

УДК 517.929.7:681.3

Визначення параметрів керування температурним полем за допомогою оберненої задачі Стефана

В. П. Ляшенко

Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, Україна

У вигляді нелінійної задачі Стефана розглянута математична модель температурного поля циліндричної області з рухомою межею та діючим у цій області змінним внутрішнім джерелом тепла. Розв'язок нелінійної задачі знайдено чисельно-аналітичним методом, шляхом зведення крайової задачі до нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна та застосуванням методу ітерацій. На основі розв'язку оберненої задачі визначений параметр керування температурним полем, що дозволяє підтримувати на одній із границь області сталу температуру. В роботі визначено умови при яких температурне поле рухомої області буде сталим.

Ключові слова: математична модель, рівняння теплопровідності, задача Стефана, інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, функція Гріна, ітераційний алгоритм

В виде нелинейной задачи Стефана рассмотрена математическая модель температурного поля цилиндрической области с движущейся границей и действующим в этой области переменным внутренним источником тепла. Решение нелинейной задачи найдено численно-аналитическим методом, путем ее сведения к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна с ядром в виде функции Грина и последующего применения метода итераций. Используя решение обратной задачи определен параметр управления температурным полем, который позволяет поддерживать на одной из границ области постоянную температуру. В работе определено условие, при котором температурное поле движущейся области будет постоянным.

Ключевые слова: математическая модель, уравнение теплопроводности, задача Стефана, интегральное уравнение типа Гаммерштейна, функция Грина, итерационный алгоритм.

In the form of a nonlinear Stefan problem mathematical model of temperature field in a cylindrical area with moving abroad and working in the area variable internal heat source considered. Simplified formulation of the problem considered. For them, the analytical solutions are obtained. The solution of the nonlinear problem by numerically-analytical method found. Nonlinear problem to a nonlinear integral equation of Hammerstein type with the kernel in the form of the Green's function has been reduced, then the iterative method was applied. Control parameter temperature field, which allows you to maintain one of the boundaries of the constant temperature was determined from the inverse problem. A condition that allows you to maintain a constant temperature of a moving area is defined.

Key words: mathematical model, the heat equation, Stefan problem, the integral equation of Hammerstein type, Green function, iteration algorithm.

1. Вступ

У порошковій металургії виробництво стрічки та дроту із тугоплавких металів, наприклад вольфраму, відбувається одночасно з процесом підігрівання металу [1]. Це викликано тим, що більшість тугоплавких металів не деформується при кімнатній температурі. Перед пластичною деформацією дріт, що рухається через зону нагрівання довжиною $\xi(t) = L - v(t)t$ зі швидкістю

$v(t) \neq 0$, розігривається електричним струмом I_0 до технологічної температури T_l , а потім потрапляє у пристрій для деформування. При цьому до одного кінця зони нагрівання підведений нерухомий струмопідвід, а до іншого рухомий. Розглянемо дріт у вигляді рухомого ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками, що рухається через зону нагрівання зі швидкістю $v(t) \neq 0$ і нагрівається внутрішніми джерелами тепла у вигляді електричного струму, що через нього пропускається.

Проблема керування температурним полем, полягає у визначенні потужності джерел тепла $w(T, t) = \frac{I(t)^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ коли зона нагрівання зменшуючись

прямує до нуля, а температура у кінці зони нагрівання повинна залишатися сталою. У цьому випадку для підтримки сталого значення температури основним параметром керування є сила струму $I(t)$. Задача визначення температурного розподілу в області межі, якої змінюються і прямують до нуля відноситься до задачі Стефана без зміни фазового стану середовища.

Задачам Стефана де досліджується зміна фазового стану на межі двох середовищ присвячено багато робіт [2,3]. Для рухомих середовищ такого типу задачі зустрічаються досить рідко.

2. Мета роботи

Метою роботи є визначення температурного розподілу у зоні нагрівання, довжина якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)t$, $0 < t < t_0$ та визначення такого параметра керування температурним полем при якому температура у кінці зони нагрівання весь час буде залишатися сталою.

