УДК 519.9

Сплайн-інтерфлетація та обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер
Українська інженерно-педагогічна академія, Україна

В статье исследуются кубатурные формулы вычисления коэффициентов Фурье функций трех переменных f(x,y,z), которые используют в своем построении операторы сплайн-интерфлетации. Такие кубатурные формулы на классе дифференцированных функций имеют преимущество над известными, так как для достижения заданой точности используют меньше значений функции f(x,y,z).

Ключевые слова: *интерфлетация, сплайн-интерполяция, кубатурная формула, 3 D коэффициенты Фурье.*

В статті досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних f(x,y,z), які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функції. Такі кубатурні формули на класі диференційовних функцій мають перевагу над відомими, так як для досягнення заданої точності використовують менше значень функції f(x,y,z).

Ключові слова: *інтерфлетація, сплайн-інтерполяція, кубатура формула,32 D коефіцієнти Фур'є.*

In work on the class of differentiable functions formulas of the evaluating of 3 D Fourier's coefficients with using spline-interflatation were submitted. The main advantages of of this formulas are high exactness of approximation, less amount of information of function during the calculation .

Key words: *Interflatation, spline-interpolation, cubature formula, 3 D Fourier's coefficients.*

1. Загальна постановка задачі та її актуальність

При наближені функцій двох та трьох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, слідами функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1] на різних класах функцій. В даній роботі мова піде про наближене обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є, коли в якості даних є значення функції у вузлових точках.

2. Дослідження авторів

В [2]-[4] був викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення функції у вузлах. В [5], [6] наведений алгоритм для отримання більш

© Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., 2013

точної оцінки похибки наближення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами, що в своїй побудові використовують оператори сплайн-інтерфлетації. Повна реалізація цього алгоритму пропонується в даній статті.

3. Нерозв'язані проблеми та цілі роботи

Метою даної роботи є представлення та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\ ,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz\ ,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz\ ,$$

побудованих на основі сплайн-інтерфлетації функцій, у випадках, коли в якості даних задані значення функції у вузлах, на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(r,r,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,0,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(0,r,r)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(r,r,r)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, $r=1,2$. Для досягнення цієї мети поставлені наступні задачі: отримати оцінку похибки наближення запропонованих кубатурних формул через похибку наближення оператора інтерфлетації оператором інтерлінації (що побудований на основі інтерфлетації) та похибку наближення оператора інтерлінаціїї оператором інтерполяції (що також побудований на основі інтерфлетації), а також порівняти їх з класичними за таким параметром, як кількість використаних значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення заданої точності.

4. Оператори сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації

Введемо позначення

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}<x\le x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_k}{\Delta}, & x_{k-1}<x<x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1}\end{cases}\qquad k=\overline{1,\ell-1};\ x_k=k\Delta,\ \Delta=\frac{1}{\ell},$$

$$\tilde h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tilde x_1}{-\Delta_1}, & \tilde x_0\le x<\tilde x_1,\\ 0, & x\ge \tilde x_1,\end{cases}\quad \tilde h_{1\ell^{3/2}}(x)=\begin{cases}0, & x\le \tilde x_{\ell^{3/2}-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & \tilde x_{\ell^{3/2}-1}<x\le \tilde x_{\ell^{3/2}},\end{cases}$$

$$\tilde h_{1\tilde k}(x)=\begin{cases}0, & x\le \tilde x_{\tilde k-1},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k}}{\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k-1}<x<\tilde x_{\tilde k},\\ \dfrac{x-\tilde x_{\tilde k+1}}{-\Delta_1}, & \tilde x_{\tilde k}\le x<\tilde x_{\tilde k+1},\\ 0, & x\ge \tilde x_{\tilde k+1},\end{cases}\qquad \tilde k=\overline{1,\ell^{3/2}-1},\ \tilde x_{\tilde k}=\tilde k\Delta_1,\ \tilde k=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}},$$

$$\bar h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\bar x_1}{-\Delta_2}, & \bar x_0\le x<\bar x_1,\\ 0, & x\ge \bar x_1,\end{cases}\quad \bar h_{1\ell^3}(x)=\begin{cases}0, & x\le \bar x_{\ell^3-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta_2}, & \bar x_{\ell^3-1}<x\le \bar x_{\ell^3},\end{cases}$$

$$\bar h_{1\bar k}(x)=\begin{cases}0, & x\le \bar x_{\bar k-1},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k}}{\Delta_2}, & \bar x_{\bar k-1}<x<\bar x_{\bar k},\\ \dfrac{x-\bar x_{\bar k+1}}{-\Delta_2}, & \bar x_{\bar k}\le x<\bar x_{\bar k+1},\\ 0, & x\ge \bar x_{\bar k+1},\end{cases}\qquad \bar k=\overline{1,\ell^3-1},\ \ \bar x_{\bar k}=\bar k\Delta_2,\ \bar k=\overline{0,\ell^3},\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Аналогічно визначаються функції

