УДК 517.948

О линейных непрерывных системах, ассоциированных с операторными узлами

Е. А. Когут, З. Ф. Назыров, А. А. Янцевич
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье изучаются непрерывные линейные открытые системы, ассоциированные с локальными и метрическими узлами. Рассмотрена операция сцепления систем и свойства их характеристических функций. В работе показано, что любую открытую линейную систему можно расширить только за счет пространств входа и выхода до ассоциированной с соответствующими узлами. Причем при специальном входе внутреннее состояние расширенной системы совпадает с внутренним состоянием исходной системы, и на одном из каналов выхода получаем выход исходной системы.

Ключевые слова: *линейная система, операторный узел, локальный, метрический, индефинитный, сцепление.*

В статті вивчаються неперервні лінійні відкриті системи, асоційовані з локальними та метричними вузлами. Розглянута операція зчеплення систем і властивості їх характеристичних функцій. В роботі показано, що будь-яку відкриту лінійну систему можна розширити тільки за рахунок просторів входу та виходу до асоційованої з відповідними вузлами. Причому при спеціальному вході внутрішній стан розширеної системи співпадає з внутрішнім станом вихідної системи, і на одному з каналів виходу отримаємо вихід вихідної системи.

Ключові слова: *лінійна система, операторний вузол, локальний, метричний, індефінітний, зчеплення.*

Continuous linear open systems associated with local and metric colligations are studied in the paper. The operation of system conjunction and their characteristic functions are examined. It is proved in the paper that every open linear system can be expanded to the associated with corresponding colligations only using input and output spaces. Besides, for the special input, the internal state of the expanded system coincides with the internal state of the initial system and in the one of output channels we obtain output of the initial system.

Key words: *linear system, operator colligation, local, metric, indefinite, coupling.*

Совокупность трех гильбертовых пространств E, H, F, для которых определены отображения $x(t)=R\cdot u(t)$ и $v(t)=W\cdot u(t)$, где $u\in E$, $x\in H$, $v\in F$, называется открытой системой. Пространства E, H, и F называются соответственно пространствами входа, внутреннего состояния и выхода системы [1]. В пространствах E и F наряду с дефинитной метрикой $(\cdot,\cdot)$ с помощью операторов инволюции J_E и J_F введены индефинитные метрики $[\cdot,\cdot]_E$, $[\cdot,\cdot]_F$, которые связаны соотношениями

$$[u_1,u_2]_E=(J_E u_1,u_2);\quad [v_1,v_2]_F=(J_F v_1,v_2). \tag{1}$$

Оператор T - основной оператор системы ($T\in[H,H]$), а операторы, осуществляющие связь между пространствами E и H и H и F, называются каналовыми операторами. Самосопряженный оператор J, квадрат которого равен единице, называется оператором инволюции ($J = J^*$; $J^2 = I$), где I - единичный оператор.

Оператор, сопряженный к φ по отношению к индефинитной метрике, будем обозначать φ^+, в отличие от обычного гильбертова сопряжения, который обозначается φ^*.

Пусть φ - линейный ограниченный оператор, отображающий пространство E в H ($\varphi \in [E,H]$, $x \in H$, $u \in E$),

$$(\varphi u, x) = (u, \varphi^* x) = (J_E u, J_E \varphi^* x) = [u, \varphi^+ x].$$

Таким образом, $\varphi^+ = J_E \varphi^*$.

Все входящие в рассмотрение операторы будем считать линейными ограниченными операторами. Если основной оператор системы T неограничен или плохо обусловлен, то удобно рассмотреть открытую систему в виде

$$iT\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \varphi u(t); \tag{2}$$

$$v(t) = \varphi^+ \frac{dx}{dt} + u(t), \tag{3}$$

т. е. основной оператор T находится при производной.

