УДК 519.63.001.57

Числово-аналітичне узагальнення методу сумарних зображень розв'язання одного класу нелінійних крайових задач

А. Я. Бомба, О. М. Гладка
Рівненський державний гуманітарний університет, Україна
Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

На основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень розроблено ефективний конструктивний підхід до розв'язання нелінійних еліптичних крайових задач для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями. Числово-аналітичні представлення розв'язків отримано шляхом поєднання числових (різницевих) і аналітичних методів (розщеплень, інтегральних представлень тощо), які є узагальненням методів сумарних зображень на випадок розв'язування модельних нелінійних задач, що описують стаціонарні процеси фільтрації у криволінійних плоских пластах, провідність яких є функцією від потенціалу поля.

Ключові слова: *конформне (квазіконформне) відображення, метод сумарних зображень, числово-аналітичне представлення, нелінійна крайова задача, динамічна сітка.*

На основе синтеза численных методов комплексного анализа и численно-аналитических представлений разработан эффективный конструктивный подход к решению нелинейных эллиптических краевых задач для криволинейных областей, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями. Численно-аналитические представления решений получены путем сочетания численных (разностных) и аналитических методов (расщеплений, интегральных представлений и т. д.), которые являются обобщением методов суммарных представлений на случай решения модельных нелинейных задач, описывающих стационарные процессы фильтрации в криволинейных плоских пластах, проводимость которых является функцией от потенциала поля.

Ключевые слова: *конформное (квазиконформное) отображение, метод суммарных представлений, численно-аналитическое представление, нелинейная краевая задача, динамическая сетка.*

The efficient constructive approach to solving of nonlinear elliptic boundary value problems for curvilinear domains bounded by lines of flow and equipotential lines was developed on the basis of syntheses of the numeric methods complex analysis and numerical-analytical representations. Numerical-analytical representations of solutions was obtained by combining the numerical (finite-difference) and analytical methods (splitting, integral representations, etc.) which are a generalization of the method of summary representations for case solving of model nonlinear problems that describes the stationary filtration process in curvilinear plane layers with conductivity that is the function of the field potential.

Key words: *conformal (quasiconformal) mapping, method of summary representations, numerical-analytical representation, nonlinear boundary value problem, dynamic grid.*

1. Вступ

На даний час з використанням ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища розроблено конструктивний підхід до моделювання квазіідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями (див., напр., [1, 2]), що є основою для вивчення процесів фільтрації, конвекції, масообміну, дифузії у неоднорідних пористих пластах [3]. У роботах [4-5] запропоновано більш ефективну обчислювальну технологію, що поєднує числові методи комплексного аналізу із числово-аналітичними методами сумарних зображень [6-8], використання яких дає можливість у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх внутрішніх і граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій. У даній роботі шляхом синтезу числових (різницевих) і аналітичних методів (розділення змінних, інтегральних представлень тощо [9]) методи сумарних зображень узагальнено на випадок розв'язання модельних нелінійних задач, що описують стаціонарні процеси фільтрації у криволінійних плоских пластах, провідність яких є функцією від потенціалу поля.

2. Постановка задачі

Розглянемо стаціонарний процес фільтрації в криволінійній області G_z $(z = x + iy)$, обмеженій лініями течії $L_0 = \{z : f_1(x, y) = 0\}$, $L^0 = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ і еквіпотенціальними лініями $L_* = \{z : f_2(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z : f_4(x, y) = 0\}$, який описуватимемо рівнянням руху $\vec{\upsilon} = \kappa(\varphi) \cdot grad\, \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $div\, \vec{\upsilon} = 0$ [4], де $\vec{\upsilon} = \upsilon_x(x, y) + \mathrm{i}\upsilon_y(x, y)$ – швидкість фільтрації; $\kappa(\varphi)$ – коефіцієнт провідності, що характеризує проникність середовища, його схильність до деформації, густину і в'язкість субстанції, що фільтрується; φ – потенціал поля, такий, що $\varphi\big|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi\big|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{L_0} = \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{L^0} = 0$, n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Ввівши, аналогічно [1], функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ (квазіконформно спряжену до φ), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну прямокутну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \ \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \ 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром (повною витратою) $Q = \oint\limits_{L_*} -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \kappa(\varphi)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \kappa(\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z; \\ \varphi\big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi\big|_{L_0} = 0, \quad \psi\big|_{L^0} = \oint\limits_{L_*} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dy. \end{cases} \tag{1}$$

