

УДК 539.3:004.94

Геометрически нелинейная решетчатая модель консольной балки под действием сосредоточенной силы

Д. Н. Колесник, А. Д. Шамровский

Запорожская государственная инженерная академия, Украина

В данной работе освещен вопрос применения дискретной решетчатой модели разработанной авторами для решения задачи изгиба консольной балки сосредоточенной силой. Рассматривается геометрически нелинейный вариант данной задачи, как с фиксированной силой, так и со следящей силой. Полученные безразмерные перемещения конца балки приведены в табличном виде. Результаты решения задачи сравниваются с результатами, полученными другими авторами.

Ключевые слова: консольная балка, сосредоточенная сила, геометрическая нелинейность, дискретная модель, решетчатая модель.

В цій роботі розглянуто питання застосування дискретної ґратчастої моделі розробленої авторами для розв'язання задачі згинання консольної балки зосередженою силою. Розглянуто геометрично нелінійний варіант цієї задачі, як з фіксованою силою так і з слідкуючою силою. Отримані безрозмірні результати переміщень кінця балки приведено в табличному виді. Результати розв'язку задачі порівняно з результатами отриманими іншими авторами.

Ключові слова: консольна балка, зосереджена сила, геометрична не лінійність, дискретна модель, ґратчаста модель.

The large deflection of a cantilever beam with an arbitrarily directed tip load is considered in this article. The possibility of applying authors' discrete lattice model for solving this kind of problems is regarded in this article. The two types of an arbitrarily directed tip load are observed: vertical tip load and follower tip load. For both of them were obtained dimensionless deflection of the tip what presented in a table form. Figures of load-stiffness parameter as a function of vertical and horizontal tip deflection are also presented. The deflection curves of a cantilever beam discrete model are also plotted. Comparisons of obtained results with results from the literature show that they are accurate.

Key words: cantilever beam, tip load, geometrical nonlinearity, discrete model, lattice model.

1. Введение

В настоящее время, с развитием технологий и возрастающей потребностью в разработке оптимальных и легковесных конструкционных решений, остро встает вопрос о применении нелинейной теории для расчета гибких конструкций [1-3].

Геометрически нелинейный анализ гибких балок, являющихся составными частями современных конструкций, представляет собой практический интерес для таких научных и инженерных областей как робототехническая, биомеханическая, авиационная промышленность и другие [1-8].

На данный момент для решения задач прочности и жесткости конструкций используют методы двух типов. Первый — это методы сопротивления материалов и полученные в их развитие методы теории пластин и оболочек [9,10]. Второй — методы математической теории упругости [11]. Эти методы развивались во многом независимо друг от друга и только в XX веке появились

исследования с целью объединения таких двух разных подходов [10,12]. Несомненным преимуществом подходов первого типа является их высокая практическая направленность [9,10].

Одной из основных задач решаемых методами первого типа является задача об изгибе балки, в частности задача об изгибе консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой. Еще Галилей, в своих «Диалогах» [13], рассматривал такую задачу. Неоднократно к этой задаче возвращались такие ученые как Мариотти, Лейбниц, Эйлер, Бернулли, Навье, Сен-Венан, Тимошенко и другие [1,10,12].

Особой проблемой при решении данной задачи является необходимость учета ее нелинейности, проявляемой как в физическом, так и в геометрическом смысле. Для последнего случая, когда отношение высоты балки к ее длине достаточно мало и возможны значительны перемещения без возникновения пластических деформаций, существует аналитическое решение представленное Бишопом и Дракером [14]. Несмотря на это данная задача остается актуальной и поныне, об этом может свидетельствовать множество работ, в которых она рассматривается [1,2,5-8]. Она служит эталоном для проверки новых методов расчета, как аналитических, так и численных, базирующихся на различных подходах, в том числе и основанных на уравнениях теории упругости [2,5-8,15-17].

2. Постановка задачи

В данной работе предлагается для решения задачи о нагрузке консольной балки сосредоточенной на ее конце силой применить разработанную авторами дискретную модель сплошной среды [18]. Особенностью данной дискретной модели является возможность решать геометрически нелинейные задачи.

В частности рассматриваются два случая нагружения: под действием постоянно направленной силы и следящей силы. В обоих случаях проводится сравнение с результатами, полученными численно и аналитически другими авторами [15,17].