3. Матеріали і результати досліджень

Для визначення температурного поля розглядається задача для лінійного рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r, φ, z) в області $\Omega \times t: \{0 < z < \xi(t), 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$. Зважаючи на фізичну природу діючих джерел тепла $w(T, t)$ та симетрію поля по координаті φ розглядається в області $\Omega \times t: \{0 < z < \xi(t), 0 < r < r_0, 0 < t < t_0\}$ наступна задача

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - v(t) c \rho \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T, t), \quad (1)$$

$$T(r, z, 0) = T, \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T, T(r, \xi(t), t) = T, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, t)}{\partial r} = -\alpha(T - T_c) - \varepsilon \sigma (T^4 - T_c^4), \quad \frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

де $w(T, t) = \frac{I(t)^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ - щільність діючих у циліндричному середовищі

джерел тепла, $\lambda, c, \rho_0, \rho_n, \varepsilon$ - теплофізичні характеристики області, T_c - температура навколишнього середовища, σ - стала Стефана - Больцмана, $v(t)$ - швидкість руху середовища через зону нагрівання. Час t_0 визначається із умови $L - v(t)t = 0$. Функції $w(T, t), v(t) \in C^1$ - неперервні, додатно визначені.

Задача керування полягає у визначенні функції $w(T, t)$ у циліндричній області $\Omega \times t$, та умов при яких температура зони нагрівання буде сталою.

Температурне поле циліндра є змінною величиною, що залежить від параметра керування $I(t)$. З математичної точки зору визначення параметра керування $I(t)$, приводить до розв'язання оберненої задачі до задачі (1)-(4). Для цього необхідно щоб був відомий температурний розподіл у зоні нагрівання у будь-який момент часу.

На першому етапі дослідження вважаємо, що температурне поле невідоме. Для рівняння теплопровідності ставляться природні крайові умови теплообміну поверхні з навколишнім середовищем - ставиться крайова задача третього роду з не лінійністю у крайовій умові.

Якщо температурний розподіл уздовж радіуса циліндра не суттєвий, то можна перейти до розгляду усередненого температурного поля. При цьому враховується теплообмін поверхні з навколишнім середовищем [3].

Застосувавши до рівняння (1) оператор усереднення

$$u(z, t) = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T(r, z, t) r dr \quad (5)$$

і врахувавши умови теплообміну на границі області (4) отримаємо задачу

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t) c \rho_n \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0} \right) + \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha}{r_0} T_c - \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (u^4 - T_c^4) = c \rho_n \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (6)$$

$$0 < z < \xi(t) = L - v(t)t, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad (7)$$

$$u(0, t) = T_0, u(\xi(t), t) = T_l, \xi(t) = L - v(t)t. \quad (8)$$

Розв'язок задачі шукаємо у два етапи. Спершу розв'язується задача (1)-(4) при умові $v(t) = v = const, \xi(t) = L = const, t > 0$ та визначається сила струму I_0 , що необхідна для підтримки у кінці зони нагрівання рухомого середовища температури T_l . Потім, вважаючи, що температурний розподіл у зоні нагрівання відомий розв'язується обернена задача та визначається сила струму $I(t)$, що необхідна для підтримки температури T_l коли довжина зони нагрівання прямує до нуля.

Маємо початково-крайову задачу для квазілінійного рівняння теплопровідності, аналітичний розв'язок якої отримати неможливо.

Розв'яжемо рівняння (6) при умові $v(t) = v = const$, $\xi(t) = L = const, t > 0$ та знайдемо температурний розподіл у зоні нагрівання.

Шукаємо розв'язок задачі у безрозмірних координатах

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - V \frac{\partial \theta}{\partial x} - b(((T_l - T_c)\theta + T_c)^4 - T_c^4) + g_1 \theta + Po(\tau)n = Pe \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (9)$$

$$0 < x(\tau) < 1, \quad \tau > 0$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\theta(0, \tau) = 0, \theta(\xi(\tau), \tau) = 1,$$

де

$$x(\tau) = \frac{z(\tau)}{L}, \tau = \frac{t}{t_0}, n = \beta T_c + 1, \theta = \frac{u - T_0}{T_l - T_0}, Pe = \frac{c \rho_n L^2}{\lambda \tau_0}, \mu = \frac{2\alpha L^2}{\lambda r_0}, b = \frac{2\varepsilon \sigma \cdot L^2}{r_0 \lambda (T_l - T_c)},$$

$$V(\tau) = \frac{v(\tau) c \rho_n L^2}{\lambda L}, Po(\tau) = \frac{I(\tau)^2 \rho_0 L^2}{\lambda (T_l - T_c) \pi^2 r_0^4}, m = \beta (T_l - T_c), g_1 = (-\mu + Po(\tau)m).$$

Коли $\tau > 1$ то швидкість руху через зону нагрівання стала. В цьому випадку похідна за часом в рівнянні (9) зникає і ми приходимо до розв'язання крайової задачі для квазілінійного диференціального рівняння.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - V \frac{d\theta}{dx} + g\theta = f(\theta), \quad (11)$$

$$0 < x < 1, \tau > 1$$

$$\theta(0) = 0, \theta(1) = 1, \quad (12)$$

$$f(\theta) = \omega + b(((T - T_c)\theta + T_c) - T_c),$$

$$\text{де } b = \frac{2\varepsilon \sigma \cdot l}{r \lambda (T - T_c)}, g = (-\mu + Pom), \omega = -Pon.$$

Розв'язок задачі (11)-(12) шукаємо у вигляді розв'язку нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [4,5]. Побудуємо функцію Гріна для лінійного оператора задачі (11)-(12).