Обернена до (1) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомій витраті Q має вигляд:

$$\kappa(\varphi)\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\partial y}{\partial\psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\kappa(\varphi)\frac{\partial x}{\partial\psi}, \quad (\varphi,\psi) \in G_\omega,$$

$$f_1\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\big)=0,\ f_3\Big(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi)\Big)=0,\ 0\le\psi\le Q,$$
$$f_2\big(x(\varphi,Q),y(\varphi,Q)\big)=0,\ f_4\big(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\big)=0,\ \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*\ , \tag{2}$$

і є еквівалентною задачі [1]:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\kappa(\varphi)}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa(\varphi)\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\kappa(\varphi)}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa(\varphi)\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)=0,\quad(\varphi,\psi)\in G_\omega,$$
$$f_1\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi)\big)=0,\ f_3\Big(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi)\Big)=0,\ 0\le\psi\le Q,$$
$$f_2\big(x(\varphi,Q),y(\varphi,Q)\big)=0,\ f_4\big(x(\varphi,0),y(\varphi,0)\big)=0,\ \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \tag{3}$$
$$\left.\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)\right|_{\varphi=\varphi_*}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\right|_{\psi=Q}=0,$$
$$\left.\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\right|_{\varphi=\varphi^*}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial f_4}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial f_4}{\partial x}\right)\right|_{\psi=0}=0,$$
$$Q=\int_0^Q\frac{\kappa(\varphi)}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}^2+\frac{\partial y}{\partial\psi}^2\right)d\psi,\quad J=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}.$$

3. Числово-аналітичні представлення розв'язків

Числово-аналітичний підхід до розв'язання нелінійної задачі (3) сконструйовано з використанням ідеї поетапної фіксації її окремих параметрів шляхом поєднання числових (скінченно-різницевих) і аналітичних (розділення змінних, інтегральних представлень тощо) методів, які є узагальненням методів сумарних зображень.

В області квазікомплексного потенціалу будуємо рівномірну ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою областю $G_\omega^\gamma=\Big\{(\varphi_i,\psi_j):\ \varphi_i=\varphi_*+\Delta_\varphi\cdot i,\ i=\overline{0,m+1};\ \psi_j=\Delta_\psi\cdot j,\ j=\overline{0,n+1};\ \Delta_\varphi=\dfrac{\varphi^*-\varphi_*}{m+1},\ \Delta_\psi=\dfrac{Q}{n+1},\ \gamma=\Delta_\varphi/\Delta_\psi,\ m,\ n\in\mathbf{N}\Big\}$, а крайові умови і умови ортогональності – скінченно-різницевими аналогами [1] ($x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j),\ y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j)$):

$$f_1(x_{0,j},y_{0,j})=0,\quad f_3(x_{m+1,j},y_{m+1,j})=0,\quad j=\overline{0,n+1},$$
$$f_2(x_{i,n+1},y_{i,n+1})=0,\quad f_4(x_{i,0},y_{i,0})=0,\quad i=\overline{0,m+1}, \tag{4}$$
$$f'_{1x}(x_{0,j},y_{0,j})(y_{1,j}-y_{0,j})-f'_{1y}(x_{0,j},y_{0,j})(x_{1,j}-x_{0,j})=0,$$
$$f'_{2x}(x_{i,n+1},y_{i,n+1})(y_{i,n}-y_{i,n+1})-f'_{2y}(x_{i,n+1},y_{i,n+1})(x_{i,n}-x_{i,n+1})=0, \tag{5}$$
$$f'_{3x}(x_{m+1,j},y_{m+1,j})(y_{m,j}-y_{m+1,j})-f'_{3y}(x_{m+1,j},y_{m+1,j})(x_{m,j}-x_{m+1,j})=0,$$

$$f'_{4x}(x_{i,0},y_{i,0})(y_{i,1}-y_{i,0})-f'_{4y}(x_{i,0},y_{i,0})(x_{i,1}-x_{i,0})=0,$$
$$i=\overline{0,m+1},\quad j=\overline{0,n+1}.$$

При фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області $x_{0,j}$, $y_{0,j}$, $x_{m+1,j}$, $y_{m+1,j}$, $x_{i,n+1}$, $y_{i,n+1}$, з урахуванням крайових умов (4), наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сіткової області знаходимо як розв'язки наступних задач:

$$\begin{cases} x=0,\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ x(\varphi_*,\psi)=\bar{x}_1(\psi),\quad x(\varphi^*,\psi)=\bar{x}_2(\psi),\quad x(\varphi,0)=\bar{x}_3(\varphi),\quad x(\varphi,Q)=\bar{x}_4(\varphi); \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y=0,\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ y(\varphi_*,\psi)=\bar{y}_1(\psi),\quad y(\varphi^*,\psi)=\bar{y}_2(\psi),\quad y(\varphi,0)=\bar{y}_3(\varphi),\quad y(\varphi,Q)=\bar{y}_4(\varphi), \end{cases} \tag{7}$$

де $\mathrm{L}u\equiv\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\kappa(\varphi)}\dfrac{\partial u(\varphi,\psi)}{\partial\varphi}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa(\varphi)\dfrac{\partial u(\varphi,\psi)}{\partial\psi}\right)$, $\bar{x}_1(\psi_j)=x_{0,j}$, $\bar{x}_2(\psi_j)=x_{m+1,j}$, $\bar{y}_1(\psi_j)=y_{0,j}$, $\bar{y}_2(\psi_j)=y_{m+1,j}$, $j=\overline{0,n+1}$, $\bar{x}_3(\varphi_i)=x_{i,0}$, $\bar{x}_4(\varphi_i)=x_{i,n+1}$, $\bar{y}_3(\varphi_i)=y_{i,0}$, $\bar{y}_4(\varphi_i)=y_{i,n+1}$, $i=\overline{0,m+1}$ (тут і надалі через $\bar{u}(\varphi,\psi)$, $(\varphi,\psi)\in G_\omega$, позначено відповідне аналітичне продовження сіткової функції $u_{i,j}=u(\varphi_i,\psi_j)$, $(\varphi_i,\psi_j)\in G_\omega^\gamma$).

Розв'язок задачі (6) шукатимемо у вигляді:

$$x(\varphi,\psi)=\bar{u}(\varphi,\psi)+v(\varphi,\psi),$$

де $\bar{u}(\varphi,\psi)=\bar{x}_3(\varphi)+\dfrac{\psi}{Q}\left(\bar{x}_4(\varphi)-\bar{x}_3(\varphi)\right)$,

або у вузлах сітки

$$u_{i,j}=\frac{n+1-j}{n+1}x_{i,0}+\frac{j}{n+1}x_{i,n+1},\ i=\overline{0,m+1},\ j=\overline{0,n+1},$$

а функція $v(\varphi,\psi)$ є розв'язком наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} v=\bar{F}(\varphi,\psi),\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ v(\varphi_*,\psi)=\bar{v}_1(\psi),\quad v(\varphi^*,\psi)=\bar{v}_2(\psi),\quad v(\varphi,0)=0,\quad v(\varphi,Q)=0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\bar{F}(\varphi,\psi)=-\mathrm{L}\bar{u}=-\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\kappa(\varphi)}\dfrac{\partial\bar{u}(\varphi,\psi)}{\partial\varphi}\right)$, $\bar{v}_1(\psi)=\bar{x}_1(\psi)-\bar{u}(\varphi_*,\psi)$, $\bar{v}_2(\psi)=\bar{x}_2(\psi)-\bar{u}(\varphi^*,\psi)$.

Використовуючи метод розділення змінних, розв'язок задачі (8) шукатимемо у вигляді ряду:

$$v(\varphi,\psi)=\frac{2}{Q}\sum_{p=1}^{\infty}\Phi_p(\varphi)\sin\frac{\pi p}{Q}\psi, \tag{9}$$

де функції $\Phi_p(\varphi)$ є розв'язками задачі:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{\kappa(\varphi)}\Phi'_p(\varphi)\right)' - \lambda_p \kappa(\varphi)\Phi_p(\varphi) = \overline{F}_p(\varphi), \\
\Phi_p(\varphi_*) = \overline{v}_{1p}, \quad \Phi_p(\varphi^*) = \overline{v}_{2p} ,
\end{cases} \tag{10}
$$

$$
\lambda_p = \left(\frac{\pi p}{Q}\right)^2, \qquad \overline{F}_p(\varphi) = \frac{2}{Q}\int_0^Q \overline{F}(\varphi,\xi)\sin\frac{\pi p}{Q}\xi d\xi , \qquad \overline{v}_{1p} = \frac{2}{Q}\int_0^Q \overline{v}_1(\xi)\sin\frac{\pi p}{Q}\xi d\xi ,
$$

$$
\overline{v}_{2p} = \frac{2}{Q}\int_0^Q \overline{v}_2(\xi)\sin\frac{\pi p}{Q}\xi d\xi .
$$