Сперва рассмотрен случай, когда $E = F$ и $J_E = J_F$. Множество линейных ограниченных операторов, действующих из E в H , обозначается $[E,H]$. Совокупность двух гильбертовых пространств E и H и трех операторов $T \in [H,H]$, $\varphi \in [E,H]$ и $J \in [E,E]$ называется локальным узлом $\Delta = (T,H,\varphi,E,J)$, если выполняется условие

$$\frac{T - T^*}{i} = \varphi\varphi^+. \tag{4}$$

Оператор J называется метрическим оператором узла. Как видно, оператор T отличен от самосопряженного. Если операторы T и φ, определяющие открытую систему, связаны условием (4), то система называется ассоциированной с локальным операторным узлом. В статье рассмотрена также операция сцепления открытых систем (в данном случае непрерывных), когда выход первой из систем является входом второй системы. Важной является и передаточная функция входа на выход, которая называется характеристической функцией открытой системы. Приведены свойства указанной функции открытой системы (2) - (3). Также рассмотрены открытые системы, ассоциированные с метрическими операторными узлами, т. е. узлами, когда основной оператор системы отличен от унитарного и операторы, определяющие такую систему, удовлетворяют условиям (9) - (10).

В статье показано, как любую линейную систему в пространстве состояний можно расширить до ассоциированной с операторным узлом только за счет «расширения» внешних пространств, причем при специальном входном сигнале внутреннее состояние расширенной системы совпадает с внутренним состоянием исходной системы, а один из выходов расширенной системы совпадает с выходом исходной системы.

Для систем (2) - (3), ассоциированных с локальным узлом, выполняется закон сохранения метрики

$$\frac{d}{dt}\left\|x(t)\right\|_H^2 = \left\|v(t)\right\|_E^2 - \left\|u(t)\right\|_E^2. \tag{5}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(x(t),x(t)\right) = \left(\frac{d}{dx}x(t),x(t)\right) + \left(x(t),\frac{dx(t)}{dt}\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt},-iT\frac{dx(t)}{dt}+\varphi u(t)\right) +$$

$$+\left(-iT\frac{dx(t)}{dt}+\varphi u(t),\frac{dx(t)}{dt}\right) = i\left(T^*\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(t)}{dt}\right) + \left(\frac{dx(t)}{dt},\varphi u(t)\right) -$$

$$-i\left(T\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(t)}{dt}\right) + \left(\varphi u(t),\frac{dx(t)}{dt}\right) =$$

$$= -i\left(\left(T-T^*\right)\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(t)}{dt}\right) + \left[\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},u(t)\right]_E + \left[u(t),\varphi^+\frac{dx(t)}{dt}\right]_E =$$

$$= \left(\varphi\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(t)}{dt}\right) + \left[\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},u(t)\right]_E + \left[u(t),\varphi^+\frac{dx(t)}{dt}\right]_E =$$

$$= \left[\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},\varphi^+\frac{dx(t)}{dt}\right]_E + \left[\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},u(t)\right]_E + \left[u(t),\varphi^+\frac{dx(t)}{dt}\right] + \left[u,u\right]_E - \left[u,u\right]_E =$$

$$= \left[u(t)+\varphi^+\frac{dx(t)}{dt},u(t)+\varphi^+\frac{dx(t)}{dt}\right]_E - \left[u(t),u(t)\right]_E = \left[v(t),v(t)\right]_E - \left[u(t),u(t)\right]_E.$$

Будем искать решение системы (2) - (3) в виде $x(t)=e^{i\lambda t}x_0$, где $x_0 \in H$, $\lambda=\overline{\lambda}$.

$$iTi\lambda e^{i\lambda t}x_0 + e^{i\lambda t}x_0 = \varphi u(t);$$

$$\left(I-\lambda T\right)x(t) = \varphi u(t),\ x(t) = \left(I-\lambda T\right)^{-1}\varphi u(t) = -\frac{1}{\lambda}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi u(t);$$

$$v(t) = u(t)+\varphi^+ i\lambda e^{i\lambda t}x_0 = u(t)+\varphi^+ i\lambda x(t) = u(t)+i\lambda\varphi^+ \times$$

$$\times\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi u(t) = \left[I-i\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi\right]u(t),$$

где $\frac{1}{\lambda}$ принадлежит регулярному множеству оператора T. Таким образом, упомянутые выше отображения входа на внутреннее состояние и входа на выход открытой системы имеют вид

$$R(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi, \quad w(\lambda) = I-i\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi. \tag{6}$$