1. $h_{2j}(y),\quad j=\overline{0,\ell},\quad h_{3s}(z),\quad s=\overline{0,\ell},\quad y_j=j\Delta,\ z_s=s\Delta,\quad \Delta=\dfrac{1}{\ell};$

2. $\tilde h_{2\tilde j}(y)\quad \tilde j=\overline{0,\ell^{3/2}},\ \tilde h_{3\tilde s}(z)\quad \tilde s=\overline{0,\ell^{3/2}},$

$$\tilde y_{\tilde j}=\tilde j\Delta_1,\ \tilde z_{\tilde s}=\tilde j\Delta_1,\ \Delta_1=\frac{1}{\ell^{3/2}};$$

3. $\bar h_{2\bar j}(y)\quad \bar j=\overline{0,\ell^3},\ \bar h_{3\bar s}(z)\ \bar s=\overline{0,\ell^3},$

$$\bar y_{\bar j}=\bar j\Delta_2,\ \bar z_{\bar s}=\bar s\Delta_2,\quad \Delta_2=\frac{1}{\ell^3}.$$

Розглянемо оператори

$$O_1 f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell} f(x_k,y,z)h_{1k}(x)\ ,\ O_2 f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{\ell} f(x,y_j,z)h_{2j}(y)\ ,$$

$$O_3 f(x,y,z)=\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y,z_s)h_{3s}(z)\,,$$

$$\tilde{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y,z)h_{1\tilde{k}}(x)\ ,\ \tilde{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}} f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}},z)\tilde{h}_{2\tilde{j}}(y)\ ,$$

$$\tilde{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}} f(x,y,\tilde{z}_{\tilde{s}})\tilde{h}_{3\tilde{s}}(z)\,,$$

$$\overline{O}_1 f(x,y,z)=\sum_{\overline{k}=0}^{\ell^{3}} f(\overline{x}_{\overline{k}},y,z)h_{1\overline{k}}(x)\ ,\ \overline{O}_2 f(x,y,z)=\sum_{\overline{j}=0}^{\ell^{3}} f(x,\overline{y}_{\overline{j}},z)\overline{h}_{2\overline{j}}(y)\ ,$$

$$\overline{O}_3 f(x,y,z)=\sum_{\overline{s}=0}^{\ell^{3}} f(x,y,\overline{z}_{\overline{s}})\overline{h}_{3\overline{s}}(z)$$

Лема 1. [1] Оператор сплайн-інтерфлетації

$$\begin{aligned}Of(x,y,z)&=O_1 f(x,y,z)+O_2 f(x,y,z)+O_3 f(x,y,z)-\\&-O_1O_2 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)\end{aligned}$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Лема 2. [1] Оператор сплайн-інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\begin{aligned}\tilde{O}f(x,y,z)&=O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+\\&+O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+\\&+O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-\\&-O_1O_2 f(x,y,z)-O_1O_3 f(x,y,z)-O_2O_3 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)\end{aligned}$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Лема 3. [1] Оператор сплайн-інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації

$$\begin{aligned}\overline{O}f(x,y,z)&=O_1\tilde{O}_2\overline{O}_3 f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_3\overline{O}_2 f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z)+\\&+O_2\tilde{O}_1\overline{O}_3 f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_3\overline{O}_1 f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z)+\\&+O_3\tilde{O}_1\overline{O}_2 f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_2\overline{O}_1 f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z)-\\&-O_1O_2\overline{O}_3 f(x,y,z)-O_1O_3\overline{O}_2 f(x,y,z)-O_2O_3\overline{O}_1 f(x,y,z)+O_1O_2O_3 f(x,y,z)\end{aligned}$$