Графически, задача изгиба консольной балки сосредоточенной силой, направленной вертикально вниз, представлена на Рис. 1.

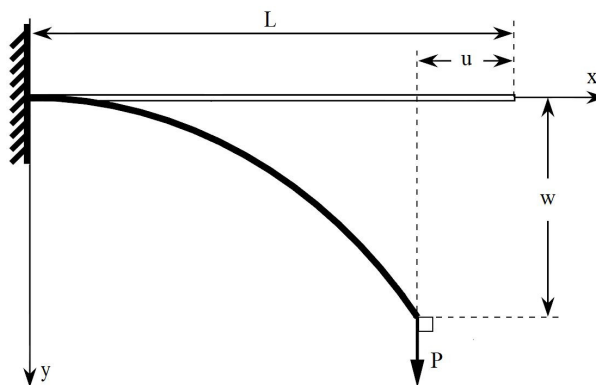


Рис.1. Консольная балка под действием сосредоточенной на ее конце силы с учетом больших перемещений.

Классическое уравнение изгиба балки, даваемое балочной теорией [9], выглядит следующим образом:

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{EI}, \quad (1)$$

где s — координата нейтральной оси балки;

ψ — угол между нормалью к нейтральной оси балки и осью x ;

E — модуль упругости материала балки;

I — момент инерции поперечного сечения;

M — величина изгибающего момента.

Уравнение (1) является геометрически линейным, его нелинейный вариант для случая сосредоточенной на конце силы направленной вертикальной вниз выглядит следующим образом [14]:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{P}{EI} \cos u, \quad (2)$$

где P — величина сосредоточенной силы.

В случае, когда балка нагружена на конце сосредоточенной следящей силой (Рис. 2).

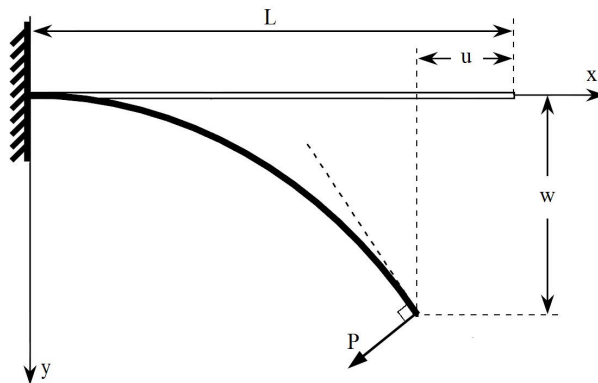


Рис.2. Консольная балка под действием сосредоточенной на ее конце следящей силы с учетом больших перемещений.

Уравнение (2) примет следующий вид [17]:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{P}{EI} (\sin \zeta \cos u + \cos \zeta \sin u), \quad (3)$$

где ζ — угол между направлением сосредоточенной силы и осью y .

Или же в безразмерном виде [17]:

$$\frac{d^2 u}{d\bar{s}^2} = -A(\sin \bar{s} \cos u + \cos \bar{s} \sin u), \quad (4)$$

где $\bar{s} = s/L$, а $A = PL^2/EI$.

Уравнения (2) может быть решено аналитически, как это продемонстрировано в работах [1,6,14] так и численно [15,17]. Уравнения (3) и (4) можно решить численно, что представлены в [17].

Так же описываемые этими уравнениями задачи можно решить с помощью разного рода дискретных подходов, к примеру, методом конечных элементов [16].

3. Метод решения

Для решения данной задачи с помощью предложенного дискретного элемента [18] необходимо вначале построить ее дискретную модель. При этом следует учитывать, что результаты решения данной задачи, даваемые балочной теорией с которыми предполагается сравнение, строятся на идее отсутствия в балке поперечных деформаций. Для того чтобы учесть это в дискретной модели будем использовать только один элемент в ширину и коэффициент Пуассона возьмем равным нулю. На Рис. 3 представлена дискретная модель балки из пяти элементов.