Функція Гріна для крайової задачі (11),(12) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \phi(s)e^{k_1 x}, & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ \psi(s)e^{k_2(x-\xi(j))}, & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де функції $\phi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з умов $\psi(s)e^{k_1 s} = \phi(s)k_2 e^{k_2(x-\xi(j))}$, $\theta_1'(x)\psi(s) - \theta_2'(x)\phi(s) = 1$.

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2 - k_1)}, & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2 - k_1)}, & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Підставивши функцію Гріна у інтегральне рівняння будемо мати

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds = \int_0^x \frac{e^{k_1(x-s)}}{(k_2 - k_1)} f(s) ds + \int_x^1 \frac{e^{k_2(x-s)}}{(k_2 - k_1)} f(s) ds, \quad (13)$$

де $f(x) = \omega + b((T_l - T_c)\theta(x) + T_c)^4 - T_c^4$.

Розв'язок рівняння (13) шукаємо методом ітерацій оскільки умова збіжності процесу виконується умова

$$q = \left(\int_0^1 \int_0^1 |G(x, s)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Скориставшись рекурентною формулою для побудови послідовності функцій $\theta_k(x)$

$$\theta_{k+1}(x) = \int_0^1 G(x, s) f_k(s) ds, \quad (14)$$

де $f_k(x) = \omega + b((T_l - T_c)\theta_k^j(x) + T_c)^4 - T_c^4$

отримаємо чисельні розрахунки значень функції $\theta(x)$ – температурний розподіл у зоні нагрівання при сталих значеннях параметрів I_0 та L .

Для знаходження функції $I(t)$ розглянемо частинний спрощений випадок задачі (6)-(8). Розв'яжемо задачу (6)-(8) знехтувавши перерозподілом температури у зоні нагрівання за рахунок теплопровідності випромінювання поклавши $\lambda = 0, \varepsilon = 0$. В такому випадку маємо задачу Коші для рівняння в частинних похідних, розв'язок якої можна отримати методом характеристик

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial z} - u\psi - \chi = 0, \quad (15)$$

$$u(x, 0) = \phi_1(x), u(0, 0) = T_0, \quad (16)$$

де $\psi = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} - \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n}$, $\chi = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n} + \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n} T_c$.

Тут перша з умов (16) взята із розв'язку задачі (15), (16) при умові що $v(t) = v = const$, і частинна похідна за часом зникає. Маємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dz} = F_1(z, u(z)), 0 < z < L \quad (17)$$

$$u(0) = T_0, \quad (18)$$

$$\text{де } F_1(z, u(z)) = u\psi_1 + \chi_1, \psi_1 = \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n v} - \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n v}, \chi_1 = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 c \rho_n v} + \frac{2\alpha}{r_0 c \rho_n v} T_c.$$

Її розв'язок має вигляд

$$u(z) = \left(\frac{\chi_1}{\psi_1} + T_0 \right) e^{\psi_1 z} - \frac{\chi_1}{\psi_1}. \quad (19)$$

Розв'язок задачі (15)-(16) при цьому має вигляд

$$u(z, t) = -\frac{1}{\psi_1} e^{-\psi_1(z - \frac{kt^2}{2} + t)} \frac{1}{(T_0 \psi_1 + \chi_1)} - \frac{\chi_1}{\psi_1}. \quad (20)$$

Обидва отриманих розв'язки аналітичні, але визначити параметр I_0 з них у явному вигляді неможливо.

Визначимо функцію $I(t)$ скориставшись розв'язком (19) або (20). Для цього скористаємося умовою $0 < z < \xi(t) = L - v(t)t, 0 \leq t \leq t_0$. Розбивши відрізок $0 \leq t \leq t_0$ на k частин та підставляючи у формули (19) або (20) замість z значення $z = \xi(t) = L - v(t)\tau_k, \tau_k = \frac{t_0}{k}$, визначимо методом прогонки значення параметра $I(t)$.