$w(\lambda)$ естественным образом продолжается для $\lambda \neq \overline{\lambda}$, в теории несамосопряженных операторов называется характеристической оператор-функцией. Если существует обратный оператор T^{-1}, определенный на всем пространстве, то решение $x(t)$ задачи Коши (2) - (3) имеет вид

$$x(t) = e^{iT^{-1}t}x_0 - i\int_0^t e^{iT^{-1}(t-s)}T^{-1}\varphi u(s)\,ds\ .$$

Рассмотрим теперь непрерывную систему, ассоциированную с метрическим операторным узлом. Теперь у нас три гильбертовых пространства E, H, F - пространства входа, внутреннего состояния и выхода системы. Во внешних пространствах с помощью операторов инволюции $J_E \in [E,E]$ ($J_E = J_E^*$, $J_E^2 = I_E$) и $J_F \in [F,F]$ ($J_F = J_F^*$, $J_F^2 = I_F$) заданы индефинитные метрики $[u_1,u_2]_E = (Ju_1,u_2)_E$ и $[v_1,v_2]_F = (J_F v_1,v_2)_F$.

$$\begin{cases} T\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi u(t); \quad T \in [H,H]; \Phi \in [E,H]; \\ v(t) = \psi\dfrac{dx}{dt} + Ku(t); \qquad \psi \in [H,F], K \in [E,F]. \end{cases} \tag{7}$$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x(t) = -T\dfrac{dx}{dt} + \Phi u(t); \\ v(t) = \psi\dfrac{dx}{dt} + Ku(t), \end{cases} \tag{8}$$

т. е. в векторном виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Операторная матрица $S = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix}$ J-унитарна, т. е.

$$SS^+ = I_{H\oplus F}; \quad S^+S = I_{H\oplus E}; \tag{9}$$

$$S^+ = \begin{pmatrix} -T^* & \psi^+ \\ \Phi^+ & K^+ \end{pmatrix},$$

где $\Phi^+ = J_E\Phi^*$, $\psi^+ = \psi^* J_F$, $K^+ = J_F K^* J_F$. Соотношения (9) в развернутом виде имеют вид

$$\begin{cases} TT^* + \Phi\Phi^+ = I_H; \\ \psi\psi^+ + KK^+ = I_F; \\ \Phi K^+ = T\psi^+; \\ K\Phi^+ = \psi T^*; \end{cases} \quad \begin{cases} T^*T + \psi^+\psi = I_H; \\ \Phi^+\Phi + K^+K = I_E; \\ \psi^+K = T^*\Phi; \\ K^+\psi = \Phi^+T. \end{cases} \tag{10}$$

Для таких систем, ассоциированных с метрическими узлами справедлив следующий закон сохранения метрики:

$$\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\|_H^2 - \left\|x(t)\right\|_H^2 = \left\|u(t)\right\|_E^2 - \left\|v(t)\right\|_F^2 . \tag{11}$$

Действительно,

$$\left(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(t)}{dt}\right) = \left(x(t),x(t)\right) = \left(\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right) - \left(-T\frac{dx}{dt}+\Phi u,-T\frac{dx}{dt}+\Phi u\right) =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right) - \left(T\frac{dx}{dt},T\frac{dx}{dt}\right) + \left(T\frac{dx}{dt},\Phi u\right) + \left(\Phi u,T\frac{dx}{dt}\right) - \left(\Phi u,\Phi u\right) =$$

$$= \left(\left(I-T^*T\right)\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dx}{dt},T^*\Phi u\right) + \left(T^*\Phi u,\frac{dx}{dt}\right) - \left[\left(I-K^+K\right)u,u\right]_E =$$

$$= \left[\psi\frac{dx}{dt},\psi\frac{dx}{dt}\right]_F + \left(\frac{dx}{dt},\psi^+ Ku\right) + \left(\psi^+ Ku,\frac{dx}{dt}\right) - \left[u,u\right]_E + \left[Ku,Ku\right]_F =$$

$$= \left[\psi\frac{dx}{dt}+Ku,\psi\frac{dx}{dt}+Ku\right]_F - \left[u,u\right]_E = \left[v,v\right]_F - \left[u,u\right]_E .$$

Введем понятие сцепления операторов и сцепление открытых систем, когда в рассматриваемой цепочке на вход следующей системы подается выход предыдущей системы. Пусть операторы T_1 и T_2 действуют в пространствах H_1 и H_2 соответственно ($T_1 \in \left[H_1,H_1\right]$, $T_2 \in \left[H_2,H_2\right]$). Пространство H определим как прямую сумму H_1 и H_2 ($H = H_1 \oplus H_2$). Сцеплением операторов T_1 и T_2 назовем оператор $T \in \left[H,H\right]$, если