має властивість $\left|f(x,y,z)-\overline{O}f(x,y,z)\right|=O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Нехай

$$G_{1k}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_k-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k<\xi<x,\\ \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<x_{k+1},\end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(\tilde{x}_{\tilde{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \tilde{x}_{\tilde{k}}<\xi<x,\\ \dfrac{\tilde{x}_{\tilde{k}}-x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}-\tilde{x}_{\tilde{k}}}\dfrac{(x_{k+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\tilde{x}_{\tilde{k}+1},\end{cases}$$

$$\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)=\begin{cases}\dfrac{\bar{x}_{\bar{k}+1}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & \bar{x}_{\bar{k}}<\xi<x,\\ \dfrac{\bar{x}_{\bar{k}}-x}{\bar{x}_{\bar{k}+1}-\bar{x}_{\bar{k}}}\dfrac{(\bar{x}_{\bar{k}+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x<\xi<\bar{x}_{\bar{k}+1},\end{cases}$$

а функції $G_{2j}(y,\eta,r)$, $\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)$, $\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)$, $G_{3s}(z,\varsigma,r)$, $\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\varsigma,r)$, $\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\varsigma,r)$, $r=1,2$ визначаються аналогічно.

Лема 4. [1] Справедливі наступні рівності

$$1.\ f(x,y,z)-Of(x,y,z)=$$

$$=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} f^{(r,r.r)}(\xi,\eta,\varsigma)G_{1k}(x,\xi,r)G_{2j}(y,\eta,r)G_{3s}(x,\varsigma,r)\,d\xi d\eta d\zeta\,;$$

$$2.\ \left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)=$$

$$=\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}} f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\tilde{G}_{2_{\tilde{j}}}(y,\eta,r)\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\,d\eta d\zeta\,;$$

$$3.\ \left(O_1O_2-O_1O_2\bar{O}_3\right)f(x,y,z)=\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}} f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\,d\xi\,.$$

Лема 5. [7] Справедливі наступні нерівності

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|G_1(x,\xi,r)\right|d\xi dx\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|d\eta dy\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!},\quad \int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|G_{3s}(z,\varsigma,r)\right|d\varsigma dz\le\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}.$$

5. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів сплайн-інтерполяції, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ пропонуються формули :

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Теорема 1. Нехай $f(x,y,z)\in H_1^{3,1}(M)$. Справедлива наступна оцінка:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\left(\frac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3}+\frac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}+\frac{18M}{(r+2)!}\right)\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

Доведення. Доведення теореми відбувається за наступною схемою:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|dxdydz+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|Of(x,y,z)-\tilde{O}f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\tilde{O}f(x,y,z)-\bar{O}f(x,y,z)\right|dxdydz=I_1+I_2+I_3.$$

Оцінимо кожний з доданків.

$$I_1\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\left|f^{(r,r.r)}(\xi,\eta,\varsigma)\right|\times$$

$$\times\left|G_{1k}(x,\xi,r)\right|\left|G_{2j}(y,\eta,r)\right|\left|G_{3s}(x,\varsigma,r)\right|d\xi d\eta d\zeta dxdydz\le$$

$$\le \tilde{M}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell-1}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}=\tilde{M}\frac{8\Delta^{3r}}{\left[(r+2)!\right]^3}=\frac{8\tilde{M}}{\left[(r+2)!\right]^3\ell^{3r}}.$$

$$I_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1O_2f(x,y,z)-O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_3f(x,y,z)+O_1O_2O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+$$

$$+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_1O_2f(x,y,z)+O_1O_3f(x,y,z)+$$

$$+O_2O_3f(x,y,z)-O_1O_2O_3f(x,y,z)\Big|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\Big|O_1f(x,y,z)+O_2f(x,y,z)+O_3f(x,y,z)-$$

$$-O_1\tilde{O}_2f(x,y,z)-O_1\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_2\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_2\tilde{O}_3f(x,y,z)+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3f(x,y,z)-O_3\tilde{O}_1f(x,y,z)-$$

$$-O_3\tilde{O}_2f(x,y,z)+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2f(x,y,z)\Big|dxdydz\le$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_1-O_1\tilde{O}_2-O_1\tilde{O}_3+O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_2-O_2\tilde{O}_1-O_2\tilde{O}_3+O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left|\left(O_3-O_3\tilde{O}_1-O_3\tilde{O}_2+O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(0,r,r)}(x_k,\eta,\zeta)\right|\times$$

$$\times\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\eta d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\left|f^{(r,0,r)}(\xi,y_j,\zeta)\right|\times$$

