

УДК 539.3

## Свободные и вынужденные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью

В. И. Гнитько, К. Г. Дегтярев, В. В. Науменко, А. М. Тонконоженко

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины  
Государственное предприятие Конструкторское бюро «Южное» им. М.К.Янгеля*

В работе предложен метод расчета свободных и вынужденных колебаний оболочек вращения с жидкостью. Метод основан на сведении задачи об определении давления жидкости на оболочку к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача гидроупругости решается с помощью сочетания методов конечных и граничных элементов. Дифференциальные уравнения нестационарной задачи решаются численно методом Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка. Рассмотрены полусферическая и цилиндрическая оболочки

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, гидроупругое взаимодействие, методы граничных и конечных элементов.

В роботі запропоновано метод розрахунку вільних та вимушених коливань оболонок обертання з рідиною. Метод засновано на зведенні задачі визначення тиску рідини на оболонку до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зв'язана задача гідропружності розв'язується за допомогою сполучення методів скінченних та граничних елементів. Диференціальні рівняння нестационарної задачі розв'язані чисельно методом Рунне-Кута 4-го та 5-го порядку. Розглянуто напівсферичну та циліндричну оболонки.

**Ключові слова:** вимушені коливання, гідропружність взаємодія, методи граничних та скінченних елементів.

The method to simulate free and forced vibrations for shells of revolution partially filled with a liquid is proposed in this paper. Method is based on reducing the problem of determining the fluid pressure on the shell walls to solution of the system of singular integral equations. The coupled hydro-elasticity problem was solved using combination of boundary and finite element methods. Differential equations of transient problem were solved numerically by Runge-Kutta method of 4th and 5th orders. Hemispherical and cylindrical shells were considered.

**Key words:** forced vibrations, hydro-elastic interaction, finite and boundary element methods.

### 1. Введение

По подсчетам специалистов, изношенность оборудования в различных отраслях экономики Украины составляет 50-70 процентов и имеет тенденцию к возрастанию [1]. Это привело к необходимости проектирования новой техники, что требует значительного усложнения расчетных схем. В частности, решение задач теории оболочек, возникающих при проектировании тонкостенных конструкций, сопряжено со значительными математическими трудностями и во многих случаях может быть выполнено только с помощью приближенных методов. Решение таких актуальных задач, как снижение массы тонкостенных конструкций и уменьшение расходов материала, обеспечение надежности в условиях эксплуатации и сокращение сроков проектирования тесно связано с развитием численных методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и динамических характеристик конструкций.

Динамический анализ НДС оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечно-элементных программ [2-6]. Но трехмерный анализ с учетом взаимодействия жидкости и конструкции является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. Поэтому для проведения исследования прочности и устойчивости оболочек при импульсных и сейсмических нагрузках принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Определение границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара. Следует отметить, что в большинстве работ рассматриваются цилиндрические оболочки; для численного моделирования применяется метод конечных элементов.

Данная работа посвящена динамике оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Здесь рассмотрен вопрос о свободных и вынужденных колебаниях оболочки вращения с произвольным меридианом. Для решения задачи используются одномерные методы конечных и граничных элементов. Это позволяет существенно сократить время расчета, что приводит к качественно новым возможностям при моделировании динамического поведения конструкций.

## 2. Постановка задачи.

Рассматривается динамическая задача для оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, подверженной кратковременному импульсному нагружению.

Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение (индуцированное движением тела) является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей  $\phi$ , удовлетворяющий гармоническому уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в форме

$$LU + M\dot{U} = P_l + Q \quad (2)$$

где  $L$ ,  $M$  – матрицы жесткости и масс;  $U = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор-функция перемещений;  $Q(t)$  – вектор внешней нагрузки,  $P_l(t)$  – гидродинамическое давление жидкости. Давление жидкости находим из интеграла Коши–Лагранжа, который в линейном приближении имеет вид

$$P_l - P_0 = -\rho_l \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right), \quad (3)$$

где  $\phi$  – потенциал скоростей;  $\rho_l$  – плотность жидкости;  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении,  $g$  – ускорение свободного падения.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через  $S_1$ , а свободную поверхность -  $S_0$  (рис. 1). Пусть декартова система координат  $Oxyz$  связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости  $S_0$  совпадает с плоскостью  $xOy$  в состоянии покоя. Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуется выполнение условия непротекания, на свободной поверхности задаются динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления на свободной поверхности атмосферному, а кинематическое условие заключается в том, что частицы жидкости, первоначально находившиеся на свободной поверхности, остаются на ней во все время последующего движения.