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 + C_T ,$$

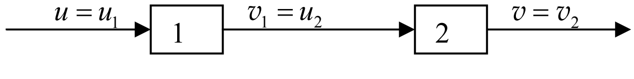
где P_i ортопроекторы H на H_i, а оператор C_T отображает H_1 в H_2 и аннулирует H_2. Оператор T, определенный таким образом, называется сцеплением операторов T_1 и T_2 и обозначается $T = T_1 \curlyvee T_2$, [1]. Подпространство H_2 является инвариантным подпространством пространства H для оператора T.

Пусть даны две открытые системы вида (7) - (8), ассоциированные с метрическими узлами Δ_1 и Δ_2,

$$\Delta_i = \left(J_E, H_i \oplus E; \begin{pmatrix} T_i & \Phi_i \\ \psi_i & K_i \end{pmatrix}, H_i \oplus F, J_F\right) \quad (i = 1,\, 2)$$

$$\begin{cases} T_1\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi_1 u_1(t); \\ v_1(t) = \psi_1\dfrac{dx}{dt} + K_1u_1(t); \end{cases} \quad \begin{cases} T_2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \Phi_2 u \\ v_2(t) = \psi_2\dfrac{dy}{dt} + K_2u_2(t). \end{cases}$$

Схематически сцепление систем можно записать так:



Таким образом

$$\begin{cases} x(t) = -T_1 \dfrac{dx}{dt} + \Phi_1 u_1(t); \\ y(t) = -T_2 \dfrac{dy}{dt} + \Phi_2 \left(\psi_1 \dfrac{dx}{dt} + K_1 u_1(t) \right); \\ v_2(t) = \psi_2 \dfrac{dy}{dt} + K_2 \left(\psi_1 \dfrac{dx}{dt} + K_1 u_1(t) \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ -\Phi_2\psi_1 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix} u_1(t); \\ v_2(t) = (K_2\psi_1, \psi_2) \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} + K_2 K_1 u_1(t). \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда следует, что коэффициент сцепления равен $(-\Phi_2\psi_1)$ и вид операторов $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 K_1 \end{pmatrix}$; $\psi = (K_2\psi_1, \psi_2)$; $K = K_2 \cdot K_1$ (или $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 K_1$; $\psi = K_2\psi_1 P_1 + \psi_2 P_2$). Нетрудно проверить, что сцепление открытых систем, ассоциированных с метрическими узлами, есть открытая система, также ассоциированная с метрическим узлом. После того как получен явный вид всех операторов, определяющих сцепление, нетрудно проверить справедливость соотношений (10).

Пусть вход системы имеет вид $u(t) = e^{i\lambda t} u_0$. Будем искать $x(t)$ решение системы (7) в виде $x(t) = e^{i\lambda t} x_0$, где $x_0 \in H$ и $v(t) = e^{i\lambda t} v_0$. Тогда

$$x_0 = -\frac{i}{\lambda}\left(T - \frac{i}{\lambda} I\right)^{-1} \Phi u_0; \quad v_0 = \left[K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi \right] u_0 = W_T(\lambda) u_0 .$$

$W_T(\lambda)$ в теории неунитарных операторных узлов называют характеристической функцией, т. к. она определяет оператор T с точностью до унитарной эквивалентности на главной части. В теории линейных систем $W_T(\lambda)$ называется передаточной функцией. Таким образом, два отображения пространства входа E на внутреннее состояние H и входа на выход F имеют вид

$$R(\lambda) = -\frac{i}{\lambda}\left(T - \frac{i}{\lambda} I\right)^{-1} \Phi \text{ и } W(\lambda) = K + \psi \left(T - \frac{i}{\lambda} I \right)^{-1} \Phi. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что произведение характеристических функций сцепляемых систем есть характеристическая функция сцепления,

$$W_T(\lambda)=K_2K_1+\left(K_2\psi_1P_1+\psi_2P_2\right)\begin{pmatrix} T_1-\frac{i}{\lambda}I_1 & 0 \\ -\Phi_2\psi_1 & T_2-\frac{i}{\lambda}I_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2K_1\end{pmatrix}=$$