$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{3\tilde{s}}(z,\zeta,r)\right|d\xi d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\left|f^{(r,r,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|\times$$

$$\times\left|\tilde{G}_{1\tilde{k}}(x,\xi,r)\right|\left|\tilde{G}_{2\tilde{j}}(y,\eta,r)\right|d\xi d\eta dxdydz\le$$

$$= \bar{M}\,\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!} + \bar{M}\,\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!} +$$

$$+\bar{M}\,\ell\Delta\ell^{3/2}\ell^{3/2}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!}\frac{2\Delta_1{}^{r+1}}{(r+2)!} =$$

$$= 12\bar{M}\frac{\Delta_1{}^{r}}{(r+2)!}\frac{\Delta_1{}^{r}}{(r+2)!} = \frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\Delta_1{}^{2r} = \frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\left(\frac{1}{\ell^{3/2}}\right)^{2r} = \frac{12\bar{M}}{\left[(r+2)!\right]^2}\frac{1}{\ell^{3r}}.$$

$$I_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big| O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z) +$$

$$+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$

$$-O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_1O_2 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) +$$

$$+O_1O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_2 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) +$$

$$+O_1O_2O_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) -$$

$$-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) -$$

$$-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z) +$$

$$+O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z) - O_1O_2O_3 f(x,y,z)\Big|\,dxdydz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \Big| O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z) +$$

$$+O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) +$$

$$-O_1O_2 f(x,y,z) - O_2O_3 f(x,y,z) - O_1O_3 f(x,y,z) -$$

$$-O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z) -$$

$$-O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z) -$$

$$-O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z) +$$

$$+O_1O_2\bar{O}_3 f(x,y,z) + O_1O_3\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_2O_3\bar{O}_1 f(x,y,z)\Big|\,dxdydz \le$$

$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_2 - O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1\tilde{O}_3 - O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_1 - O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3\right) f(x,y,z)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2\tilde{O}_3 - O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_1 - O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_3\tilde{O}_2 - O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1 O_2 - O_1 O_2\bar{O}_3\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_1 O_3 - O_1 O_3\bar{O}_2\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(O_2 O_3 - O_2 O_3\bar{O}_1\right) f\left(x,y,z\right)\right| dxdydz \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}},\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right| d\zeta dxdydz +$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right| d\eta dxdydz +$$

$$+\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right| d\zeta dxdydz +$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{s}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+1}}\int_{y_j}^{y_j}\int_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,\tilde{z}_{\tilde{s}})\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right| d\xi dxdydz +$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}}}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(\tilde{x}_{\tilde{k}},\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right| d\eta dxdydz +$$

$$+\sum_{s=0}^{\ell-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^{3/2}-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,\tilde{y}_{\tilde{j}},z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\int\limits_{\bar{z}_{\bar{s}}}^{\bar{z}_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_k,y_j,\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell\ \ -1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\int\limits_{\bar{y}_{\bar{j}}}^{\bar{y}_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_k,\eta,z_s)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\sum_{s=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\int\limits_{z_s}^{z_{s+1}}\int\limits_{y_j}^{y_j}\int\limits_{\bar{x}_{\bar{k}}}^{\bar{x}_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y_j,z_s)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz\le$$

$$=M\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell^{3/2}\Delta_1\ell^3\frac{2\Delta_2^{r+1}}{(r+2)!}+3M\ell\Delta\ell\Delta\ell^3\frac{2\Delta_2^{r+1}}{(r+2)!}=$$

$$=3M\frac{2\Delta_2^{r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{r}}{(r+2)!}+3M\frac{2\Delta_2^{r}}{(r+2)!}=\frac{6}{(r+2)!}\frac{3M}{\ell^{3r}}=\frac{18}{(r+2)!}\frac{M}{\ell^{3r}}.$$

Отже, $\left|I_1^3(m,n,p)-\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\dfrac{8\tilde{M}}{[(r+2)!]^3\,\ell^{3r}}+\dfrac{12\bar{M}}{[(r+2)!]^2}\dfrac{1}{\ell^{3r}}+\dfrac{18}{(r+2)!}\dfrac{M}{\ell^{3r}}$.

Теорема доведена.

6. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням класичних операторів сплайн-інтерполяції

Побудуємо кубатурну формулу наближеного обчислення $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ з похибкою наближення $O\left(\ell^{-3r}\right)$. Нехай є $N=\left(\ell^3+1\right)^3$ значень функції $f(x,y,z)$.