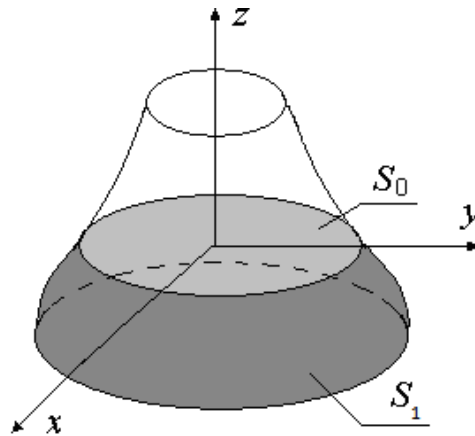


Рис. 1. Оболочка вращения, частично заполненная жидкостью.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче

$$LU + M\ddot{U} + \rho_l \dot{\phi} + gz = Q$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, P \in S_1 \leq; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta = 0, P \in S_0$$

для определения неизвестных функций  $U$  и  $\phi$ . Здесь  $w$  - нормальная компонента перемещений оболочки.

### 3. Метод разложения по собственным формам в связанных динамических задачах.

Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) u_k(x, y, z), \quad (4)$$

где функции  $u_k(x, y, z)$  - собственные формы колебаний незаполненной оболочки,  $c_k(t)$  - неизвестные коэффициенты.

Потенціал скоростей  $\phi$  представим в виде сумми двух потенциалов  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ .

Для определения  $\phi_1$  сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0, \quad P \in S_0. \quad (5)$$

Здесь  $w(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m w_k(x, y, z) c_k(t)$ , функции  $w_k(x, y, z)$  являются нормальными компонентами собственных форм колебаний незаполненной жидкостью оболочки.

Отметим, что из соотношения (3) и второго из уравнений (5) следует, что

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \phi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t). \quad (6)$$

Для определения функций  $\phi_{1k}$  имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \phi_{1k} = 0, \quad \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} = w_k, \quad P \in S_1, \quad \phi_{1k} = 0, \quad P \in S_0. \quad (7)$$

Потенциал  $\phi_2$  ищем в виде

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \phi_{2k}(x, y, z, t) \dot{d}_k(t) \quad (8)$$

где функции  $\phi_{2k}$  – собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде. Функции  $\phi_{1k}$  и  $\phi_{2k}$  получены авторами этой работы в [7,8].

Таким образом, имеем представления для потенциалов  $\phi_1$  и  $\phi_2$

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \phi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t), \quad \phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n \phi_{2k}(x, y, z, t) \dot{d}_k(t).$$

Тогда, поскольку  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , получим

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 \phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1.$$

Следовательно, удовлетворяется уравнение Лапласа, и выполнено граничное условие непротекания.

На свободной поверхности должно выполняться условие

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{\zeta}, \quad P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta = 0, \quad P \in S_0. \quad (9)$$

Отсюда получаем, что уравнение движения свободной поверхности жидкости можно представить в виде

$$\zeta = \sum_{k=1}^m c_k(t) \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^n d_k(t) \frac{\partial \phi_{2k}}{\partial n}. \quad (10)$$

Дифференцируя последнее равенство в (9) по  $t$ , приходим к уравнению

$$\ddot{\phi} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_0. \quad (11)$$

Подставляя соотношения  $\dot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_1 = 0$  в уравнение (11), получим

$$\sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) \phi_{2k} + g \sum_{k=1}^m c_k(t) \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} + g \sum_{k=1}^n d_k(t) \frac{\partial \phi_{2k}}{\partial n} = 0.$$