$$=K_2K_1+\left(K_2\psi_1P_1+\psi_2P_2\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1} & 0 \\ \left(T_2-\frac{i}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\psi_1\left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1} & \left(T_2-\frac{i}{\lambda}I_2\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2K_1\end{pmatrix}=$$

$$=K_2K_1+K_2\psi_1\left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1+\psi_2\left(T_2-\frac{i}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\psi_1\left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1+$$

$$+\psi_2\left(T_2-\frac{i}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2K_1=K_2\left[K_1+\psi_1\left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1\right]+$$

$$+\psi_2\left(T_2-\frac{i}{\lambda}I_2\right)^{-1}\Phi_2\left[K_1+\psi_1\left(T_1-\frac{i}{\lambda}I_1\right)^{-1}\Phi_1\right]=W_{T_2}(\lambda)W_{T_1}(\lambda).$$

Рассмотрим сцепление непрерывных открытых систем, ассоциированных с локальными узлами;

$$\begin{cases} iT_1\dfrac{dx}{dt}+x(t)=\varphi_1u_1(t); \\ v_1(t)=u_1(t)+\varphi_1^+\dfrac{dx}{dt}; \end{cases}\qquad \begin{cases} iT_2\dfrac{dy}{dt}+y(t)=\varphi_2u_2(t); \\ v_2(t)=\varphi_2^+\dfrac{dy}{dt}+u_2(t); \end{cases}$$

$$v_1(t)=u_2(t).$$

Сцепление таких двух непрерывных систем рассматривается подобно тому, как было в случае, когда непрерывные системы были ассоциированы с метрическими узлами,

$$\begin{cases} x(t)=-iT_1\dfrac{dx}{dt}+\varphi_1u_1(t); \\ y(t)=-iT_2\dfrac{dy}{dt}+\varphi_2\left(u_1(t)+\varphi_1^+\dfrac{dx}{dt}\right); \\ v_2(t)=\varphi_2^+\dfrac{dy}{dx}+u_1(t)+\varphi_1^+\dfrac{dx}{dt}, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x(t) = -iT_1 \dfrac{dx}{dt} + \varphi_1 u_1(t); \\ y(t) = \varphi_2 \varphi_1^+ \dfrac{dx}{dt} - iT_2 \dfrac{dy}{dt} + \varphi_2 u_1(t); \\ v_2 = \varphi_1^+ \dfrac{dx}{dt} + \varphi_2^+ \dfrac{dy}{dt} + u_1(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iT_1 & 0 \\ \varphi_2\varphi_1^+ & -iT_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} u_1(t) = \\ = -i \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} u_1(t); \\ v_2(t) = \left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right) \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} + u_1(t). \end{cases}$$

Внутренний оператор сцепления $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix}$, а каналовый оператор $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

Характеристическая функция сцепления, как отмечалось выше (6), равна

$$W_T(\lambda) = I - i\varphi^+ \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \varphi$$

и выполняется узловое соотношение для сцепления,

$$\frac{T - T^*}{i} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{i} \begin{pmatrix} T_1^* & -i\varphi_1\varphi_2^+ \\ 0 & T_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{T_1 - T_1^*}{i} & \varphi_1\varphi_2^+ \\ \varphi_2\varphi_1^+ & \dfrac{T_2 - T_2^*}{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_1^+ & \varphi_1\varphi_2^+ \\ \varphi_2\varphi_1^+ & \varphi_2\varphi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right) = \varphi\varphi^+ ;$$

$$W_T(\lambda) = I - i\left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right) \begin{pmatrix} T_1 - \dfrac{1}{\lambda} I_1 & 0 \\ i\varphi_2\varphi_1^+ & T_2 - \dfrac{1}{\lambda} I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = I - i\left(\varphi_1^+, \varphi_2^+\right) \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1} & 0 \\ -i\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\varphi_1^+\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1} & \left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=I-$$

$$-i\left(\varphi_1^+,\varphi_2^+\right)\begin{pmatrix} \left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1 \\ -i\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\varphi_1^+\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1+\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2 \end{pmatrix}=$$

$$=I-i\varphi_1^+\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1-\varphi_2^+\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2\varphi_1^+\left(T_1-\frac{1}{\lambda}I_1\right)^{-1}\varphi_1-$$

$$-i\varphi_2^+\left(T_2-\frac{1}{\lambda}I_2\right)^{-1}\varphi_2=W_{T_2}\left(\lambda_2\right)\cdot W_{T_1}\left(\lambda\right). \tag{15}$$

