УДК 519.6:37.015.6

Применение теории сплайнов, построенных на неравномерной сетке узлов, в моделировании образовательных процессов

Е. В. Ярмош
Украинская инженерно-педагогическая академия, Украина

В статье построены и исследованы модели процесса формирования контингента студентов высшего учебного заведения с помощью сплайнов второго порядка. Рассмотрены два способа построения базисных сплайнов на неравномерной сетке узлов при разном количестве узлов сплайна (основных и вспомогательных). Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: *математическая модель, сплайн второго порядка, неравномерная сетка узлов, контингент студентов, цена обучения, рейтинг вуза.*

В статті побудовано та досліджено математичні моделі процесу формування контингенту студентів вищого навчального закладу за допомогою сплайнів другого степеня. Розглянуто два способи побудови базисних сплайнів на нерівномірній сітці вузлів за різної кількості вузлів сплайну (основних та опоміжних). Наведено результати обчислювального експерименту.

Ключові слова: *математична модель, сплайн другого степеня, нерівномірна сітка вузлів, контингент студентів, ціна навчання, рейтинг вищого навчального закладу.*

In the article, models of student contingent formation in tertiary institutions are developed and investigated with second-order splines. Two methods of constructing basis splines on irregular grid with different number of nodes (main and auxiliary) in spline are considered. The computational experiment results are provided.

Keywords: *mathematical model, second-order spline, irregular grid nodes, students' contingent, educational price, university ranking.*

1. Введение

Широкое применение в последние десятилетия сплайн-методов в инженерных расчетах свидетельствует о преимуществах сплайнов перед классическими методами. При этом широко используются билинейные, биквадратичные и бикубические сплайны.

На практике применяют сплайны, построенные на равномерной и неравномерной сетках узлов. Сегодня исследуется значительное количество процессов и явлений, данные о характеристиках которых представлены нерегулярно, что свидетельствует о перспективах исследования и использования в моделировании именно сплайнов, построенных на неравномерной сетке узлов. Построению сплайнов разных порядков на регулярной и нерегулярной сетках узлов посвящены работы Ю.Н. Субботина [1], В.Т. Шевалдина [2], Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова [3], В.А. Василенко [4], Н.П. Корнейчука [5], В.Л. Макарова, В.В. Хлобистова [6], О.Н. Литвина, А.В. Ткаченко [7].

В связи с переходом системы образования к рыночным методам функционирования становится актуальным, по мнению автора, исследование различных социально-экономических аспектов деятельности высших учебных заведений как особых субъектов рынка образовательных услуг с помощью сплайнов, построенных на неравномерной сетке узлов.

Целью данной работы является построение модели процесса формирования контингента студентов вуза с помощью указанных сплайнов второго порядка.

2. Изложение основного материала

Информация, получаемая от различных субъектов хозяйствования, как правило, носит нерегулярный характер. Не являются исключением данные рынка образовательных услуг Украины, что связано с влиянием большого количества факторов на деятельность вузов. В условиях демографического кризиса, который определил количество поступивших в вузы всех уровней аккредитации последних лет, ведения конкурентной ценовой борьбы за контингент студентов, законодательных изменений образовательного процесса рассмотрим процесс формирования контингента студентов вузов III-IV уровней аккредитации как специфическую задачу математического моделирования.

В работе [8] были рассмотрены математические модели процесса формирования контингента студентов, построенные с помощью кусочно-линейных сплайнов двух переменных и рациональных функций, где контингент, выраженный в относительной доле студентов контрактной формы обучения к их общему количеству, определяется как функция двух переменных: цены обучения на определенной специальности (p) и рейтинга вуза по соответствующему направлению подготовки (r), размещенных на нерегулярной сетке узлов (R_k, P_k), $k = \overline{1, M}$ (рис. 1). Рейтинг вузов принят по результатам рейтингования вузов Украины по методике ЮНЕСКО, согласно которой вузы сгруппированы по 10-ти уровням рейтинга, где 1 – наивысший рейтинг, 10 - наименьший. Для удобства вычислений значение рейтинга представлено в интервале $[0{,}1;1]$, то есть значение 0,1 соответствует десятому рейтингу, 1 - первому.