Используя соотношения [9], которым удовлетворяют функции  $\phi_{2k}$ ,

$$\frac{\partial \phi_{2k}}{\partial n} = \frac{\kappa_k^2}{g} \phi_{2k}, \quad P \in S_0,$$

приходим к дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k=1}^n [\ddot{d}_k(t) + \kappa_k^2 d_k(t)] \phi_{2k} + g \sum_{k=1}^m c_k(t) \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} = 0. \quad (12)$$

Умножим уравнение (12) скалярно на функцию  $\phi_{2l}$ . Используем условие ортогональности системы собственных форм колебаний жидкости в жестком сосуде.

После определения функций  $\phi_{1k}$  и  $\phi_{2k}$  подставляем их в уравнение (2) и получаем дифференциальное уравнение

$$L \left( \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k \right) + M \left( \sum_{k=1}^n \ddot{c}_k(t) u_k \right) = -\rho_l \left( \sum_{k=1}^n \ddot{c}_k(t) \phi_{1k} + \sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) \phi_{2k} + gz \right) + Q = 0 \quad (13)$$

Пусть  $\omega_k$ ,  $u_k$  – собственные частоты и формы свободных колебаний оболочки в вакууме. Имеют место следующие соотношения:

$$L u_k = \omega_k^2 M u_k, \quad (M u_k, u_j) = \delta_{kj}. \quad (14)$$

Умножив скалярно уравнение (13) на  $u_j$  и принимая во внимание условия нормировки (14), получим следующую систему  $n+m$  дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_k(t) + \rho_l \left( \sum_{k=1}^n \ddot{c}_k(t) (\phi_{1k}, u_j) + \sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) (\phi_{2k}, u_j) + g(z, u_j) \right) + (Q, u_j) = 0, \quad j = \overline{1, m} \\ \ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\phi_{2l}, \phi_{2l})} \sum_{k=1}^m c_k(t) \left( \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2l} \right) = 0, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, для определения вынужденных колебаний оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, необходимо определить следующие три системы базисных функций: формы свободных колебаний оболочки в вакууме, формы колебаний жидкости в жесткой оболочке под действием силы тяжести, формы колебаний упругой оболочки без учета действия силы тяжести.

После этого решается система дифференциальных уравнений второго порядка (15) с использованием метода Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка.

#### 4. Свободные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью.

Для решения задачи о свободных колебаниях оболочки, содержащей жидкость, в (15) полагаем, что  $Q=0$  и не учитываем статическую составляющую. Получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_k(t) + \rho_l \left( \sum_{k=1}^n \ddot{c}_k(t) (\phi_{1k}, u_j) + \sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) (\phi_{2k}, u_j) \right) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\phi_{2l}, \phi_{2l})} \sum_{k=1}^m c_k(t) \left( \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2l} \right) = 0, \quad l = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Ее решение ищем в виде

$$c_k(t) = C_k e^{i\Omega t}; \quad d_k(t) = D_k e^{i\Omega t}. \quad (17)$$

С учетом (16), (17) приходим к следующим соотношениям

$$C_j \omega_j^2 - \Omega^2 C_j + \rho_l \left( \Omega^2 \sum_{k=1}^m C_k (\phi_{1k}, u_j) + \Omega^2 \sum_{k=1}^n D_k (\phi_{2k}, u_j) \right) = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (18)$$

$$\kappa_l^2 D_l - \Omega^2 D_l + \frac{g}{(\phi_{2l}, \phi_{2l})} \sum_{k=1}^m C_k \left( \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2l} \right) = 0, \quad l = \overline{1, n}.$$