Рассмотрим

$$I-W^+\left(\lambda\right)W\left(\lambda\right)=I-\left[I-i\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}\right)\varphi\right]\left[I+i\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi\right]=$$

$$=\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\left\{i\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)-i\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)-\varphi\varphi^+\right\}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\left\{\frac{T-T^*}{i}-\varphi\varphi^++\frac{i}{\lambda}I-\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right\}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}i\frac{\overline{\lambda}-\lambda}{|\lambda|^2}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}=\frac{2\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2}\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi$$

и

$$I-W\left(\lambda\right)W^+\left(\lambda\right)=I-\left[I-i\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi\right]\left[I+i\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi\right]=$$

$$=i\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi-i\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi-$$

$$-\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\varphi\varphi^+\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\left(i\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)-i\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)-\varphi\varphi^+\right)\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}i\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)I\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}\right)^{-1}\varphi=$$

$$=\frac{2\operatorname{Im}\lambda}{|\lambda|^2}\varphi^+\left(T-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}\left(T^*-\frac{1}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\varphi$$

и характеристическая функция есть двустороннее J-сжатие, если $\operatorname{Im}\lambda>0$, и двустороннее растяжение, если $\operatorname{Im}\lambda<0$.

Если открытая система (7) ассоциирована с метрическим узлом, то

$$I-W^+(\lambda)\cdot W(\lambda)=I-\left[K^++\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+\right]\left[K+\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)\Phi\right]=$$

$$=I-K^+K-K^+\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi-\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+K-$$

$$-\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi=$$

$$=\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\left[\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)-\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)T-T^*\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)-\right.$$

$$\left.-\psi^+\psi\right]\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi=$$

$$=\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\left[\frac{1}{|\lambda|^2}-1\right]\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi;$$

$$I-W(\lambda)W^+(\lambda)=I-\left[K+\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\right]\left[K^++\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+\right]=$$

$$=I-KK^+-K\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+-\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi K^+-$$

$$-\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+=$$

$$=\psi\psi^+-\psi T^*\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+-\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}\right)^{-1}T\psi^+-$$

$$-\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\Phi\Phi^+\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+=$$

$$=\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\left[\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)-\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)T^*-T\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)-\right.$$

$$\left.-\Phi\Phi^+\right]\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+=\psi\left(T-\frac{i}{\lambda}I\right)^{-1}\left[\frac{1}{|\lambda|^2}-1\right]\left(T^*+\frac{i}{\overline{\lambda}}I\right)^{-1}\psi^+.$$

В этом случае характеристическая функция системы является двусторонним J-сжатием внутри единичного круга и двусторонним J-растяжением вне его.

Теперь рассмотрим произвольную непрерывную систему

$$\begin{cases} iT\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)=\varphi u(t); \\ v(t)=Ku(t)+\psi\dfrac{dx(t)}{dt}; \\ x(0)=x_0; \end{cases} \tag{16}$$

в предположении, что оператор $K\in[E,F]$ обратим и операторы T, φ, ψ, K не связаны никакими соотношениями. Как и ранее, $u(t)\in E$; $v(t)\in F$; $x(t)\in H$. Обозначим $Ku(t)\equiv u_1(t)$, тогда $u_1(t)\in F$. Перепишем уравнения открытой системы в виде

$$\begin{cases} x(t)=-iT\dfrac{dx(t)}{dt}+\varphi_1 u_1(t); \\ v(t)=\psi\dfrac{dx(t)}{dt}+u_1(t); \\ x(0)=x_0; \end{cases}$$

где $\varphi K^{-1}=\varphi_1\in[F,H]$, и в матричном виде (17) запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -iT & \varphi_1 \\ \psi & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ u_1(t) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Воспользуемся способом расширения открытых систем до ассоциированных, предложенным в работе [2].

Включим оператор $T\in[H,H]$ в некоторый локальный операторный узел $\Delta_0=(T,H,\varphi_0,E_0,J_0)$, где $\dfrac{T-T^*}{i}=\varphi_0\varphi_0^+$ и $\varphi_0^+=J_0\varphi_0^*$, где $\varphi_0\in[E_0,H]$. Будем обозначать скалярное произведение в E_0 $[u_1,u_2]=(J_0u_1,u_2)$; J_0 - инволюция в пространстве E_0, а круглыми скобками обозначается обычное (дефинитное) скалярное произведение.