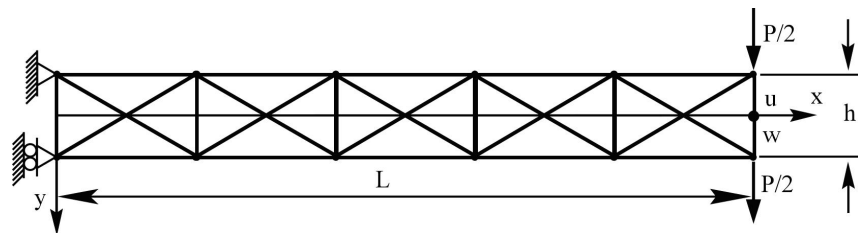


Рис.3. Дискретная модель консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой P .

Как можно видеть сосредоточенная сила P разбита на две равных части приложенных к узлам крайнего элемента. Это эквивалентно подходу предложенному Бате для изотропной конечно-элементной модели балки [16].

Модуль упругости материала возьмем равным единице. Ширину балки возьмем равной единице, таким образом, получим $I = 1/12$. Значение коэффициента ν , используемого в методе последовательных перемещений, возьмем равным 0,1. Точность вычислений зададим равной $10e-8$.

Число используемых элементов — N , величину прикладываемой сосредоточенной силы — P , а так же длину балки — L , будем варьировать. Результаты приведем к безразмерному виду по аналогии с аналитическим решением [17], таким образом, что $o = w/L$ и $z = (L - u)/L$.

Силу P будем изменять таким образом, что бы $A = PL^2/EI$ изменялось от нуля до десяти с шагом один, то есть $P = A \cdot EI/L^2$, где $A = 1, 2, \dots, 10$.

4. Полученные результаты. Сила направлена вертикально вниз

Таким образом, для балки длиной 10 м. ($L = 10$ м.) моделируемой тремя элементами ($N = 3$) получим результаты, представленные в таблице 1.

Табл. 1. Сравнение дискретных и аналитических перемещений конца консоли.

A	Аналитическое [15]		Дискретное, $N = 3, L = 10$ м.			
	ξ_0	η_0	ξ	$\delta_\xi, \%$	η	$\delta_\eta, \%$
0	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30172	0,94357	0,29905	0,88389	0,94578	0,23437
2	0,49346	0,83936	0,49892	1,10551	0,83949	0,01513
3	0,60325	0,74558	0,61715	2,30396	0,73923	0,85110
4	0,66996	0,67106	0,68988	2,97348	0,65764	2,00054
5	0,71379	0,61237	0,73794	3,38332	0,59256	3,23455
6	0,74457	0,56541	0,77189	3,66987	0,54007	4,48180
7	0,76737	0,52707	0,79726	3,89555	0,49693	5,71845
8	0,78498	0,49517	0,81710	4,09120	0,46081	6,93998
9	0,79906	0,46818	0,83318	4,26946	0,43003	8,14767
10	0,81061	0,44500	0,84660	4,44042	0,40343	9,34240

Так же в таблице 1 приведены результаты решения данной задачи, полученные Маттиассоном [15]. Для полученных результатов вычислена относительная погрешность. Как можно видеть относительная погрешность $\delta_o = 100 \cdot (o - o_0) / o_0$ и $\delta_z = 100 \cdot (z - z_0) / z_0$ в среднем приблизительно составляет для ξ — 3 процента, а для η — 4 процента. Это в первую очередь обусловлено малой длиной балки по отношению к ее ширине, а так же, не в последнюю очередь, числом используемых элементов.

Повысив число элементов, из которых состоит модель балки с $L = 10$ м. до пяти ($N = 5$) и десяти ($N = 10$) получим результаты, приведенные в таблице 2.

Табл. 2. Дискретные перемещения конца консоли при разном количестве элементов.

A	Дискретное, $N=5, L=10$ м.				Дискретное, $N=10, L=10$ м.			
	ξ	$\delta_\xi, \%$	η	$\delta_\eta, \%$	ξ	$\delta_\xi, \%$	η	$\delta_\eta, \%$
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30177	0,01677	0,94422	0,06891	0,30284	0,37111	0,94360	0,00272
2	0,49739	0,79737	0,83888	0,05764	0,49676	0,66793	0,83865	0,08422
3	0,61096	1,27829	0,74248	0,41543	0,60849	0,86858	0,74375	0,24561
4	0,68052	1,57584	0,66525	0,86640	0,67678	1,01844	0,66815	0,43383
5	0,72655	1,78761	0,60416	1,34108	0,72196	1,14415	0,60855	0,62391
6	0,75918	1,96172	0,55513	1,81879	0,75395	1,26000	0,56083	0,81053
7	0,78363	2,11877	0,51498	2,29379	0,77789	1,37118	0,52184	0,99190
8	0,80279	2,26936	0,48147	2,76749	0,79661	1,48101	0,48938	1,16926
9	0,81837	2,41598	0,45300	3,24242	0,81175	1,58852	0,46189	1,34379
10	0,83139	2,56344	0,42845	3,71910	0,82436	1,69679	0,43826	1,51421