Введем векторы и матрицы по формулам

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_m \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix}; \quad H_\chi = \begin{pmatrix} \kappa_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \kappa_n^2 \end{pmatrix}; \quad H_\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & .0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \omega_m^2 \end{pmatrix};$$

$$P = \{p_{kj}\}, \quad p_{kj} = (\phi_{1k}, u_j), \quad k, j = \overline{1, m};$$

$$B = \{b_{jk}\}, \quad b_{jk} = (\phi_{2j}, u_k); \quad A = \{a_{jk}\}, \quad a_{jk} = \left( \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2j} \right); \quad k = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Приходим к проблеме собственных значений

$$\begin{aligned}\Omega^2 EC + H_\omega C + \Omega^2 \rho_l PC + \Omega^2 \rho_l BD &= 0; \\ \Omega^2 ED + gAC + H_\chi D &= 0.\end{aligned}$$

Вводим вектор  $X = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$  размерности  $n+m$  и квадратные матрицы размерности  $(n+m) \times (n+m)$

$$M = \begin{pmatrix} E + \rho_2 P & \rho_2 B \\ 0 & E \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях имеем

$$(G - \Omega^2 M)X = 0.$$

или, после обращения матрицы  $M$ ,

$$(M^{-1}G - \Omega^2 E)X = 0, \quad (19)$$

где  $E$  – единичная матрица размерности  $(n+m) \times (n+m)$ , матрица  $M^{-1}G$  имеем определяется формулой

$$\begin{aligned}M^{-1}G &= \begin{pmatrix} P_1 & -\rho_l P_1 B \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_\omega & 0 \\ gA & H_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 H_\omega - \rho_l g P_1 B A & -\rho_l P_1 B H_\chi \\ gA & H_\chi \end{pmatrix}; \\ P_1 &= (E + \rho_l P)^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, задача определения частот и форм свободных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью, сведена к решению проблемы собственных значений (19).

Для определения базисных функций  $u_j$  использован метод конечных элементов, а для нахождения  $\phi_{1k}, \phi_{2k}$  – метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией неизвестной плотности на элементах [7,8].

Отметим, что предложенный подход позволяет определять частоты колебаний оболочки с жидкостью при различном уровне гравитации  $g$ . Отметим также, что решение задачи о колебаниях системы «оболочка-жидкость» в общем случае не приводит к «распадающимся» спектрам колебаний упругой оболочки и жидкости.

## 5. Численные результаты.

Решен ряд задач по определению частот и форм свободных колебаний заполненных и незаполненных оболочек вращения. Рассмотрены полусферическая и цилиндрическая оболочки (рис.2). Определены частоты колебаний упругих заполненных и незаполненных оболочек, найдены частоты колебаний жидкости в жестких оболочках. Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях.

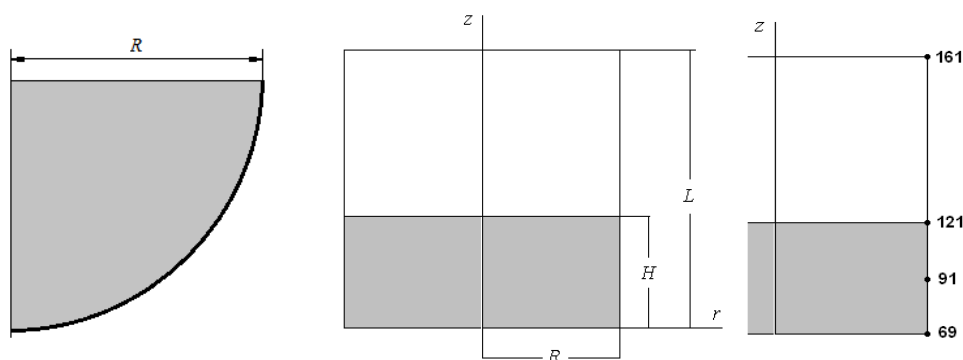


Рис. 2. Упругие оболочки с жидкостью.

Полусферическая оболочка имела такие параметры: радиус оболочки  $R = 5.08$  м, толщина  $h = 0.0254$  м, модуль упругости  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотность материала  $\rho = 2770$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Оболочка жестко зашкреплена по контуру (рис. 2).

Вычислены частоты свободных колебаний для этой незаполненной и полностью заполненной жидкостью оболочки. Результаты расчетов представлены в табл.1. Здесь предполагалось, что  $g = 0$ . Проведено сравнение с данными В. Мокеева [2] (для сжимаемой жидкости).