Теорема 2. Якщо $f(x,y,z)$ задовольняє умовам $\left|f^{(r,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,r,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,r)}(x,y,z)\right|\le M$ і для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ використовувати кубатурні формули $\tilde{\Phi}_\mu^3$, $\mu=1,2,3$, наприклад:

$$\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)=\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1} f\left(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},z_{\bar{s}}\right)\times$$

$$\times\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}} h_{1\bar{k}}(x)\sin 2\pi mx dx \int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}} \bar{h}_{2\bar{j}}(y)\sin 2\pi ny dy \int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}} \bar{h}_{3\bar{s}}(z)\sin 2\pi pz dz ,$$

$$x_{\bar{k}}=\bar{k}\Delta_2,\ y_{\bar{j}}=\bar{j}\Delta_2,\ \ z_{\bar{s}}=\bar{s}\Delta_2,\ \ \bar{k},\bar{j},\bar{s}=\overline{0,\ell^3},\ \Delta_2=\frac{1}{\ell^3},$$

то має місце наступна оцінка похибки

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le\frac{6}{(r+2)!}M\frac{1}{\ell^{3r}} .$$

Доведення. Доведення теореми відбувається за наступною схемою:

$$\left|I_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|\le$$

$$\le\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\left|f(x,y,z)-f\left(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},z_{\bar{s}}\right)\right|\left|h_{1\bar{k}}(x)\right|\left|\bar{h}_{2\bar{j}}(y)\right|\left|\bar{h}_{3\bar{s}}(z)\right|dxdydz=$$

$$=\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\left|f(x,y,z)-f\left(x_{\bar{k}},y,z\right)+f\left(x_{\bar{k}},y,z\right)-f\left(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},z\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},z\right)-f\left(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},z_{\bar{s}}\right)\right|\left|h_{1\bar{k}}(x)\right|\left|\bar{h}_{2\bar{j}}(y)\right|\left|\bar{h}_{3\bar{s}}(z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\left|f^{(r,0,0)}(\xi,y,z)\right|\left|\bar{G}_{1\bar{k}}(x,\xi,r)\right|d\xi dxdydz+$$

$$+\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\left|f^{(0,r,0)}(x_{\bar{k}},\eta,z)\right|\left|\bar{G}_{2\bar{j}}(y,\eta,r)\right|d\eta+$$

$$+\sum_{\bar{k}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{j}=0}^{\ell^3-1}\sum_{\bar{s}=0}^{\ell^3-1}\int_{x_{\bar{k}}}^{x_{\bar{k}+1}}\int_{y_{\bar{j}}}^{y_{\bar{j}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\int_{z_{\bar{s}}}^{z_{\bar{s}+1}}\left|f^{(0,0,r)}(x_{\bar{k}},y_{\bar{j}},\zeta)\right|\left|\bar{G}_{3\bar{s}}(z,\zeta,r)\right|d\zeta dxdydz\le$$

$$\le 3M\ell^3\ell^3\ell^3\Delta_2\Delta_2\frac{2\Delta_2^{r+1}}{(r+2)!}=\frac{6}{(r+2)!}M\frac{1}{\ell^{3r}} .$$

Теорема доведена.

7. Про переваги кубатурних формул з використанням інтерфлетації функцій

Проведемо прорівняльний аналіз кубатурних формул $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$.

Теорема 3. Нехай задано $N=\left(\ell^{3}+1\right)^{3}=O\left(\ell^{9}\right)$ значень функції $f(x,y,z)$. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ для наближеного обчислення $I_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ та досягнення точності $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$ використовують всі $N=\left(\ell^{3}+1\right)^{3}=O\left(\ell^{9}\right)$ значень функції $f(x,y,z)$. Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, побудовані з використанням інтерфлетації функцій, використовують в $O\left(\sqrt{\ell^{7}}\right)$ раз менше значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення тої ж похибки наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Доведення. З теорем 1 та теореми 2 випливає, що похибка наближення інтегралів $I_{\mu}^{3}\left(m,n,p\right)$, $\mu=1,2,3$ за допомогою кубатурних формул $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ має одинаковий порядок наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$.