Как можно видеть точность результатов возросла. Об этом свидетельствует уменьшение относительной погрешности, в среднем, приблизительно до 1,7 процента при $N = 5$ и 1 процента при $N = 10$.

Графически деформация балки, в безразмерной форме, представлена на рис. 4.

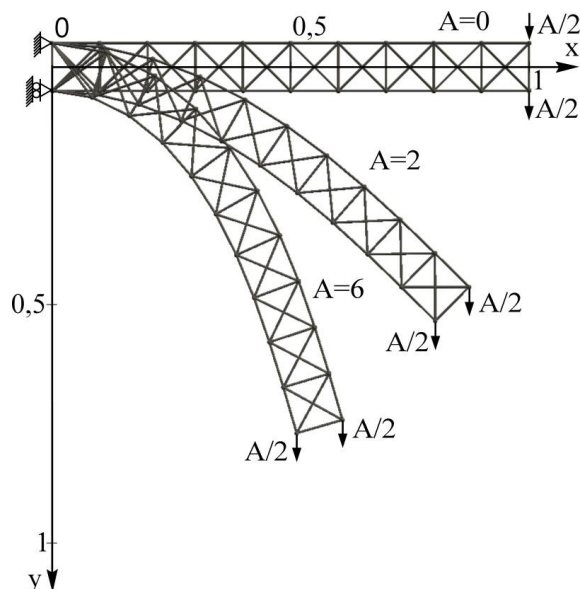


Рис.4. Формы изгиба консольной балки для разных величин сосредоточенной силы A , в безразмерном виде.

В свою очередь увеличение горизонтальных размеров элементов и соответственно рост общей длины балки приводит к еще большему увеличению точности (Таблица 3).

Табл.3. Дискретные перемещения конца консоли для балок разной длины.

A	Дискретное, $N=10, L=20$ м.				Дискретное, $N=10, L=40$ м.			
	ξ	$\delta_{\xi}, \%$	η	$\delta_{\eta}, \%$	ξ	$\delta_{\xi}, \%$	η	$\delta_{\eta}, \%$
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000
1	0,30097	0,24942	0,94402	0,04787	0,29822	1,15964	0,94499	0,15037
2	0,49386	0,08044	0,83966	0,03556	0,49136	0,42575	0,84116	0,21485
3	0,60471	0,24166	0,74529	0,03867	0,60234	0,15064	0,74708	0,20076
4	0,67226	0,34375	0,67006	0,14913	0,67015	0,02814	0,67174	0,10134
5	0,71671	0,40948	0,61076	0,26334	0,71467	0,12288	0,61236	0,00237
6	0,74799	0,45927	0,56328	0,37598	0,74591	0,18040	0,56483	0,10237
7	0,77122	0,50114	0,52451	0,48513	0,76906	0,21975	0,52603	0,19760
8	0,78922	0,53979	0,49224	0,59158	0,78694	0,25025	0,49374	0,28928
9	0,80365	0,57504	0,46492	0,69607	0,80125	0,27404	0,46641	0,37836
10	0,81556	0,61040	0,44145	0,79692	0,81301	0,29582	0,44294	0,46326

Как можно видеть из Таблицы 3 увеличение длины балки до 20 м. привело к уменьшению относительной погрешности в среднем до 0,38 процента при этом увеличение длины балки до 40 м. уменьшило ее до 0,26 процента. Дальнейшее увеличение длины балки будет приводить еще к большему уменьшению отличия дискретных результатов от аналитических, для высоких значений нагрузок.

Если графически отобразить зависимость величины безразмерных перемещений ξ и η от величины безразмерной нагрузки A , то можно построить график изображенный на Рис. 5.

