

УДК 519.713; 519.711

Численная модель дифракции плоской электромагнитной волны на осесимметричном параболическом рефлекторе

С. В. Жученко

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В статье предлагается метод численного выделения особенностей в гиперсингулярных уравнениях возникающих в трёхмерной задаче дифракции электромагнитного поля на аксиальносимметричных поверхностях. Приводятся результаты решения одной задачи, а с их помощью проводится вычисление электромагнитных полей непосредственно возле рефлектора, вдоль его оси. Приведены графики мощности излучения в дальней зоне.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, численное решение, компьютерный эксперимент, задача дифракции.

В статті пропонується метод чисельного виділення особливостей в гіперсингулярних рівняннях виникаючих в тримірній задачі дифракції електромагнітного поля на аксиальносиметричних поверхнях. Приводяться результати рішення однієї задачі, а з їх допомогою здійснюється обчислювання електромагнітних полів безпосередньо біля рефлектора, уздовж його осі. Приведені графіки потужності випромінювання в дальній зоні.

Ключові слова: гіперсингулярне інтегральне рівняння, чисельний розв'язок, метод виділення особливостей, задача дифракції.

In the paper was proposed method of the numerical detaching from the singularity hyper singular equation of arising into three-dimensional task of the diffraction electromagnetic field towards axially symmetric surface. The digital experiment was conducted by example the mathematical model of the diffraction electromagnetic wave upon the perfectly conducting reflector. Presented of the diagrams emission power into far-field radiation

Key words: hyper singular integral equations, numerical solution, computer-based experiment, diffraction problem.

1. Истоки исследования автора

Такая модель дифракции электромагнитного поля на волноводах вращения использовалась автором и ранее, например, она подробно представлена в совместном с профессором Щербиной В.А. докладе на симпозиуме МДОЗМФ 2011 года или в статье в журнале «Вестник Харьковского университета» в 2007 году. Однако ранее возникающее в задаче гиперсингулярное интегральное уравнение решалось без выделения сингулярной и логарифмической особенностей. Численное решение задачи о дифракции электромагнитной волны на параболическом рефлекторе было проведено с использованием такого выделения особенностей. Предлагается технология численного выделения таких особенностей и проводится решение ряда задач.

2. Постановка задачі

Поверхність рефлектора S получается вращением параболы $r(z)$ вокруг оси z . Параметризацию этой поверхности можно представить в виде: $\bar{x} = \bar{x}(\varphi, z) = \mathcal{R}(\varphi, z) + z\bar{e}_3$, $\mathcal{R} = r(z)\bar{e}(\varphi)$.

$$\text{Здесь } \bar{e}(\varphi) = \cos \varphi \bar{e}_1 + \sin \varphi \bar{e}_2, \quad r(z) = R_0 \sqrt{\frac{z}{2L} + \frac{1}{2}}, \quad -L \leq z \leq L.$$

Линии главных кривизн — это меридианы и параллели поверхности. Координаты на поверхности S резонатора: вдоль параллели это φ — угол вращения образующей вокруг оси z , а вдоль меридианы это координата z .

$$\bar{\tau}_1(\varphi) = \bar{e}'(\varphi), \quad \bar{\tau}_2(\varphi, z) = \frac{\mathcal{R}'_z + \bar{e}_3}{\sqrt{1 + |\mathcal{R}'_z|^2}} \quad - \text{единичные вектора касательных к}$$

паралелям и меридианам поверхности, соответственно,

$$\bar{n}(\bar{x}) = \bar{\tau}_1(\varphi) \times \bar{\tau}_2(\varphi, z) \quad - \text{нормаль к поверхности } S.$$

В рассматриваемой модели электрическое поле дифракции на рефлекторе S представляется выражением:

$$\bar{E}_1(\bar{x}) = \nabla \times \int_S \left[\bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial n(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y}) \right] \frac{e^{ip|\bar{x}-\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|} ds_y, \quad (1)$$