Кубатурні формули $\tilde{\Phi}_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, побудовані за допомогою класичної інтерполяції вимагають $N=\left(\ell^{3}+1\right)^{3}=O\left(\ell^{9}\right)$ значень функції $f_{\overline{k}\,\overline{j}\,\overline{s}}=f\left(x_{\overline{k}},y_{\overline{j}},z_{\overline{s}}\right)$, $\overline{k},\overline{j},\overline{s}=\overline{0,\ell^{3}}$. Кубатурні формули $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$, які використовують оператор-інтерполянт, побудований на основі оператора-інтерфлетанта, вимагає $Q=O\left(6\left(\ell^{3}+1\right)\left(\ell^{3/2}+1\right)\left(\ell+1\right)\right)=O\left(\ell^{11/2}\right)$ значень функції. Таким чином, кубатурні формули $\Phi_{\mu}^{3}(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ потребують в

$$O\left(\frac{N}{Q}\right)=O\left(\frac{\ell^{9}}{\ell^{11/2}}\right)=O\left(\ell^{9-11/2}\right)=O\left(\ell^{7/2}\right)$$

раз менше значень функції $f(x,y,z)$ для досягнення похибки наближення $O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$. Теорема доведена.

8. Чисельний експеримент

В таблиці 1 для функції $f(x, y, z) = \sin(x+y+z)$ наведені результати наближеного обчислення інтегралу $I_1^3(m,n,p)$ при різних m,n,p за кубатурними формулами $\Phi_1^3(m,n,p)$ та $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$.

Введемо позначення: $\varepsilon = \left| I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p) \right|$, $\tilde{\varepsilon} = \left| I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) \right|$, кількість значень функції $f(x,y,z)$, що використовують в своїй побудові кубатурні формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ та $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$, відповідно позначаються Q та N.

Наведемо точні значення наближуваних інтегралів:

$$I_1^3(1,2,3) = 0.000043384641833, \quad I_1^3(2,3,4) = 0.000010588186623,$$
$$I_1^3(3,4,5) = 0.00000421272284, \quad I_1^3(4,5,6) = 0.000002101912063,$$
$$I_1^3(5,6,7) = 0.000001199811142.$$

Табл.1.

m	n	p	ℓ	ε	Q	$\tilde{\varepsilon}$	N
1	2	3	4	$2.8 \cdot 10^{-9}$	2048	$2.6 \cdot 10^{-9}$	262144
2	3	4	4	$7.1 \cdot 10^{-10}$	2048	$6.4 \cdot 10^{-10}$	262144
3	4	5	4	$2.8 \cdot 10^{-10}$	2048	$2.5 \cdot 10^{-10}$	262144
4	5	6	4	$1.5 \cdot 10^{-10}$	2048	$1.2 \cdot 10^{-10}$	262144
7	8	9	4	$9.8 \cdot 10^{-11}$	2048	$7.3 \cdot 10^{-11}$	262144

З результатів таблиці 1 можна зробити висновок, що для отримання похибки $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\ell^{3r}}\right)$ кубатурна формула $\Phi_1^3(m,n,p)$ є більш ефективною, ніж $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ з точки зору використаних значень функції $f(x,y,z)$.

9. Висновки за результатами та подальші дослідження

В даній роботі досліджуються кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних $f(x,y,z)$, які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функцій на класі диференційовних функцій. Вхідні дані – це значення функції у вузлових точках. Отримана оцінка похибки наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є. Запропоновані кубатурні формули мають переваги над відомими, так як для досягнення заданої точності використовують менше значень функції $f(x,y,z)$. Чисельний експеримент підтверджує теоретичні результати.

Метою подальших досліджень – питання якості побудованих кубатурних формул наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є. Необхідно довести, що кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функції трьох змінних $f(x,y,z)$, які використовують в своїй побудові оператори сплайн-інтерфлетації функцій, є оптимальними за порядком точності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с.
2. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є. Радиоэлектроника и информатика №4(29), 2004. Харьковский национальный университет радиоэлектроники. – С. 130-133.
3. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті.1,2 (51,52)' 2005. УкрДАЗТ. – С. 19-23.
4. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій. Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научых тудов. Темтический выпуск, «Автоматика и приборостроение», 38' 2005, Харьков 2005, С. 90-130.
5. Литвин О.М., Гулік Л.І. Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності. – Київ.: Наукова думка, 2011. – 210 с.
6. Нечуйвітер О.П. Про похибку наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерполянта, побудованого на основі сплайн-інтерфлетанта. Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)"˜ Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 133.
7. .Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Збірник наукових праць. Серія: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Харків, № 926, 2010 р. – С. 153-160.

Надійшла – 25.10.2011.