УДК 519.6

Об одном численном методе одномерной оптимизации

В. П. Черненко

Кременчугский национальный университет имени М. Остроградского, Украина

В данной работе рассматривается новый прямой метод оптимизации унимодальной функции одной переменной на отрезке, приводится алгоритм метода. Проводится сравнительный анализ нового метода и трех методов одномерной оптимизации: метода деления отрезка пополам, метода золотого сечения и метода Фибоначчи. Все эти методы относятся к симметричным методам исключения отрезков. Показывается эффективность данного метода. В качестве показателя эффективности берутся относительное уменьшение первоначального интервала и количество вычислений значений функции, требуемых для достижения заданной точности.

Ключевые слова: *прямые методы оптимизации, унимодальная функция, эффективность метода.*

У даній роботі розглядається новий прямий метод оптимізації унімодальної функції однієї змінної ні відрізку, доводиться алгоритм методу. Проводиться порівняльний аналіз нового методу і трьох методів одновимірної оптимізації: методу ділення відрізку навпіл, методу золотого перерізу і методу Фібоначчі. Усі ці методи відносяться до симетричних методів виключення відрізків. Показується ефективність даного методу. Як показник ефективності беруться відносне зменшення початкового інтервалу і кількість обчислень значень функції, необхідних для досягнення заданої точності.

Ключові слова: *прямі методи оптимізації, унімодальна функція, ефективність методу.*

In this article the new direct optimization method of unimodal function of one variable on the interval is considered. Also the algorithm of this method is reduced. The comparing analysis of the new method and the one-dimensional optimization methods: the method of bisection of the interval, the method of golden section and the Fibonacci method is performed. All of these methods belong to the symmetric methods of exception of the intervals. The efficiency of this method is showed. As an indicator of the efficiency is taken relative decrease of the initial interval and the number of calculations of the function required to achieve a given accuracy.

Key words: *. direct optimization method, unimodal function, efficiency of method.*

1. Введение

Для решения задачи оптимизации функции на отрезке на практике, как правило, применяют численные методы. Классический метод исследования функции на экстремум имеет весьма ограниченное применение. Вычисление производной функции в практических задачах зачастую является непростым делом. Может оказаться, что значения функции определяются из наблюдений или каких-либо физических экспериментов, и получить информацию о ее производной крайне трудно. Поэтому важно иметь методы поиска экстремума, не требующие вычисления производных, более удобные для реализации на современных компьютерах.

Численные методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, относятся к прямым методам оптимизации [1–5]. Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений функции в заданных точках.

На сегодня разработано и исследовано большое количество прямых методов одномерной оптимизации. Каждый из этих методов имеет свои недостатки и достоинства при их применении для решения конкретных экстремальных задач. При этом методы, разработанные для решения какого-либо класса задач, часто используются для решения более сложных задач. Поэтому методы одномерной оптимизации могут широко использоваться для разработки и теоретического исследования эффективности методов многомерной оптимизации, а также при решении многомерных экстремальных задач.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума функции одной переменной и проведем их сранительный анализ по эффективности. Самым слабым требованием на функцию, позволяющим использовать эти методы, является ее унимодальность [4]. Поэтому далее будем считать функцию унимодальной на отрезке.

Прямые методы делятся на методы перебора и методы исключения отрезков. В методах перебора, точки x_i, в которых определяются значения $f(x)$, выбирают заранее. Методы исключения отрезков основаны на следующем принципе. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Сравнив значения $f(x)$ в точках x_1 и x_2 (пробных точках), можно сократить отрезок поиска точки x^*, перейдя к отрезку $[a; x_2]$, если $f(x_1) \le f(x_2)$ или к отрезку $[x_1; b]$ если $f(x_1) > f(x_2)$. Описанную процедуру можно повторить необходимое число раз, последовательно уменьшая отрезок, содержащий точку минимума. Когда длина последнего из найденных отрезков станет достаточно малой, следует положить $x^* \approx \bar{x}$, где $\bar{x}$ – одна из точек этого отрезка, например, его середина.

Чтобы относительное уменьшение отрезка на каждой итерации не зависело от того, какая из его частей исключается из дальнейшего рассмотрения, пробные точки следует располагать симметрично относительно середины исходного отрезка. В зависимости от способа выбора пробных точек получаются различные симметричные методы исключения отрезков.

2. Сравнительный анализ методов исключения отрезков

При сравнении прямых методов минимизации обычно учитывают количество n вычислений значений $f(x)$, гарантирующее заданную точность $\varepsilon(n)$ определения точки x^* тем или иным методом. Чем меньше n, тем эффективнее считается метод. При этом вспомогательные операции такие, как выбор пробных точек, сравнение значений $f(x)$ и т.п., не учитываются. Во многих практических случаях определение значений целевой функции требует больших затрат (например, времени ЭВМ или средств для проведения экспериментов) и вспомогательными вычислениями можно пренебречь. А эффективность метода минимизации особенно важна именно в таких случаях, поскольку позволяет сократить указанные затраты.