Скінченно-різницевий аналог задачі (10) будуємо за методом балансу (інтегро-інтерполяційним методом), що забезпечує другий порядок точності, збіжність і стійкість отриманої різницевої задачі [10]:

$$
\begin{cases}
\Phi_{p,i+1} - \left(1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i\right)\Phi_{p,i} + \alpha_i \Phi_{p,i-1} = F^*_{p,i}, \quad i = \overline{1,m}, \\
\Phi_{p,0} = \overline{v}_{1p}, \quad \Phi_{p,m+1} = \overline{v}_{2p} ,
\end{cases} \tag{11}
$$

де $\Phi_{p,i} = \Phi_p(\varphi_i)$, $\kappa_i = \kappa(\varphi_i)$, $\kappa_{i+1/2} = \dfrac{1}{\Delta_\varphi}\displaystyle\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \kappa(\xi)d\xi$, $\kappa_{i-1/2} = \dfrac{1}{\Delta_\varphi}\displaystyle\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \kappa(\xi)d\xi$,

$$
\alpha_i = \frac{\kappa_{i-1/2}}{\kappa_{i+1/2}}, \; \beta_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1/2}}, \; F_{p,i} = \overline{F}_p(\varphi_i), \; F^*_{p,i} = \frac{F_{p,i}}{\kappa_{i+1/2}} .
$$

Розв'язок (11) представляється у вигляді [10]:

$$
\Phi_{p,i} = A_p \mu_{p,i} + B_p \nu_{p,i} + \quad {}_{p,i} ,
$$

де A_p, B_p – деякі сталі, що визначаються із крайових умов; $\mu_{p,i}, \nu_{p,i}$ – лінійно-незалежні розв'язки системи однорідних рівнянь, які можуть бути отримані із рекурентних співвідношень:

$$
\mu_{p,0} = 0, \quad \mu_{p,1} = 1, \quad \mu_{p,i+1} = \left(1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i\right)\mu_{p,i} - \alpha_i \mu_{p,i-1} ,
$$

$$
\nu_{p,0} = 1, \quad \nu_{p,1} = 0, \quad \nu_{p,i+1} = \left(1 + \alpha_i + \lambda_p \beta_i\right)\nu_{p,i} - \alpha_i \nu_{p,i-1} ;
$$

${}_{p,i}$ – частковий розв'язок системи неоднорідних рівнянь із нульовими крайовими умовами:

$$
G_{p,i} = \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,q-1}} F^*_{p,q} .
$$

Значення $F(\varphi,\psi)$, v_{1p}, v_{2p} у вузлах сітки визначаються за формулами:

$$
F_{i,j} = F(\varphi_i, \psi_j) = -\frac{1}{\Delta_\varphi}\left(\frac{1}{\kappa_{i+1/2}}\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta_\varphi} - \frac{1}{\kappa_{i-1/2}}\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta_\varphi}\right) =
$$

$$= -\left(\frac{(n+1-j)x_{i+1/2,0} + jx_{i+1/2,n+1}}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{i+1/2}} - \frac{(n+1-j)x_{i-1/2,0} + jx_{i-1/2,n+1}}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa_{i-1/2}} \right),$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

$$F^*_{p,i} = \frac{1}{\kappa_{i+1/2}} \sum_{j=1}^{n} P_{j,p} F_{i,j} =$$

$$= -\frac{\kappa_{i-1/2}\left(x_{i+1/2,0} + x_{i+1/2,n+1}\right) - \kappa_{i+1/2}\left(x_{i-1/2,0} + x_{i-1/2,n+1}\right)}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa^2_{i+1/2}\kappa_{i-1/2}} \sum_{j=1}^{n} jP_{j,p},$$

$$v_{1,p} = \sum_{j=1}^{n} x_{0,j} P_{j,p} - \left(x_{0,0} + x_{0,n+1}\right)\sum_{j=1}^{n} jP_{j,p},$$

$$v_{2,p} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} P_{j,p} - \left(x_{m+1,0} + x_{m+1,n+1}\right)\sum_{j=1}^{n} jP_{j,p},$$

де $P = \left[P_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n} = \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\frac{\pi kj}{n+1}\right]_{j,k=1}^{n}$ – квадратна симетрична матриця *P*-трансформацій [6-8].