Зададим одинаковые пространства входа и выхода расширенной системы

$$\widehat{E}=\widehat{F}=F\oplus F\oplus F\oplus F\oplus E_0$$

и определим скалярное произведение элементов в $\widehat{E}$ и $\widehat{F}$ следующим образом.

Если $\hat{u}'=(\xi_1',\eta_1',\xi_2',\eta_2',\xi_0')$; $\hat{u}''=(\xi_1'',\eta_1'',\xi_2'',\eta_2'',\xi_0'')$, то

$$\left[\hat{u}',\hat{u}''\right]_{\widehat{E}}=(\xi_1',\eta_1'')+(\eta_1',\xi_2'')+(\xi_2',\eta_2'')+(\eta_2',\xi_2'')+[\xi_0',\xi_0'']_{E_0}.$$

Так определенное скалярное произведение можно записать и в виде

$$\left[\hat{u}',\hat{u}''\right]_{\widehat{E}}=\left(\left(\xi_1',\eta_1',\xi_2',\eta_2',\xi_0'\right),\widehat{\sigma}\begin{pmatrix}\xi_1''\\ \eta_1''\\ \xi_2''\\ \eta_2''\\ \xi_0''\end{pmatrix}\right),\text{ где }\widehat{\sigma}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&\sigma_0\end{pmatrix}.$$

Определим действие оператора $\widehat{\Phi}$ из $\widehat{E}$ в H следующим образом.

Если $\hat{u}=\left(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\xi_0\right)$, то $\widehat{\Phi}\hat{u}=\varphi_1\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0$.

Вычислим действие оператора $\widehat{\Phi}^+$,

$$\left(\widehat{\Phi}\hat{u},h\right)=\left(\varphi_1\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0,h\right)=\left(\varphi_1\xi_1,h\right)+\left(\psi^*\xi_2,h\right)+\left(\varphi_0\xi_0,h\right)=$$
$$=\left(\xi_1,\varphi_1^*h\right)+\left(\xi_2,\psi h\right)+\left[\xi_0,\varphi_0^+h\right]_{E_0}.$$

Таким образом, $\widehat{\Phi}^+h=\left(0,\varphi_1^*h,0,\psi h,\varphi_0^+h\right)$;

$$\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^+h=\widehat{\Phi}\left(0,\varphi_1^*h,0,\psi h,\varphi_0^+h\right)=\varphi_0\varphi_0^+h=\frac{T-T^*}{i}h,$$

и узловое соотношение выполнено.

Рассмотрим расширенную за счет внешних пространств открытую систему (17),

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ v_1(t)\\ v_2(t)\\ v_3(t)\\ v_4(t)\\ v_5(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-iT&\varphi_1&0&\psi^*&0&\varphi_0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \varphi_1^*&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \psi&I&0&0&0&0\\ \varphi_0^+&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx(t)}{dt}\\ \xi_1\\ \eta_1\\ \xi_2\\ \eta_2\\ \xi_0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-iT\frac{dx(t)}{dt}+\varphi_1\xi_1+\psi^*\xi_2+\varphi_0\xi_0\\ \text{выход}\begin{cases}0\\ \varphi_1^*\frac{dx(t)}{dt}\\ 0\\ \psi\frac{dx(t)}{dt}+I\xi_1\\ \varphi_0^+\frac{dx(t)}{dt}\end{cases}\end{pmatrix}.$$

Если на вход расширенной системы подается сигнал вида $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то на четвертом канале выхода расширенной системы получаем выход исходной системы

$$x(t) = -iT\frac{dx(t)}{dt} + \varphi_1 u_1(t);$$

$$v_1 = 0;$$

$$v_2 = \varphi_1^* \frac{dx}{dt};$$

$$v_3 = 0;$$

$$v_4 = \psi\frac{dx(t)}{dt} + u_1(t);$$

$$v_5 = \varphi_0^+ \frac{dx}{dt}.$$

Рассмотрим произвольную непрерывную линейную систему

$$\begin{cases} T\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = \Phi u(t); \\ v(t) = Ku(t) + \psi\dfrac{dx}{dt}; \\ x(t)\big|_{t=0} = x_0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(t) = -T\dfrac{dx(t)}{dt} + \Phi u(t); \\ v(t) = \psi\dfrac{dx(t)}{dt} + Ku(t). \end{cases} \tag{19}$$