Таблица 1. Частоты свободных колебаний полусферы

$\alpha$	m	Собственные частоты, Hz		
		Без жидкости	С жидкостью	
			МГЭ	[2]
0	1	117.19	22.31	22.00
	2	146.17	33.63	33.38
	3	152.66	41.66	42.02
1	1	87.938	22.28	22.44
	2	138.91	34.89	36.88
	3	150.34	43.21	48.92
2	1	141.54	31.56	31.57
	2	151.37	40.61	41.55
	3	154.94	47.56	50.29

Определены частоты и формы колебаний цилиндрической оболочки с плоским дном, частично заполненной жидкостью. Геометрия резервуара показана на рис.2, параметры резервуара следующие: радиус  $R = 1$  м, толщина  $h = 0.01$  м, длина  $L = 2$  м, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Уровень заполняющей жидкости обозначен через  $H$  ( $H = 0.8$  м). Граничные



условия принимались в виде:  $u_r = u_z = u_\theta = 0$  при  $z = 0$  и  $r=R$ . Результаты расчетов показаны в таблице 2.

Таблица 2. Частоты свободных колебаний полусферы

$\alpha$	$m$	Частоты колебаний, Гц		
		Незаполненная оболочка	Частично заполненная оболочка	
			МГЭ	МКЭ
0	1	23.23	8.15	8.06
	2	91.10	45.04	44.71
1	1	48.52	20.98	20.86
	2	145.30	77.28	77.04
2	1	79.77	40.04	39.90
	2	117.07	109.51	108.89

Определены частоты и формы колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке. Рассмотрен жесткий круговой цилиндр радиуса  $R=1$  м и глубиной заполняющей его жидкости  $H$  (рис.2). В табл.3 приведены результаты расчетов первых трех собственных частот колебаний жидкости при  $H=0.8$ м для  $\alpha = 0, 1, 2$ , определенных по предложенной методике, и вычисленных аналитически по формуле [2]

$$\chi_k^2 = g \frac{\mu_k}{R} \tanh\left(\frac{\mu_k}{R} H\right),$$

где  $\mu_k$  - корни производных функций Бесселя первого рода  $J'_\alpha(\mu) = 0$ ,  $\alpha$ - номер гармоники.

Таблица 3. Собственные частоты жидкости в жесткой цилиндрической оболочке

		$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\alpha=0$	МГЭ	3.800	7.029	10.206
	[9]	3.796	7.015	10.173
$\alpha=1$	МГЭ	1.583	5.334	8.558
	[9]	1.581	5.325	8.536
$\alpha=2$	МГЭ	2.975	6.717	9.997
	[9]	2.970	6.704	9.969

На рис.3 приведены собственные формы колебаний свободной поверхности жидкости в жесткой цилиндрической оболочке при  $\alpha = 0$ .

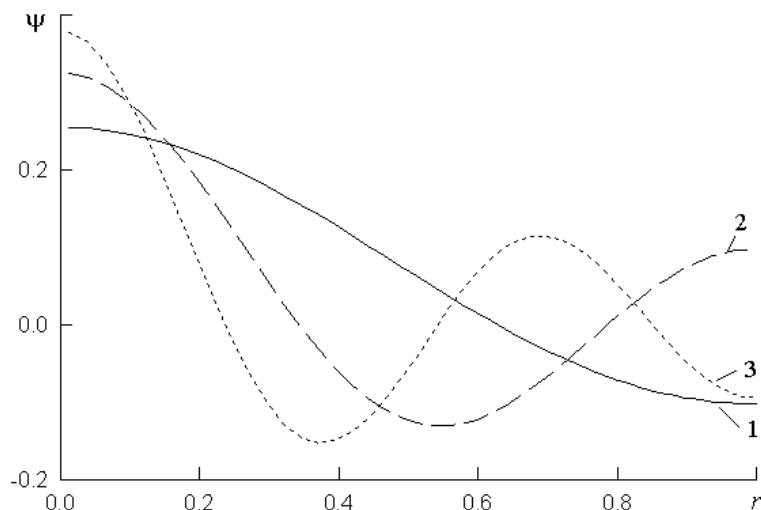


Рис.3. Собственные формы колебаний жидкости

Далее приведены примеры расчета вынужденных колебаний полусферической и конической оболочек с жидкостью.