Тоді загальний розв'язок задачі (8) у вузлах сіткової області G_ω^γ ($v_{i,j} = v(\varphi_i, \psi_j)$, $i = \overline{0,m+1}$, $j = \overline{1,n}$) матиме вигляд:

$$v_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} P_{j,p}\left(A_p\mu_{p,i} + B_p\nu_{p,i} - \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,q-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\kappa_{q-1/2}\left(x_{q+1/2,0} + x_{q+1/2,n+1}\right) - \kappa_{q+1/2}\left(x_{q-1/2,0} + x_{q-1/2,n+1}\right)}{(n+1)\Delta_\varphi^2 \kappa^2_{q+1/2}\kappa_{q-1/2}} \sum_{j=1}^{n} jP_{j,p} \right),$$

а загальний розв'язок задачі (6):

$$x_{i,j} = \frac{n+1-j}{n+1} x_{i,0} + \frac{j}{n+1} x_{i,n+1} + \sum_{p=1}^{n} P_{j,p}\left(A_p\mu_{p,i} + B_p\nu_{p,i} - \right.$$

$$- \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_{p,i}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1}\nu_{p,q} - \mu_{p,q}\nu_{p,q-1}} \times \tag{12}$$

$$\times \frac{\kappa_{q-1/2}\left(x_{q+1/2,0}+x_{q+1/2,n+1}\right)-\kappa_{q+1/2}\left(x_{q-1/2,0}+x_{q-1/2,n+1}\right)}{(n+1)\Delta_\varphi^2\kappa_{q+1/2}^2\kappa_{q-1/2}}\sum_{j=1}^{n} jP_{j,p}\Bigg).$$

Аналогічно, розв'язок задачі (7) знаходимо вигляді:

$$y_{i,j}=\frac{n+1-j}{n+1}y_{i,0}+\frac{j}{n+1}y_{i,n+1}+\sum_{p=1}^{n}P_{j,p}\Bigg(C_p\mu_{p,i}+D_p\nu_{p,i}-$$

$$-\sum_{q=1}^{i-1}\frac{\mu_{p,i}\nu_{p,q}-\mu_{p,q}\nu_{p,i}}{\mu_{p,q-1}\nu_{p,q}-\mu_{p,q}\nu_{p,q-1}}\times \qquad (13)$$

$$\times \frac{\kappa_{q-1/2}\left(y_{q+1/2,0}+y_{q+1/2,n+1}\right)-\kappa_{q+1/2}\left(y_{q-1/2,0}+y_{q-1/2,n+1}\right)}{(n+1)\Delta_\varphi^2\kappa_{q+1/2}^2\kappa_{q-1/2}}\sum_{j=1}^{n} jP_{j,p}\Bigg).$$

4. Алгоритм

Алгоритм розв'язання задачі (3) є аналогічним до [4-5] і в загальному вигляді може бути описаний наступним чином. Задаємо кількість $m\times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ, параметр ε, що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень квазіконформності відображення δ_*, нульове наближення невідомої величини γ (або шуканої витрати Q), початкові наближення значень функцій x і y у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) так, щоб виконувались умови (4) і обчислюємо за формулами (12), (13) початкові наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки). Знаходимо значення γ і Q за формулами:

$$\gamma=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i,j=0}^{m,n}\gamma_{i,j}\,,\quad Q=\Delta_\varphi\cdot\frac{n+1}{\gamma}, \qquad (14)$$

$$\gamma_{i,j}=\frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)^2+\left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)^2}+\sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2+\left(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}}.$$

Після цього, уточнюємо координати граничних вузлів (4), (5) і обчислюємо нове наближення координат внутрішніх вузлів за формулами (12), (13); знаходимо γ та Q за (14).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів, якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену ітерацію більша за ε, то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь квазіконформності δ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область. Якщо $\delta \le \delta_*$, то вважаємо, що задача розв'язана із необхідною точністю, інакше, збільшуємо кількість вузлів розбиття області чи змінюємо співвідношення між m і n (значення параметрів m і n доцільно задавати так, щоб виконувалася умова $\gamma \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної) та повторюємо кроки алгоритму.