где $\bar{j}(\varphi, z) = u(\varphi, z)\bar{\tau}_1(\varphi) + v(\varphi, z)\bar{\tau}_2(\varphi, z)$ — касательное векторное поле искомого решения на S ,

$$K \bar{j}(\bar{y}) = k_1(\bar{y})(\bar{j}(\bar{y}), \bar{\tau}_1(\bar{y}))\bar{\tau}_1(\bar{y}) + k_2(\bar{y})(\bar{j}(\bar{y}), \bar{\tau}_2(\bar{y}))\bar{\tau}_2(\bar{y}). \quad \text{Здесь}$$

$$k_1(\bar{y}), \quad k_2(\bar{y}) \quad - \text{главные кривизны поверхности } S.$$

Полное поле представляется в виде суммы векторов $\bar{E}(\bar{x}) = \bar{E}_0(\bar{x}) + \bar{E}_1(\bar{x})$, где $\bar{E}_0(\bar{x})$ — плоская волна, распространяющаяся вдоль оси z в R^3 .

Стационарное поле дифракции, представленное в виде интегрального выражения (1), удовлетворяет дифференциальному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \bar{E}_1(\bar{x}) + p^2 \bar{E}_1(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega \in R^3 \setminus S, \quad p^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2)$$

и дифференциальному уравнению электростатики

$$(\nabla, \bar{E}_1(\bar{x})) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega. \quad (3)$$

Кроме того, выражение (1) удовлетворяет условию излучения на бесконечности

$$E_1(\bar{x}) = C_0 \left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \right) \frac{e^{ik|\bar{x}|}}{|\bar{x}|} + O\left(\frac{1}{|\bar{x}|^2} \right), \quad \text{при } |\bar{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

На идеально проводящем экране рефлектора полное поле должно удовлетворять условию $\bar{n}(\bar{x}) \times \bar{E}(\bar{x}) = 0$, что даёт для неизвестного поля $\bar{j}(\bar{y})$, $\bar{y} \in S$ краевое условие на S вида [1]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{n}(\bar{x}) \times \left[\nabla \times \oint_S \left\{ \bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{n}(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y}) \right\} \frac{e^{ip|\bar{x}_\varepsilon - \bar{y}|}}{|\bar{x}_\varepsilon - \bar{y}|} ds_y \right] = \bar{E}_0(\bar{x}) \times \bar{n}(\bar{x}), \quad (5)$$

где $\bar{x}_\varepsilon = \bar{x} + \varepsilon \bar{n}(\bar{x})$, $\bar{x} \in S$.

Как показано в [1], представление для искомого касательного поля решения в виде $\bar{J}(\bar{y}) = \bar{j}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{n}(\bar{y})} - K \bar{j}(\bar{y})$ обеспечивает существование предела $\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \right)$ для любого гладкого поля $\bar{j}(\bar{y})$, не зависимо от знака ε .

Касательные к поверхности S вектора в правой и левой части выражения (5) проектируются на касательные к той же поверхности вектора $\bar{\tau}_1(\bar{x})$ и $\bar{\tau}_2(\bar{x})$. В результате получается система из двух скалярных гиперсингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скалярных функций $u(\bar{y})$ и $v(\bar{y})$:

$$\left(\bar{\tau}_m(\bar{x}), \oint_S \bar{n}(\bar{x}) \times \left[\bar{J}(\bar{y}) \times \nabla_x \frac{e^{ip|\bar{x} - \bar{y}|}}{|\bar{x} - \bar{y}|} \right] ds_y \right) = (\bar{n}(\bar{x}) \times \bar{E}_0(\bar{x}), \bar{\tau}_m(\bar{x})), \quad m = 1, 2 \quad (6)$$

Здесь \oint понимается в смысле предела по $\varepsilon \rightarrow 0$, как это представлено в (5).

3. Численный метод выделения особенностей

Поскольку S – поверхность вращения, то естественно ядра интегральных уравнений, а с ними и искомые функции $u(\bar{y})$, $v(\bar{y})$ разложить в ряды Фурье по переменной φ . Можно показать, что в этом случае система (6) превратится в бесконечную цепочку независимых друг от друга систем гиперсингулярных интегральных уравнений для различных гармоник рядов Фурье искомого

функций $u(\bar{y})$, $v(\bar{y})$, то есть пар функций от $z \begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix}$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ вида

$$\begin{pmatrix} K_{11}^q & K_{12}^q \\ K_{21}^q & K_{22}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_q \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_q^1(z) \\ f_q^2(z) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для численного моделирования решений системы (6) её сведение к системе (7) даёт важное преимущество, поскольку искомые функции u_q, v_q зависят от одной переменной z .