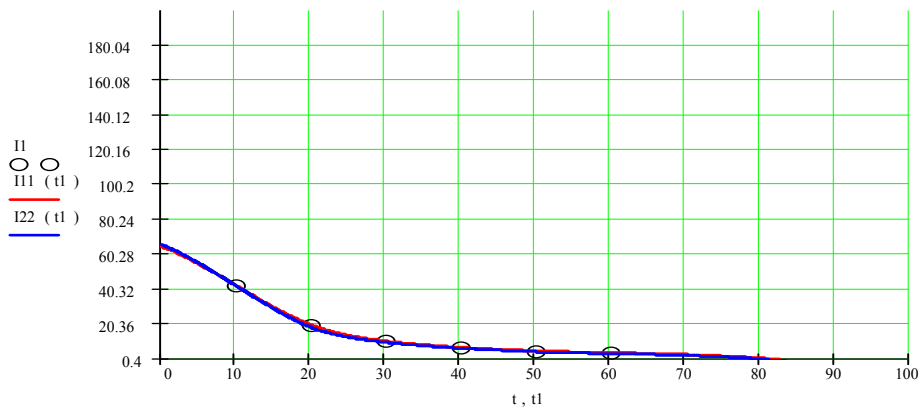


Рис. 1 Залежність сили струму $I(t)$ від часу t_i для підтримки сталої температури T_l .

На рис.1 зображено графіки функцій $I(t)$ знайдені із розв'язків (18) та (19), відповідно функції $I_{11}(t_1)$ та $I_{22}(t_1)$.

Точки лінії I_1 показують значення сили струму $I(t)$, що необхідна для підтримки сталої температури T_l у кінці зони нагрівання коли її довжина прямує до нуля.

Далі повернемося до розв'язання задачі (9)-(10) для $0 < \tau < 1$. Замінімо сталі значення сили струму I знайденою функцією $I(t)$, при цьому швидкість руху через зону нагрівання стає змінною. Розв'язок задачі (9)-(10) шукаємо методом Рунге, який базується на дискретизації за часом [3]. Для цього введемо в області $\Omega: \{0 < x < \xi(\tau), 0 < t < t_0\}$ рівномірну за часом сітку $\varpi_{\Delta\tau} = \{\tau_j = j\Delta\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$. На кожному часовому шарі підставляємо відповідні значення $I(\tau)$, отримані із розв'язків (18), (19). Для цього замінюємо похідну за часом різницевою похідною і поставимо у відповідність задачі (9)-(10) систему диференціально - різницевих задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

$$\frac{d^2\theta^j}{dx^2} - V_j \frac{d\theta^j}{d\tau} + g\theta^j = f(\theta), \quad (21)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < \tau < 1,$$

$$\theta^0 = \theta_0, \quad \theta^j(0) = \theta^j(\xi(j)) = 1. \quad (22)$$

$$f(\theta) = \omega + b((Tl - Tc)\theta^j + Tc)^4 - Tc^4,$$

$$\text{де } b = \frac{2\varepsilon\sigma \cdot l^2}{r_0\lambda(T_l - T_c)}, \quad g = (-\mu + Pom - \frac{Pe}{\Delta\tau}), \quad \omega = \frac{-Pe\theta^{j-1}}{\Delta\tau} - Pon.$$

Тобто розглядаємо на кожному відрізку часу нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно функції $\theta^j(x)$. Побудувавши функції Гріна $G_j(x, s)$ задачі (21)-(22), аналогічно випадку $\tau > 1$, зводимо задачі (21) – (22) до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами у вигляді функцій Гріна (13). Скориставшись формулою (14) побудуємо послідовність функцій $\theta_k(x)$ та отримаємо чисельні значення функції $\theta(x)$.

Графіки температурних розподілів, що отримані під час чисельних розрахунків на границі області є близькими до T_l на протязі часу $0 \leq t \leq t_0$.

Пряма $u(x, t)$ на рис.2 описує температурний розподіл через 50 секунд після початку процесу при керуванні температурним полем змінним значенням параметра $I(t)$. Пряма $u_2(x, t)$ на рис.2 описує температурний розподіл через 50 секунд після початку процесу при керуванні температурним полем за допомогою сталого значенням параметра I_0 , що в свою чергу приводить до певного зниження температури під час процесу нагрівання.