5. Часткові випадки

Часткові випадки функції $\kappa(\varphi)$ дозволяють значно спростити вигляд формул (12), (13) чи навіть отримати розв'язки задач (6), (7) у аналітичному вигляді, що значно покращує ефективність вищенаведеного алгоритму.

Зауважимо, що формули (12), (13) є узагальненням класичних формул сумарних зображень [6-8] на випадок задач типу (6), (7): якщо покласти $\kappa(\varphi) = 1$, то формула (12) ((13) – аналогічно) матиме вигляд:

$$x_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} P_{j,p}\left(A_p \mu_p^i + B_p \nu_p^i - \gamma^2 \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_p^{i-q} - \nu_p^{i-q}}{\mu_p - \nu_p}\left(P_{1,p} x_{q,0} + P_{n,p} x_{q,n+1}\right)\right), \quad (15)$$

де μ_p^i, ν_p^i – розв'язки системи однорідних рівнянь (11), що визначаються як корені характеристичного рівняння $r^2 - 2\eta_p r + 1 = 0$: $\mu_p = \eta_p + \sqrt{\eta_p^2 - 1}$, $\nu_p = \eta_p - \sqrt{\eta_p^2 - 1}$, $\eta_p = 1 + \gamma^2 \lambda_p$.

У випадку $\kappa(\varphi) = e^{\sigma\varphi}$ формула (12) також матиме вигляд схожий на класичну формулу сумарних зображень (15) із деякими модифікаціями:

$$x_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} P_{j,p}\left(A_p \mu_p^i + B_p \nu_p^i - \frac{\gamma^2 \sigma\Delta_\varphi}{e^{\sigma\Delta_\varphi} - 1} \sum_{q=1}^{i-1} \frac{\mu_p^{i-q} - \nu_p^{i-q}}{\mu_p - \nu_p}\left(P_{1,p} x_{q,0} + P_{n,p} x_{q,n+1}\right)\right),$$

де $\mu_p = \eta_p + \sqrt{\eta_p^2 - e^{\sigma\Delta_\varphi}}$, $\nu_p = \eta_p - \sqrt{\eta_p^2 - e^{\sigma\Delta_\varphi}}$, $\eta_p = \frac{e^{\sigma\Delta_\varphi}}{2} + \gamma^2 \lambda_p$.

У випадку $\kappa(\varphi) = \varphi^k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ в (10) маємо диференціальне рівняння Бесселя, розв'язки якого можуть бути записані аналітично із використанням циклічних функцій [10]:

$$\Phi_p(\varphi) = \varphi^{\frac{k+1}{2}} J_{\pm 1/2}\left(\frac{\lambda_p \varphi^{k+1}}{k+1}\right),$$

де $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$ – функції Бесселя першого роду.

6. Висновки

Таким чином, для розв'язання широкого класу нелінійних крайових задач, що моделюють стаціонарні процеси фільтрації у пористих пластах, в яких коефіцієнт провідності задається як функція від потенціалу поля, сконструйовано ефективний підхід на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і числово-аналітичних узагальнень методів сумарних зображень, що, зокрема. суттєво пришвидшує досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій і у значній мірі дозволяє уникати накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації. Перспективою досліджень є поширення запропонованого підходу до прогнозування процесів, описаних у роботі [11].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ : Наукова думка, 2007. – 308с.
2. A.Ya. Bomba, A.V. Terebus, 'A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary value filtration problems', *Journal of Mathematical Sciences*, 187, No. 5, 596-605 (2012).
3. Бомба А.Я., Гаврилюк В.І., Сафоник А.П., Фурсачик О.А. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.
4. Бомба А.Я., Кузьменко А.П., Гладка О.М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012.– №2. – С. 87–94.
5. Бомба А.Я., Гладка О.М. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2013. – Вип. 3 (80). – С. 76-83.
6. Положий Г.М. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – К: Изд-во КГУ, 1962. – 161с.
7. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наукова думка. – 1973. – 264 с.
8. Глущенко А.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Доклады АН УССР. – Сер. А. – 1978. – № 6. – С.490–494.
9. A.L. Skubachevskii, 'Elliptic functional differential equations and applications', Basel-Boston-Berlin, Birkhauser, 1997.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316с.
11. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка. – 1991. – 432 с.

Надійшла у першій редакції 28.09.2013, в останній – 22.11.2013.