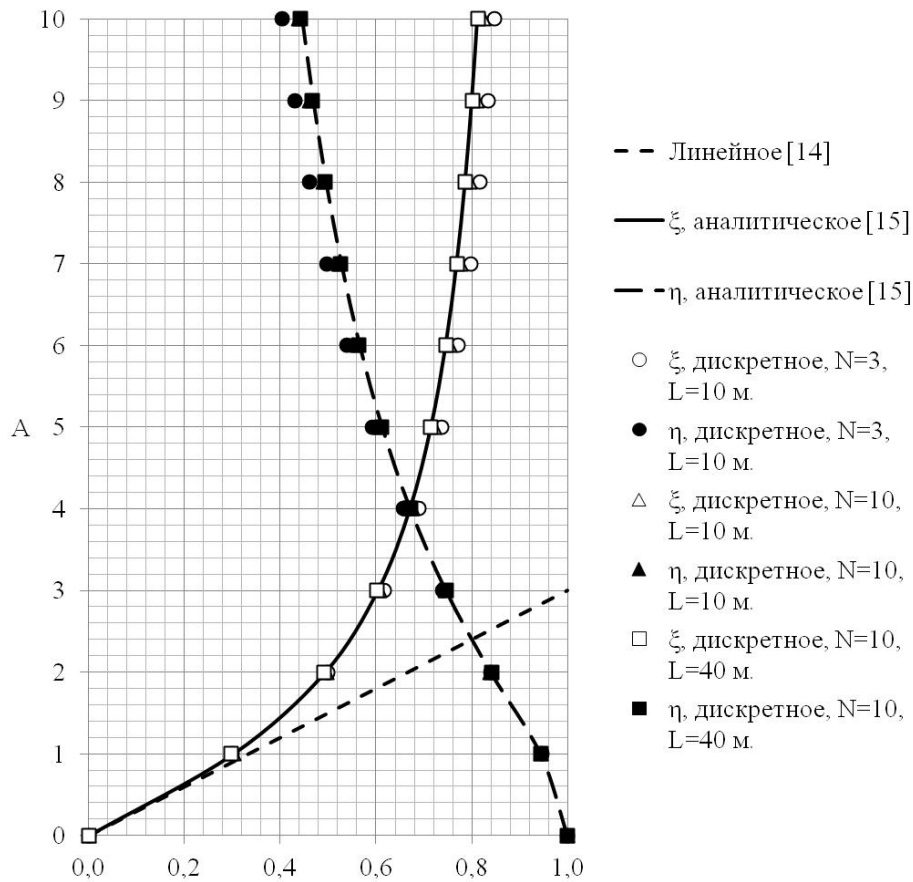


Рис.5. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце силы.

Из данного графика видно, что при значениях $A < 1$ результаты близки к линейным, а при $A < 3$ результаты дискретного решения, в не зависимости от числа элементов, практически совпадают с аналитическим решением. В то же время, следует отметить, что с ростом A растет и отклонение получаемого результата от аналитического решения для коротких балок и небольшого числа элементов. В случае, увеличения длины балки ($N = 10, L = 40$), дискретный результат будет практически совпадать с аналитическим результатом без увеличения числа используемых элементов.

Такое уменьшение погрешности можно изобразить графически, если построить график зависимости относительной погрешности от отношения геометрической длины балки к ее высоте для фиксированной величины нагрузки при одинаковом количестве используемых дискретных элементов. Так на Рис. 6 представлен график зависимости δ_ξ от L/h при $A = 6$ и $N = 10$.

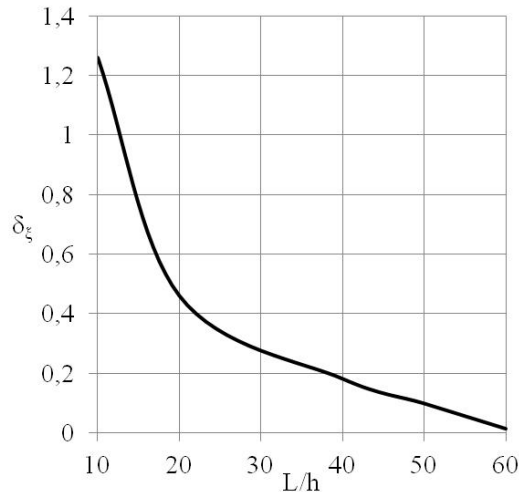


Рис.6. График зависимости относительной погрешности от отношения длины балки к ее высоте при $A = 6$ и $N = 10$.

