформація про альтернативи, як описано у [8], не поступала у систему, тому ймовірність $P(t,i)$ її отримання дорівнює нулю, а коли $t = 0$, то інформація лише тільки почала поступати, суб'єкту не достатньо часу для того, щоб сформувати відношення до альтернатив, що й показує (13). Слід зазначити, що одиницею виміру інтенсивності λ_i є «1/одиниця виміру часу». Якщо час t вимірювати тижнями або днями, то одиницею виміру інтенсивності λ_i є «1/тиж» або «1/день». Таким чином, при використанні (13), отримаємо ймовірність без одиниці виміру. З урахуванням зазначеного, інтенсивність $\lambda_i = \dfrac{1}{\Delta\tau_i}$, $\Delta\tau_i = \tau_i^2 - \tau_i^1$, $i = \overline{(1..2)}$, де $\Delta\tau_i$ - інтервал часу, який займає процес передачі інформації від джерела до суб'єкта; τ_i^1 - момент часу початку передачі, а τ_i^2 - момент часу, коли інформація «отримана», зрозуміла та усвідомлена (тобто сформована суб'єктивна інформація – активний ресурс [4]); $\tau_i^2 > \tau_i^1$. Розглядається передача інформації без перешкод.

Прийнявши $t = 1$, отримаємо $P(t,i) = 1 - e^{-\lambda_i}$, звідки знайдемо у даний період часу дві величини λ_i, $i = \overline{(1..2)}$. Динаміка λ_i у даній статті не розглядається, але, при наявності статистичних даних, можна знайти цю функцію, що залежить від часу t, або за рекомендаціями експерта щодо динаміки або швидкості зміни λ_i також можна скласти цю функцію.

Підставивши отриману динамічну функцію переваг (12) у рівняння (10), отримаємо наступну модель (14):

$$\begin{cases} Y(t) = \left(Y_0 - A\right)\cdot e^{t/B} + A \cdot e^{\frac{I_s(t,\sigma_2)e^{\beta I_s(t,\sigma_2)}}{\sum\limits_{i=1}^{2} I_s(t,\sigma_2)e^{\beta I_s(t,\sigma_2)}} rt}, \\ A = \dfrac{C_0}{1 - Br\left[\dfrac{I_s(t,\sigma_2)e^{\beta I_s(t,\sigma_2)}}{\sum\limits_{i=1}^{2} I_s(t,\sigma_2)e^{\beta I_s(t,\sigma_2)}}\right]}. \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином, невідомими параметрами є тільки початкові значення Y_0, C_0, B, r та λ_1 - інтенсивність інформаційних потоків щодо інвестування і λ_2 - інтенсивність інформаційних потоків щодо споживання, які відповідно до певного періоду часу можуть визначатися, наприклад експериментально, за методикою, описаною у [8].

3. Висновки

Використавши варіаційний принцип, побудована динамічна активна модель макроекономічної системи, що описується рівнянням Харрода-Домара. Отримана модель (14) дозволяє розраховувати і досліджувати динаміку доходу, інвестицій і споживання. Отримані результати можна застосувати для створення інтелектуальної системи дослідження інформаційного керування суб'єктивними перевагами, доходом, споживанням та інвестиціями у макроекономічній активній системі, що описується рівнянням Харрода-Домара, а також підтримання прийняття рішень суб'єктів у різних предметних галузях.

Подальші дослідження можуть бути присвячені застосуванню варіаційного принципу при моделюванні динаміки взаємного впливу суб'єктивних переваг із іншими екзогенними моделями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999. – 128 с.
2. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999. – 104с.
3. Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. М.: ЗАО «ПМСОФТ», 2004. – 227с.
4. Касьянов В. О. Суб'єктивний аналіз: Монографія. – К.:НАУ, 2007. – 512 с. – Рос. мовою.
5. Стеценко Т.О. Аналіз регіональної економіки: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2002.— 116 с.
6. Касьянов В.О., Прокопенко О.Є., Шипитяк Т.В. Дворівнева модель генерації переваг // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. - Харьков: Технологический центр, 2011. - №2/3 (50). – С.35-40.
7. Годун Б.В., Соколова Н.А. Моделирование экономической динамики. Курс лекций. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. - Херсон, ХНТУ, 2006. – 74 с.
8. Соколова Н.А., Иванов С.Н. Модели субъективной информации как основного фактора формирования предпочтений субъектов // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. - №4(43). – С.116 – 119.
9. Вяткин В.Б. Синергетическая теория информации. Часть 1. Синергетический подход к определению количества информации // Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2008. – №10(44).– Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2008/10/pdf/12.pdf .
10. Соколова Н.А., Иванов С.Н. Моделирование информационной системы управления принятием решения субъекта // Моделирование и анализ информационных систем: междунар. науч. конф., 6-7 февраля 2012 г., труды. – Ярославль, 2012. С. 70-72.
11. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: Сов. радио, 1975. – 424 с.

Надійшла у першій редакції 21.03.2012, в останній - 21.11.2012.