Чтобы провести эту процедуру согласно методу дискретных особенностей на оси z по высоте параболического рефлектора, вводится неравномерная сеть точек, координаты которых определяются по формуле

$$z_{0j}^n = L * \cos \frac{j}{n} \pi = L * t_{0j}^n, \quad j = 1, \dots, n-1. \text{ Здесь } L - \text{ высота рефлектора,}$$

а $\cos \frac{j}{n} \pi$ представляют собой $n-1$ различных нулей многочлена Чебышева

$$U_{n-1}(t_{0j}^n) = 0 \quad [2].$$

Через эти точки проводятся плоскости, перпендикулярные оси Oz , которые на поверхности рефлектора образуют круговые сечения. В этих сечениях располагаются неподвижные точки или, как их ещё называют, точки наблюдения $\vec{x}_{0i} = (r_{0i}, 0, z_{0i}) \quad i = 1, \dots, n-1$, а также и точки интегрирования $\vec{y}_{0j} = (r_{0j} \cos \varphi, r_{0j} \sin \varphi, z_{0j}) \quad j = 1, \dots, n-1, \varphi \in [-\pi, \pi]$.

Именно по этим сечениям проводится разложение подинтегральных выражений в ряды Фурье. Кроме того, когда точка наблюдения \vec{x}_{0i} располагается в сечении, где производится интегрирование по кругу, при определении коэффициентов Фурье, то есть когда $i = j$, при $\varphi = 0$ в ядре возникают особенности, которые выделяются численно. Для этого в левой части уравнения (6) отдельно рассматриваются интегралы, отвечающие потенциалам простого:

$$\left(\vec{\tau}_m(\vec{x}), \oint_S \vec{n}(\vec{x}) \times \left[K \vec{j}(\vec{y}) \times \nabla_x \frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right] ds_y \right), \quad m = 1, 2. \quad (8)$$

и двойного

$$\left(\vec{\tau}_m(\vec{x}), \oint_S \vec{n}(\vec{x}) \times \left[\vec{j}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n(\vec{y})} \times \nabla_x \frac{e^{ip|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right] ds_y \right), \quad m = 1, 2. \quad (9)$$

слоёв при $\varepsilon=0$ (см. формулу (5)). Чтобы избежать деления на ноль в обеих интегралах, смещаем вдоль касательной $\vec{\tau}_2(0, z_{0j})$ точку наблюдения на небольшую экспериментально подобранную величину δ . В результате точка наблюдения получает координаты $\vec{x}_{0j}^* = \vec{x}_{0j} + \delta \vec{\tau}_2(0, z_{0j})$. Ядра интегралов (9), отвечающие потенциалу двойного слоя при $m = 1, 2$, представляются в виде $\frac{C_m(\vec{x}_{0j}^*, \vec{y}_{0j})}{|\vec{x}_{0j}^* - \vec{y}_{0j}|^3}$, где $C_m(\vec{x}_{0j}^*, \vec{y}_{0j})$ – непрерывные функции. Чтобы оценить их в

окрестности особенности, умножаем эти ядра на δ^3 в случае, когда \vec{y}_{0j} определена при $\varphi = 0$, и полученные постоянные обозначим через $C_{0,j}^m$. Эти постоянные используются для выделения гиперсингулярных особенностей, для

чего проводится интегрирование по углу φ выражений $\frac{C_{0j}^m(x_{0j}^*[3] - y_{0j}[3])^2}{|\vec{x}_{0j}^* - \vec{y}_{0j}(\varphi)|^3}$