Полученные результаты полностью соотносятся с принципом Сен-Венана.

5. Полученные результаты. Следящая сила

Для более сложного случая изгиба консольной балки с сосредоточенной на ее конце силой, когда угол между приложенной силой и нейтральной осью балки остается постоянным и равным 90 градусов, дискретная модель идентична случаю с фиксированной силой (Рис. 2). Отличие заключается лишь в том, что на каждой итерации алгоритма последовательных перемещений происходит изменение направления приложенной нагрузки $P/2$ таким образом, что бы она оставались параллельной крайней грани элемента к которому приложена (Рис. 7).

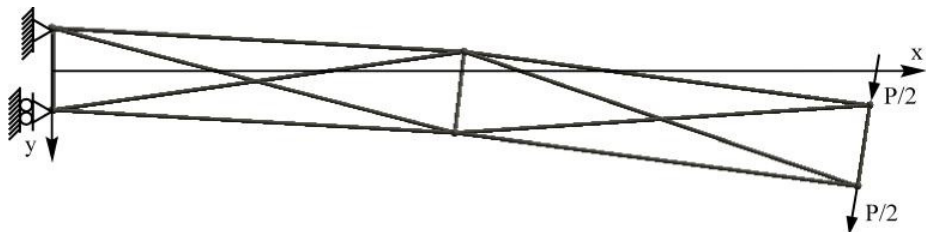


Рис.7. Дискретная модель консольной балки под действием сосредоточенной на ее конце следящей силы P .

Проведя расчет методом последовательных перемещений с использованием тех же параметров модели, что и для предыдущего случая, при $N = 10$ и $L = 10$ м., получим результаты, приведенные в Таблице 4.

Табл. 4. Сравнение дискретных и аналитических перемещений конца консоли.

A	Аналитическое [17]		Дискретное, N=10, L=10 м.			
	ξ_0	η_0	ξ	$\delta_\xi, \%$	η	$\delta_\eta, \%$
0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	1,000	0,000
0,349	0,115	0,992	0,116	0,870	0,992	0,000
0,701	0,228	0,968	0,230	0,877	0,968	0,000
1,057	0,335	0,929	0,339	1,194	0,928	0,108
1,420	0,435	0,876	0,440	1,149	0,874	0,228
1,791	0,525	0,810	0,532	1,333	0,806	0,494
2,175	0,604	0,734	0,612	1,325	0,727	0,954
2,575	0,672	0,647	0,679	1,042	0,638	1,391
2,994	0,721	0,557	0,732	1,526	0,542	2,693

В данной таблице так же приведены результаты, полученные в [17] и вычислено относительная погрешность δ_ξ и δ_η от них, для результатов, полученных с помощью дискретной модели. Как можно видеть получаемая погрешность в среднем составляет около одного процента для рассмотренного диапазона значений перемещений.

Графически полученные результаты перемещений представлены на Рис. 8.

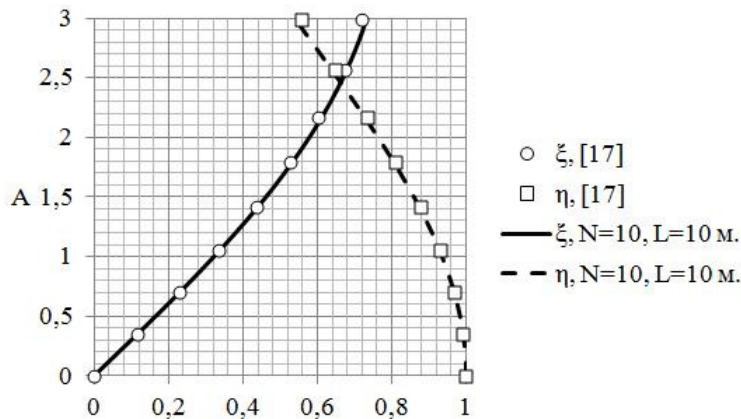


Рис.8. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце следящей силы.

На данном графике наглядно видно совпадение результатов, получаемых разными методами.

В случае дальнейшего увеличения силы, до $A = 40$, можно получить сложную нелинейную зависимость, изображенную на Рис. 9.