Сравнение методов исключения отрезков можно проводить, сравнивая их относительные эффективности. Обозначим через L_0 длину исходного интервала неопределенности, через L_n – длину интервала, полученного в результате n вычислений функций. Тогда $Q = L_n / L_0$ – относительное уменьшение первоначального интервала и есть показатель эффективности.

Рассмотрим следующие методы исключения отрезков: метод деления отрезка пополам (МДП), метод золотого сечения (МЗС) и метод Фибоначчи (МФ).

Метод деления отрезка пополам. Простейшим симметричным методом минимизации унимодальной функции одной переменной, не требующим вычисления производной, является метод деления отрезка пополам. Несмотря на простоту, этот метод требует большого количества вычислений и не всегда позволяет найти решение с заданной точностью.

Эффективность данного метода: $Q_1 = (0{,}5)^{n/2}$.

Если задана точность ε, то значение n вычисляется из условия:

$$n \geq \frac{2\ln(\varepsilon)}{\ln(0{,}5)}.$$

Метод золотого сечения. Этот метод минимизации унимодальной функции на отрезке также прост, как метод деления отрезка пополам, но он позволяет решить задачу с требуемой точность при меньшем количестве вычислений значений функции.

Эффективность данного метода: $Q_2 = (0{,}618)^{n-1}$,

Если задана точность ε, то значение n вычисляется из условия:

$$n \geq 1 + \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(0{,}618)}.$$

Метод Фибоначчи. Этот метод является предельным случаем метода золотого сечения, т.к. для метода золотого сечения

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{L_3} = \ldots = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \gamma = 1{,}6180\ldots,$$

и для метода Фибоначчи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \gamma.$$

Например, для $n = 12$ $F_{12}/F_{11} = 144/89 = 1{,}6179...$

Детальный сравнительный анализ этих методов можно найти в [5].

Эффективность данного метода: $Q_3 = 1/F_{n-2}$.

Если задана точность ε, то значение n вычисляется из условия:

$$F_n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Сравним рассмотренные выше методы, взяв в качестве показателя эффективности относительное уменьшение первоначального интервала.

Таблица 1. Величины относительного уменьшения интервала

Метод поиска	Количество вычислений значений функции			
	$n=2$	$n=5$	$n=10$	$n=20$
МДП	0,500	0,177	0,031	0,0009
МЗС	0,618	0,146	0,013	0,0001
МФ	1,000	0,333	0,029	

Из таблицы 1 видно, что наиболее эффективным в смысле точности является метод золотого сечения.

Сравним теперь рассмотренные выше три метода, взяв в качестве показателя эффективности количество вычислений значений функции.

Таблица 2. Требуемые количества вычислений значений функции

Метод поиска	Заданная точность			
	$\varepsilon=0{,}1$	$\varepsilon=0{,}05$	$\varepsilon=0{,}01$	$\varepsilon=0{,}001$
МДП	7	9	14	20
МЗС	6	8	11	16
МФ	6	8	11	16

Из таблицы 2 видно, что наиболее эффективными в этом случае являются метод золотого сечения и метод Фибоначчи.

Рассмотрим теперь главные недостатки этих методов. Численная реализация метода золотого сечения приводит к тому, что он становится практически неприменимым даже при небольших n. Это связано с тем, что коэффициент уменьшения интервала неопределенности равен $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$, а число $\sqrt{5}$ в компьютере вычисляется приближенно и уже первые точки итерационного процесса будут найдены с некоторой ошибкой. Эта ошибка при увеличении n довольно быстро накапливается, а это приводит к тому, что нарушается свойство симметричности метода. Такой же недостаток присущ и методу Фибоначчи, т.к. коэффициент уменьшения интервала неопределенности F_{n-2}/F_n в общем случае является бесконечной дробью. Поэтому уже на первом шаге новая пробная точка будет вычислена приближенно. Соответствующая ошибка будет приводить к увеличению ошибки на следующих шагах и к нарушению симметричности метода.

Далее рассмотрим новый метод исключения отрезков и будем его сравнивать только с методом золотого сечения, т.к. этот метод является самым эффективным по двум показателям из трех расмотренных методов.

3. Алгоритм нового метода

Предлагаемый метод лишен недостатков метода золотого сечения. Вместо разбиения исходного отрезка точками x_1 и x_2 на три части предлагается делить исходный отрезок на пять равных частей точками x_1, x_2, x_3, x_4. Тогда точка x_2 делит исходный отрезок в отношении $2:5=0{,}4$, а точка x_3 – $3:5=0{,}6$. Получившиеся отношения являются рациональными числами в отличие от метода золотого сечения, в котором точки x_1 и x_2 разбивают отрезок в отношении $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ и $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ соответственно. Таким образом, мы избавляемся от главного недостатка, присущего методам золотого сечения и Фибоначчи.