Рассмотрена полусфера (рис.2) под действием импульсной нагрузки  $Q(r, \vartheta, z, t) = P(r, \vartheta, z)\Theta(t)$ ,  $P = const$ . Импульс принимался в форме

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases} \quad (23)$$

где  $T_1 = 0.002$  с.

Схема оболочки и зависимость давления жидкости в точках 1,2 от времени показаны на рис.4.

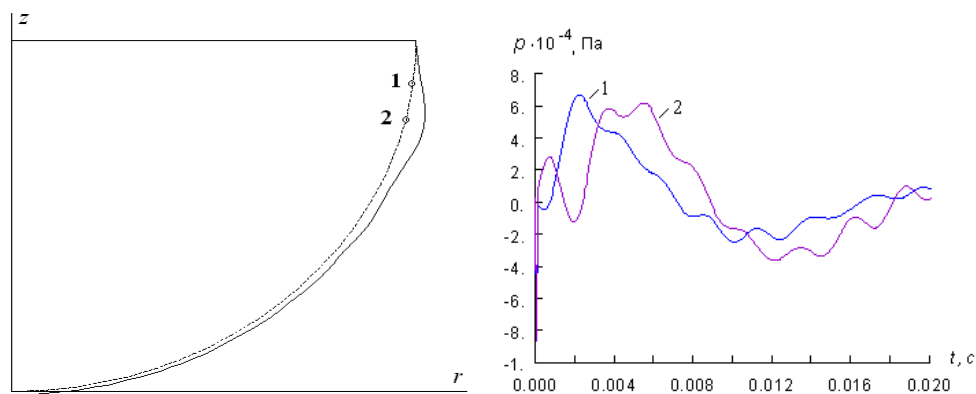


Рис.4. Схема оболочки и зависимость давления от времени

Иллюстрации демонстрируют хорошее согласование результатов, полученных различными методами, что свидетельствует о надежности предложенного алгоритма.

## 6. Выводы

Разработан эффективный численный метод анализа динамического поведения произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Потенциал скоростей представлен в виде суммы двух слагаемых, соответствующих задачам определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жесткой оболочке и упругой оболочки с жидкостью без учета гравитационной составляющей. Интегрирование по объему жидкости сведено к интегрированию вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т.е. является одномерным. Проведены численные исследования свободных и вынужденных колебаний оболочек, частично заполненных несжимаемой жидкостью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Концепція державної програми забезпечення технологічної безпеки в основних галузях економіки: Розпорядження кабінету міністрів України № 351 від 11 червня 2003 р. – Киев, 2003.
2. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов// Изв. РАН. Механика твердого тела.– 1998.–№ 6.–С.166-174.
3. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.–1989.–№4.– С.166-177.
4. Celebi, M.S., Kim, M.H., Beck, R.F., 1998. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation. J. of Ship Research, Vol.42, No.1, pp 33-45.
5. Selmane, A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid / A. Selmane, A.A. Lakis // J. Fluids Struct. – 1997. – V. 11. – P. 111–134.
6. Zhang, Y.L. A finite element method for modelling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid / Y.L. Zhang, D.G. Gorman, J.M. Reese // J. Sound Vib. – 2001. – V. 245. – №1. – P. 93–112.
7. Gnitko, V., Naumenko, V., Ogorodnyk, U., Strelnikova, E. Coupled multi-domain BEM and FEM for fluid-structure interaction analysis. WIT Transactions on Modelling and Simulation 54, pp. 33-45, 2013.
8. Ventsel E., Naumenko V, Strelnikova E., Yeseleva E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. Engineering analysis with boundary elements, 34, pp. 856-862, 2010
9. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику жестких оболочек с полостями, заполненными жидкостью. Кивв: Наукова думка, – 296 с., 1990