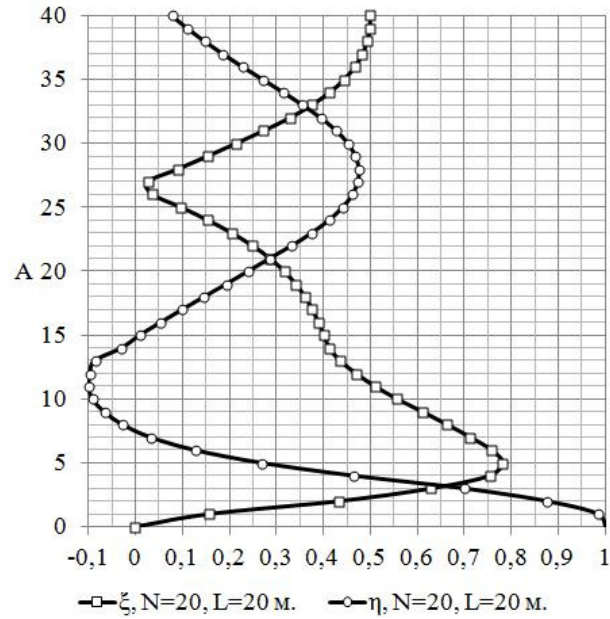


Рис.9. График зависимости перемещений конца консольной балки от величины сосредоточенной на ее конце следящей силы.

В данном случае точность вычислений была задана равной $10e-6$. Соответствующие данному случаю нагрузки формы изгиба балки, приведенные к безразмерному виду, изображены на Рис. 10-11.

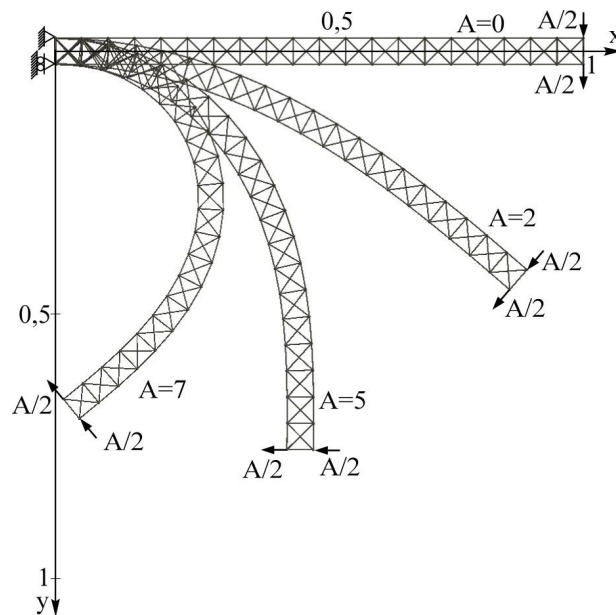


Рис.10. Формы изгиба консольной балки для разных A , в безразмерном виде.

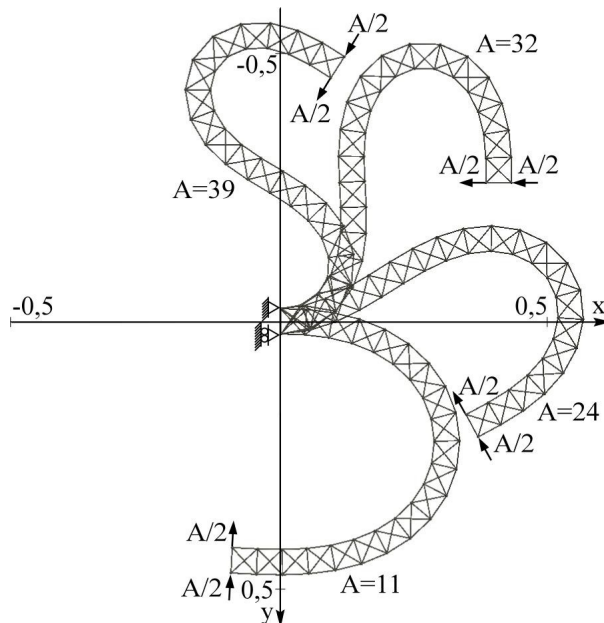


Рис.11. Формы изгиба консольной балки для разных A , в безразмерном виде.

6. Выводы

Получаемые с помощью предложенной дискретной модели [18] результаты качественно и количественно близки к результатам получаемым аналитически.