по обычным формулам прямоугольников, но с переменным шагом $\Delta\varphi$. Для малых значений угла φ этот шаг чрезвычайно мал, а затем, по мере удаления от точки \vec{x}_{0j}^* , он постепенно увеличивается. Это интегрирование проводится в экспериментально подобранном интервале $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Вычисленные значения и будут искомыми гиперсингулярными особенностями в данном сечении j , обозначим их через $f_{n-2}^q(t_{0j}^n)$ для $q = 1, 2$, соответственно. Эти особенности будут использоваться при интегрировании вдоль оси Oz , то есть в интегралах $\int_{-1}^1 \frac{f_{n-2}^q[t]}{(t-s)^2} \sqrt{1-t^2} dt$ при $q = 1, 2$; . Весовая функция $\sqrt{1-t^2}$ используется при интегрировании вдоль оси Oz во всех интегралах задачи для выполнения условий Майкснера в вершине и на краю параболоида. Это условие обеспечивает ограниченность получаемого решения. При $|\varphi| > \varphi_0$ увеличение значения интеграла практически прекращается и становится меньшим наперед заданной величины ϵps ввиду удалённости от точки \vec{x}_{0j}^* , поэтому интегрирование по оставшейся части окружности относится к регулярной составляющей интеграла.

По аналогичной методике проводится и выделение сингулярных особенностей в интеграле (8), отвечающем за потенциал простого слоя, где подинтегральное выражение в окрестности особенности представляется в виде $\frac{B_m(\vec{x}_{0j}^*, \vec{y}_{0j})}{|\vec{x}_{0j}^* - \vec{y}_{0j}|^2}$, $m = 1, 2$. Чтобы оценить непрерывную функцию $B_m(\vec{x}_{0j}^*, \vec{y}_{0j})$ в

этой окрестности при $\vec{y}(0, z_{0j})$, ядро этого интеграла умножаем на δ^2 . Сингулярные особенности, вычисленные для интегралов, отвечающих за потенциал простого слоя, обозначим как $p_{n-2}^q(t_{0j}^n)$ для $q = 1, 2$, соответственно. Особенности будут использоваться при интегрировании вдоль оси Oz , в интегралах $\int_{-1}^1 \frac{p_{n-2}^q(t)}{(t-s)} \sqrt{1-t^2} dt$. Впрочем, эти особенности будут ещё

корректироваться. Дело в том, что при вычислении гиперсингулярных особенностей в окрестности угла $[-\varphi_0, \varphi_0]$ мы предполагали, что функции $C_m(\vec{x}_{0j}^*, \vec{y}_{0j})$ постоянны и равны $C_{0,j}^m$. Это видимо не так, поэтому эту неточность будем компенсировать с помощью выделения сингулярной особенности в интеграле (9). Для этого выражение

$$\left(\frac{C_m(\bar{x}_{0j}^*, \bar{y}_{0j}(\varphi))}{|\bar{x}_{0j}^* - \bar{y}_{0j}(\varphi)|^3} - \frac{C_{0j}^m}{|\bar{x}_{0j}^* - \bar{y}_{0j}(\varphi)|^3} \right) (x_{0j}^*[3] - y_{0j}[3])$$

інтегрується на том же інтервалі $[-\varphi_0, \varphi_0]$ и полученные значения будут добавлены к сингулярным особенностям $P_{n-2}^q(t_{0j}^n)$.

Неточности, имевшие место при выделении особенностей в интеграле (8), тоже будут учтены за счёт выделения логарифмической особенности. Для этого выражение

$$\left(\frac{B_m(\bar{x}_{0j}^*, \bar{y}_{0j}(\varphi))}{|\bar{x}_{0j}^* - \bar{y}_{0j}(\varphi)|^2} - \frac{B_{0j}^m}{|\bar{x}_{0j}^* - \bar{y}_{0j}(\varphi)|^2} \right) / \ln(x_{0j}^*[3] - y_{0j}[3])$$

інтегрується на том же інтервалі $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Полученные значения будут обозначены как

$l_{n-2}^q(t_{0j}^n)$ и будут использованы при интегрировании по оси Oz в выражениях $\int_{-1}^1 \ln|t - s| l_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2} dt$ при $q = 1, 2$.