В матричном виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi \\ \psi & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ u(t) \end{pmatrix},$$

где операторы, действующие в соответствующих гильбертовых пространствах $T \in [H,H]$, $\Phi \in [E,H]$, $\psi \in [H,F]$ и $K \in [E,F]$ не связаны никакими соотношениями. Расширим открытую систему (19) за счет внешних пространств до ассоциированной с метрическим операторным узлом.

Введем оператор

$$B = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi & K & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

отображающий пространство $H \oplus E \oplus F$ в себя, и включим его в метрический операторный узел

$$\Delta_B = \left(J_{E_B}, \left(\left[H \oplus E \oplus F \right] \oplus E_B \right), \begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix}, \left(\left[H \oplus E \oplus F \right] \oplus F_B \right), J_{F_B} \right),$$

где J_{E_B} и J_{F_B} два оператора инволюции, действующие в соответствующих пространствах $J_{E_B} \in \left[E_B, E_B \right]$ и $J_{F_B} \in \left[F_B, F_B \right]$.

Обозначим $E \oplus F \oplus E_B = E'$ и $E \oplus F \oplus F_B = F'$ и определим метрики в пространствах E' и F' с помощью операторов

$$\sigma_{E'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{E_B} \end{pmatrix} \text{ и } \sigma_{F'} = \begin{pmatrix} I_E & 0 & 0 \\ 0 & I_F & 0 \\ 0 & 0 & J_{F_B} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор, задающий расширенную систему, будет

$$\begin{pmatrix} B & N \\ M & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где операторы $N_1 \in \left[E_B, H \right]$, $N_2 \in \left[E_B, E \right]$, $N_3 \in \left[E_B, F \right]$ и $M_1 \in \left[H, F_B \right]$, $M_2 \in \left[E, F_B \right]$, $M_3 \in \left[F, F_B \right]$ и $Q \in \left[E_B, F_B \right]$ появляются в результате включения оператора B (20) в метрический операторный узел.

Теперь оператор, задающий расширенную систему (21),

$$\begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix}$$

удовлетворяет всем узловым соотношениям и система имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T & \Phi & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ \psi & K & 0 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x(t) = -T\dfrac{dx}{dt} + \Phi u_1(t) + N_1 u_3(t); \\ v_1(t) = N_2 u_3(t); \\ v_2(t) = \psi\dfrac{dx}{dt} + K u_1(t) + N_3 u_3(t); \\ v_3(t) = M_1\dfrac{dx}{dt} + M_2 u_1(t) + M_3 u_2(t) + Q u_3(t); \end{cases}$$

и если на вход расширенной системы подается сигнал специального вида $\left(u(t),0,0\right)$, то

$$\begin{cases} x(t) = -T\dfrac{dx}{dt} + \Phi u(t); \\ v_1(t) = 0; \\ v_2(t) = \psi\dfrac{dx}{dt} + Ku(t); \\ v_3(t) = M_1\dfrac{dx}{dt} + M_2 u(t). \end{cases}$$

Таким образом, на втором канале выхода расширенной системы будет выход исходной системы.

Выводы. Рассмотренный в работе метод расширения линейных систем до ассоциированных с операторными узлами любого типа позволяет проводить дальнейший анализ таких систем методами теории операторных узлов. Например, при наличии цепочки инвариантных подпространств у оператора T исходную систему, предварительно расширив до ассоциированной, можно разложить на простейшие, тогда внутренние состояния простейших систем будут одномерные, а из таких систем при помощи операции сцепления конструируется исходная система. Предложенный в статье подход может быть использован для построения новых классов нестационарных случайных процессов и последовательностей, когда входной сигнал равен нулю (эволюционно представимые случайные процессы и последовательности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы, - М.: Наука, 1966. – 298с.
2. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, - Харьков: Изд. Харьк ун-та, 1971. – 160с.
3. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов, - Харьков: ХНУ, 2003. – 342с.

Надійшла – 04.03.2013.