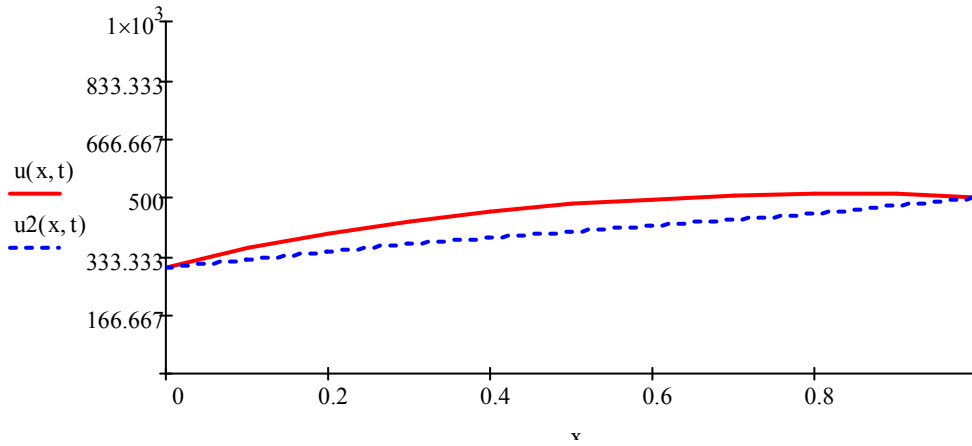


Рис.2 Графіки температурних розподілів в залежності від довжини $\xi(t)$ при $t = 50$ секунд.

Крива $u(x,t)$ описує температурний розподіл при значенні параметра $I(t)$, а крива $u_2(x,t)$ - при сталому значенні параметра I .

$$T_0 = 300K, \quad T_c = 330K, \quad \beta = 48 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha = 0,0001 \frac{Bm}{(m^2K)}, \quad \rho_n = 19.1 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3},$$

$$c = 137 \frac{Дж}{(kg \cdot K)}, \quad r_0 = 10^{-3} m, \quad t_0 = 100c, \quad \lambda = 500 \frac{Bm}{(m \cdot K)}, \quad \nu(t) = 0.001 \frac{m}{c}.$$

Дослідимо існування та єдиність розв'язку задачі (9)-(10). Для цього лінеаризуємо задачу зробивши заміну

$$u = ((T_l - T_c)\theta + T_c), \quad u^4 - T_c^4 = (u - T_c)(u + T_c)(u^2 + T_c^2) \leq (u - T_c) \max u.$$

Це дозволяє оцінити нелінійний оператор за допомогою лінійних операторів, які є обмежені і мають обернені.

Введемо позначення

$$L\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - V(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial x} + g\theta - b(u^4 - T_c^4).$$

Розглянемо сепарабельний простір $U_{\Delta\tau} \subset C_2[0;1]$ з

$$\text{нормою } \|u(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |u(x)|.$$

Теорема. Нехай виконуються умови $V(\tau), P_0(\tau) > 0$, причому функції $\|V(\tau)\| \leq N_1$, $\|P_0(\tau)\| \leq N_2$ - обмежені, де $N_1, N_2 - const$.

Тоді існує єдиний, неперервний по τ розв'язок $\theta(x, \tau) \in C_2$ задачі(14)-(16).

Доведення.

Розглянемо оператори :

$$L_1 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \min V(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial x} + g\theta,$$

$$L_2 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - V(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial x} + g\theta - b(u - T_c) \max u \quad \text{та оператор } L.$$

Для цих операторів у просторі C_2 виконується нерівність

$$L_2 \leq L \leq L_1.$$

Оскільки оператори L_2, L_1 лінійні і мають обернені, то задача (14)-(16) має єдиний розв'язок.

4. Висновки і перспективи подальших досліджень

Побудовано математичну модель у вигляді нелінійної нестационарної задачі Стефана для рівняння теплопровідності з діючим внутрішнім джерелом тепла, що описує температурний розподіл рухомої області, один із параметрів якої є змінною величиною $\xi(t) = L - v(t)t$, $0 < t < t_0$. Отримано аналітичні розв'язки спрощених задач та визначено функцію $I(t)$ – параметр керування температурним полем на основі розв'язку оберненої задачі Стефана.

Ця модель дозволяє враховувати під час обчислення температурних розподілів усі втрати тепла з поверхні. Розв'язки можуть бути використані для проектування системи автоматичного контролю температури дроту та стрічки під час термічної обробки та пластичної деформації металу. Усі розрахунки і графіки виконані в середовищі Mathcad.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крупин А. В. Соловьев В.Я. Пластическая деформация тугоплавких металлов. М. : Металлургия 1971. 352с.
2. Березовская Л.М. Кучеренко В.И. К расчету тепловых полей в охлаждаемых струях расплава. – В кн.. Физико-технические приложения краевых задач. Киев: Наук. Думка. – 1978, с. 169–176.
3. Ляшенко В. П. Задача типу Стефана для циліндричної області /О. Б. Кобильська, В.П. Ляшенко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, 2010. – Випуск 12. – С. 122–127.
4. Агошкин В.И., Дубовский П.Б. Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. –М.: Физматлит , 2002, 320с.
5. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин – М.: Наука, 1981. – 216 с.