Когда $i \neq j$, ядра интегралов (8) и (9) будут регулярными функциями, поэтому интегрирование по кругу будет проводиться без выделения особенностей. Из вычисленных значений регулярных интегралов $R_m(t_{0j})$ необходимо вычесть значения гиперсингулярных, сингулярных и логарифмических ядер в данном сечении j . В результате получается формула

$$R_1^*(t_{0i}^n, t_{0j}^n) = R_1(t_{0i}^n, t_{0j}^n) - \frac{f_{n-2}^q(t_{0j}^n)}{(t_{0j}^n - t_{0i}^n)^2} - \frac{P_{n-2}^q(t_{0j}^n)}{(t_{0j}^n - t_{0i}^n)} - \ln|t_{0i}^n - t_{0j}^n| l_{n-2}^q(t_{0j}^n)$$

Здесь t_{0j}^n и t_{0i}^n – нули многочлена Чебышева II-го рода степени $n-1$. В нашей формуле t_{0j}^n определяет сечение рефлектора, по которому проводилось интегрирование по кругу, а t_{0i}^n – сечение, в котором расположена точка наблюдения \bar{x}_{0i} .

4. Алгоритм решения задачи и результаты пробных вычислений

После выделения особенностей для всех выделенных сечений на каждой неподвижной точке проводится разложение в ряд Фурье регулярных составляющих ядер интегральных уравнений. В результате получаются

интегральные уравнения (7). Операторы K_{ii}^q $i = 1, 2$; для каждой гармоники q в (7) имеют вид:

$$K_{ii}^q w_{n-2}^q = (Af_{n-2}^q)(t_{0j}^n) + (\Gamma^{-1} p_{n-2}^q)(t_{0j}^n) + (L^{II} l_{n-2}^q)(t_{0j}^n) + (P^{II} R_{n-2}^q)(t_{0j}^n), \quad (8)$$

где $(Af_{n-2}^q)(t_{0j}^n) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_{n-2}^q(t)}{(t-t_{0j}^n)^2} w_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2} dt$ – гиперсингулярный оператор

A с выделенными особенностями $f_{n-2}^q(t_{0j}^n)$, $j = 1, \dots, n-1$,

$$(\Gamma^{-1} p_{n-2}^q)(t_{0j}^n) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_{n-2}^q(t)}{(t-t_{0j}^n)} w_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2} dt$$
 – сингулярный оператор Γ^{-1}

с особенностями $p_{n-2}^q(t_{0j}^n)$, $j = 1, \dots, n-1$,

$$(L^{II} l_{n-2}^q)(t_{0j}^n) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t-t_{0j}^n| l_{n-2}^q(t_{0j}^n) w_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2} dt$$
 – оператор с

логарифмическим ядром и особенностями $l_{n-2}^q(t_{0j}^n)$, $j = 1, \dots, n-1$,

$$(P^{II} R_{n-2}^q)(t_{0j}^n) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 R_{n-2}^q(t-t_{0j}^n) w_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2} dt$$
 – регулярный оператор.

После применения квадратурных формул [2] ко всем операторам одной гармоники для каждой неподвижной точки t_{0j}^n получаем 2 линейных алгебраических уравнения относительно неизвестных коэффициентов Фурье решения $w_{n-2}^q(t_{0j}^n)$. Используемое в формулах выражение $w_{n-2}^q(t) \sqrt{1-t^2}$ и является искомым решением u_q или v_q в формуле (7). Когда вычисления проведены для всех неподвижных точек данной гармоники, будет получена система $2n-2$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n-2$ искомым коэффициентов Фурье $u_{n-2}^q(t_{0j}^n), v_{n-2}^q(t_{0j}^n)$, $j = 1, \dots, n-2$.

Для испытания данной методики было проведено решение этой задачи для рефлектора радиусом 1 метр, с вершиной расположенной на оси Oz в точке с координатой -0.25 метра. Край рефлектора расположен в перпендикулярном к оси Oz сечении проходящем через точку z равную $+0.25$ метра. Таким образом L – высота рефлектора равна 0.5 метра. Частотой плоской волны полагалась равной 1 ГГц. В случае плоской волны распространяющейся вдоль оси вращения рефлектора не нулевыми будут только две гармоники: $q = \pm 1$.