Увеличение горизонтальных размеров элементов дискретной модели ведет к уточнению получаемых результатов, так же как и увеличение количества самих дискретных элементов.

Дискретная модель [18], с учетом приведенных в статье уточнений, годится для расчета геометрически нелинейных задач допускающих упрощения балочной теории. При этом решение находится на основании зависимостей теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fertis, D. G. Nonlinear structural engineering. With unique theories and methods to solve effectively complex nonlinear problems [Текст] / D. G. Fertis. — Springer, 2006. — 339 p.
2. Kocatürk, T. Large deflection static analysis of a cantilever beam subjected to a point load [Текст] / T. Kocatürk, Ş. D. Akbaş, M. Şimşek. // International journal of engineering and applied science. — 2010. — Vol. 2, Issue 4. — Pp. 1-13.
3. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Second Edition [Текст] / R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J. C. Remmers, C. V. Verhoosel. — 2nd ed. — L: John Wiley & Sons, Ltd., 2012. — 540 p. — ISBN: 978-0-470-66644-9.
4. Merli, R. Comparison of two linearization schemes for the nonlinear bending problem of a beam pinned at both ends [Текст] / R. Merli, C. Lazaro, S. Monleon, F. Domingo. // International journal of solids and structures. — Elsevier, 2010. — Vol. 47. — Pp. 865-874.

5. Beléndez, T. Large and small deflections of a cantilever beam [Текст] / T. Beléndez, C. Neipp, A. Beléndez // *European Journal of Physics*. — Bristol: IOP Publishing, 2002. — Vol. 23, No. 3. — Pp. 371-379.
6. Wang, J. An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip [Текст] / J. Wang, J.-K. Chen, S. Liao // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2008. — Vol. 212. — Pp. 320–330.
7. Конохов, В. И. Моделирование деформированного состояния ствола гидропушки при наличии больших перемещений [Текст] / В. И. Конохов, Д. Б. Пивоваров, В. Л. Хавин // *Вісник НТУ «ХП» Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин»*. — Харків: НТУ «ХП», 2009. — № 42. — С. 68-76.
8. Morgado, T. F. M. SIMPOLE — simulation of wood poles mechanical behavior [Текст] / T. F. M. Morgado, A. M. P. G. Dias, J. S. Machado, J. H. Negrao. // *BioResources*. — 2012. — Vol. 7, No. 3. — Pp. 3439-3451.
9. Gere, J. M. *Mechanics of materials. Eight Edition* [Текст] / J. M. Gere, B. J. Goodno. — CL Engineering, Cengage Learning, 2012. — 1152 p.
10. Kurrer, K.-E. *The history of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics* [Текст] / K.-E. Kurrer. — Berlin: Ernst & Sohn, 2008. — 848 p. — ISBN: 978-3-433-01838-5.
11. Saad, M. H. *Elasticity. Theory, Applications, and Numerics* [Текст] / M. H. Saad. — Second edition. — Academic Press, Elsevier Inc., 2009. — 552 p.
12. Dugas, R. *A history of mechanics* [Текст] / R. Dugas. — Dover Publications, 2011 — 688 p.
13. Galilei, G. *Dialogues Concerning Two New Sciences* [Текст] / G. Galilei. — HardPress Publishing, 2013. — 342 p.
14. Bisshopp, K. E. Large deflections of cantilever beams [Текст] / K. E. Bisshopp, D. C. Drucker // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1945. — Vol. 3. — Pp. 272–275.
15. Mattiasson, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analyzed by means of elliptic integrals [Текст] / K. Mattiasson // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 1981. — Vol. 17. — Pp. 145–153.
16. Bathe, K.-J. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures [Текст] / K.-J. Bathe, S. Bolourchi // *International journal for numerical methods in engineering*. — 1979. — Vol. 14. — Pp. 961-986.
17. McComb H. G. Jr. Large deflections of a cantilever beam under arbitrarily directed tip load [микрофильм] : тех. отч. / H. G. McComb Jr., Langley Research Center. — Hampton, Va.: Langley Research Center. — 1985. — 22 p.
18. Шамровський А.Д. Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных [Текст] / А.Д. Шамровский, Ю.А. Лымаренко, Д.Н. Колесник // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет*. — Дніпропетровськ: Ліра, 2011. — Вип. 17. — С. 274–288.