Опишем алгоритм нового метода.

Шаг 1. Задать a, b, ε. Положить $\tau = 0{,}4$.

Шаг 2. Вычислить $x_2 = a + \tau(b-a)$, $x_3 = b - \tau(b-a)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$.

Шаг 3. Перейти к новому отрезку: если $f(x_2) \le f(x_3)$, то положить $a = a$, $b = x_3$, иначе – $a = x_2$, $b = b$.

Шаг 4. Проверить на окончание поиска: если $b - a < \varepsilon$, то положить $x^* \approx \bar{x} = (a+b)/2$, $f^* \approx f(\bar{x})$, иначе – к шагу 2.

Эффективность данного метода: $Q_4 = (0{,}6)^{n-1}$ Если взять $n = 10$, то $Q_4 = 0{,}010$, эффективность метода золотого сечения при таком же числе шагов: $Q_2 = 0{,}013$. Значит, предлагаемый метод является самым эффективным в смысле точности из всех рассмотренных методов.

Блок-схема предлагаемого метода представлена на рис.3.1.

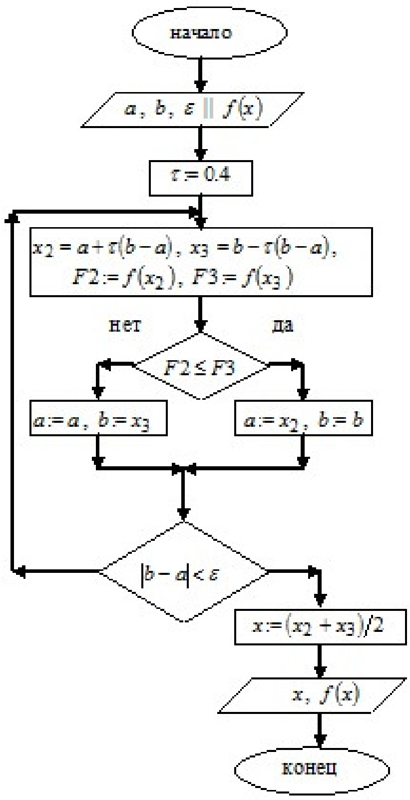

Рис.3.1. Блок-схема нового метода

Рассмотрим недостатки предлагаемого метода. Если ввести понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычислений функции на одной итерации тогда: $Q_1^* = 0{,}38/1 = 0{,}38$ – эффективность метода золотого сечения, а $Q_4^* = 0{,}4/2 = 0{,}2$ – эффективность предлагаемого метода. Видно, что в этом случае метод золотого сечения более эффективен, т.к. в методе золотого сечения на каждой итерации значение функции вычисляется один раз, а в предлагаемом методе – два раза.

Этот недостаток можно устранить, усовершенствовав новый метод.

Согласно предложенному алгоритму:

$$x_2 = 0{,}6a + 0{,}4b,\ x_3 = 0{,}4a + 0{,}6b.$$

Найдем теперь новые пробные точки, идя по левой ветви блок-схемы (для правой ветви проводяться аналогичные рассуждения):

$$x_3' = 0{,}64a + 0{,}36b = x_2 - 0{,}04(b-a) < x_2,$$
$$x_2' = 0{,}76a + 0{,}24b = x_3' - 0{,}12(b-a) < x_3' < x_2$$

Таким образом, новая левая пробная точка лежит левее предыдущей правой пробной точки. Значит, на каждом новом шаге итерации можно вычислять значение функции только в правой пробной точке, а значение в новой левой точке брать их предыдущего шага, которое равно значению в предыдущей правой точке.

Данная модификация метода приводит к тому, что предложенный метод становится самім эффективным по всем показателям.

3. Выводы

Задача оптимизации функций одной переменной относится к наиболее простому классу оптимизационных задач. Тем не менее, анализ задач такого типа занимает центральное место в оптимизационных исследованиях. Такие задачи обычно решаются в инженерной практике. В работе проведен сравнительный анализ эффективности прямых одномерных методов решения оптимизационных задач и показана эффективность предлагаемого метода.

Направление дальнейшего исследования: одномерные методы оптимизации могут быть использованы для анализа подзадач, которые возникают при решении многомерных задач оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
2. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1994. – 374 с.
3. Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. – М.: Наука, 1997. – 268 с.
4. Жалдак М. І.,Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальній посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
5. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

Надійшла у першій редакції - 05.03.2013, в останній - 16.04.2013.