На рис. 1 и 2 представлены графики решения реальной и мнимой составляющих решений u и v , для таких гармоник, соответственно.

На первых двух графиках рис. 3 представлены вычисленные с использованием этих решений реальные и мнимые составляющие распределения первой компоненты вектора напряжённости электрического поля дифракции $E_1(z)$ вдоль оси вращения z на интервале $[-2 \text{ м}, +3.5 \text{ м}]$. Другие два

графіка представляють розподілення реальних і мнимих складових напружень в плоскій волні $\vec{E}_0(z)$ на том же інтервалі.

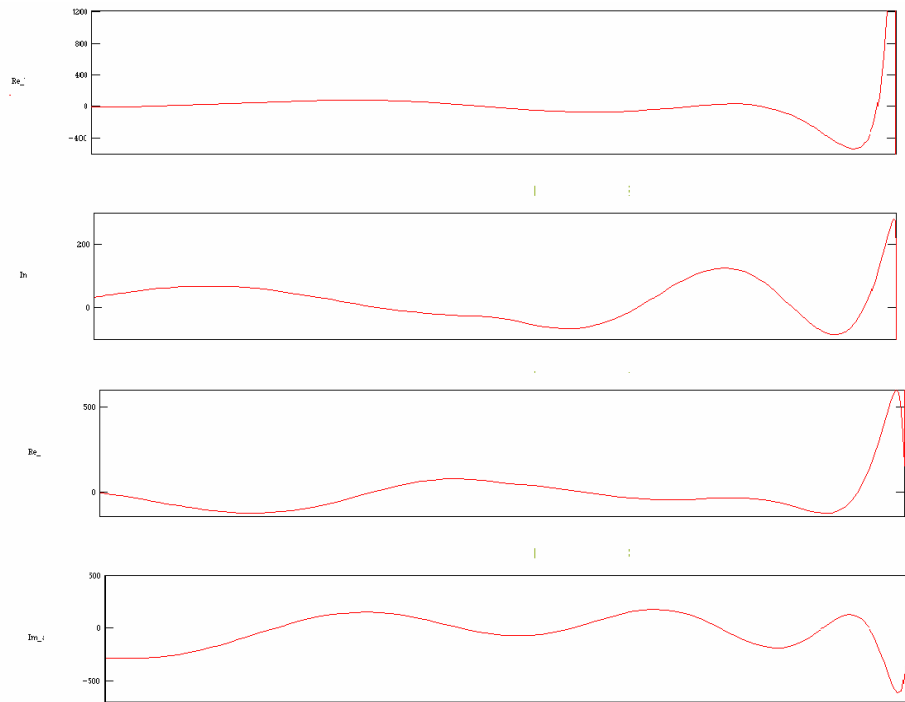


Рис. 1. Решение для гармоники $q=1$.

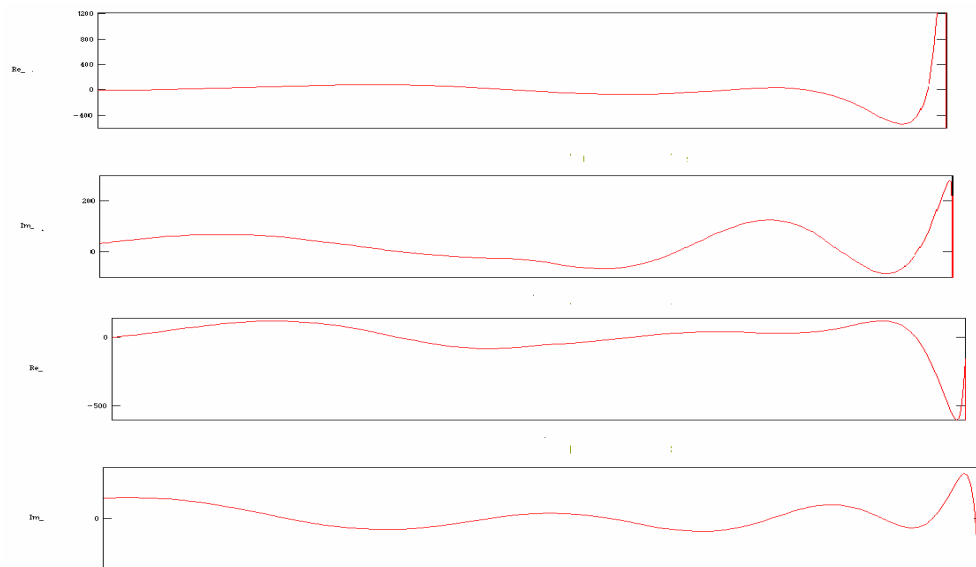


Рис. 2. Решение для гармоники $q=-1$.

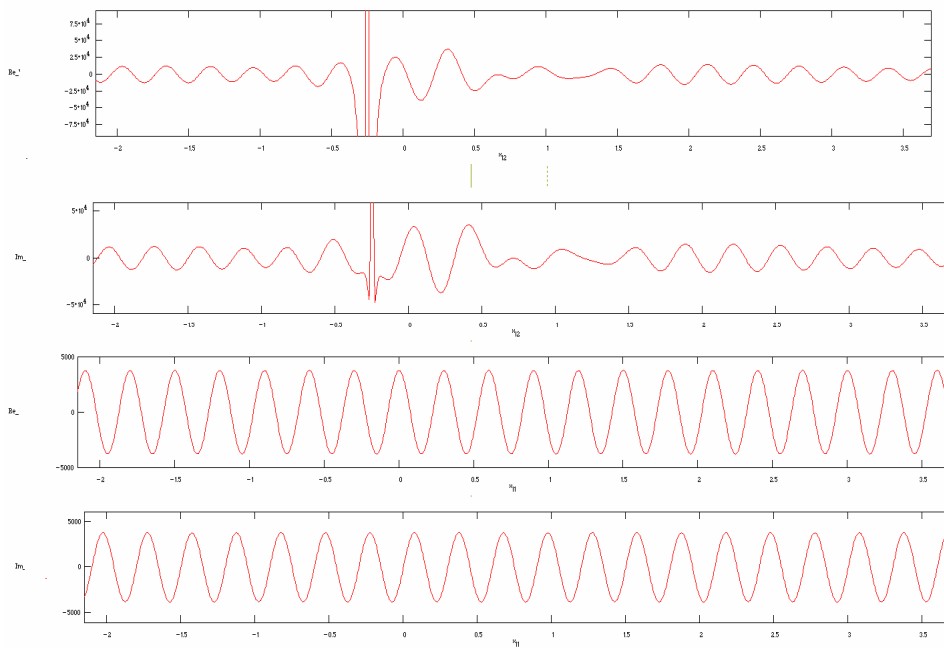


Рис. 3 Распределение $\bar{E}_1(\bar{x})$ и $\bar{E}_0(\bar{x})$ вдоль оси z .

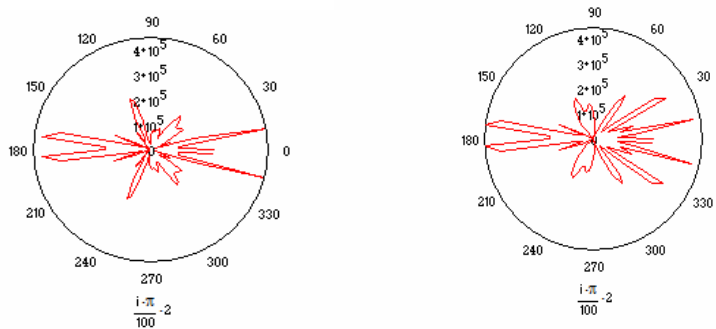


Рис. 4. Графики распределения мощности излучения в дальней зоне в двух ортогональных сечениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1. Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в \mathcal{R}^3 // Электромагнитные явления. – 1998. – Т.1, №4. –С.1-4.
2. 2. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие. Ч. 1. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: Издательство Харьковского национального университета. 2001. – 92 с.

Надійшла – 10.06.2013.