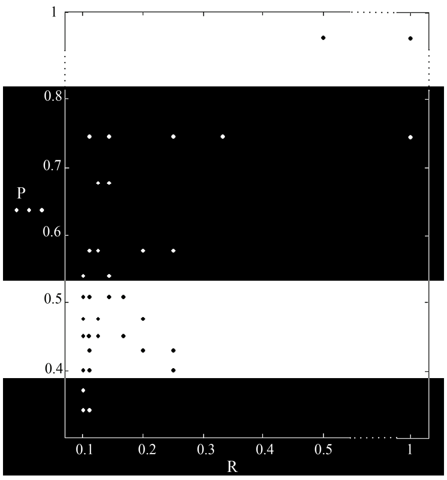

Рис. 1. Размещение узлов (R_k, P_k)

При построении модели использованы следующие обозначения:

1. $R_i = 1/RR_i$ ($R_i = 1$ при $RR_i = 1$, $i = \overline{1, M}$), RR_i - рейтинг вуза по направлению подготовки, M - количество исследуемых вузов.

2. $P_i = PP_i / PP_{\max}$, $PP_{\max} = \max\limits_{1 \le i \le M} PP_i$, $i = \overline{1, M}$, PP_i - стоимость обучения на конкретной специальности в исследуемом учебном году.

3. $F_i^{к} = \dfrac{FF_i^{к}}{FF_i^{б} + FF_i^{к}}$ или $F_i^{б} = \dfrac{FF_i^{б}}{FF_i^{б} + FF_i^{к}}$, соответственно $F_i^{к} + F_i^{б} = 1$, $FF_i^{б}$, $FF_i^{к}$ - количество зачисленных студентов на бюджетную или за средства физических лиц (контрактная) формы обучения.

Рассмотрим случай, когда модель процесса формирования контингента студентов вуза от его рейтинга и цены обучения имеет вид

$$E(r, p) = \sum_{q=1}^{M} B_q(r) Q(p, q), \tag{1}$$

где $B_q(r) = \sum\limits_{k=1}^{N} S_2(r, R^{<k>}) C_{k,q}$, $C_{k,q}$ находим из условия $B_q(r_\mu) = \delta_{q,\mu}$, $1 \le q, \mu \le N$, $S_2(r, R^{<k>})$ - сплайн второго порядка на неравномерной сетке узлов вида [7].

Приведем явный аналитический вид для базисных сплайнов второго порядка на неравномерной сетке узлов, построенных в [7].

$$S_2(x, X) = \begin{cases} 0, x \le X_0 \\ \dfrac{(x - X_0)^2}{X_1 - X_0}, X_0 < x \le X_1 \\ X_2 - X_0 + \dfrac{(x - X_2)^2}{X_1 - X_2} - \dfrac{(x - X_1)^2}{X_2 - X_1} \dfrac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, X_1 < x \le X_2 \\ \dfrac{(X_2 - X_0)(X_3 - X_2)}{X_3 - X_1} - \dfrac{(x - X_3)^2 - (X_3 - X_2)^2}{X_2 - X_3} \dfrac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, X_2 < x < X_3 \\ 0, x \ge X_3 \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, при $X_k = k, k = 0,1,2,3,4$ формула для $SS_2(x, X)$ совпадает с формулами для *B*-сплайнов второй степени на равномерной сетке узлов [7].

Графики сплайнов $B_q(r)$ на интервале $[0,1]$ при $q = \overline{5,10}$ приведем на рис. 2.

Рассмотрим также случай, когда $S_2(r, R^{<k>})$ - сплайн 2-го порядка, построенный в [2] с использованием большего количества узлов сплайна (основных и вспомогательных) по сравнению с [6]. В работе [2] указано, что локальные полиномиальные сплайны порядка r минимального дефекта обычно строятся как линейные комбинации соответствующих B-сплайнов $B_{r,k}(x)$. А именно для функции f класса непрерывных функций локальный полиномиальный сплайн $S(x) = S(x, f)$ определяется так

$$S(x) = \sum_k c_k(f) B_{r,k}(x),$$

где при фиксированном $x = x^*$ коэффициенты $c_k(f)$ определяются значениями $f(\tau_k)$ в некоторой окрестности точки x^* и определяется носителем тех B-сплайнов $B_{r,k}(x)$, которые в точке x^* не равны нулю. Следует отметить, что самый простой и удобный с вычислительной точки зрения вариант $c_k(f) = f(\tau_k)$

$$S(x) = \sum_k f(\tau_k) B_{r,k}(x). \tag{3}$$

имеет невысокую точность.

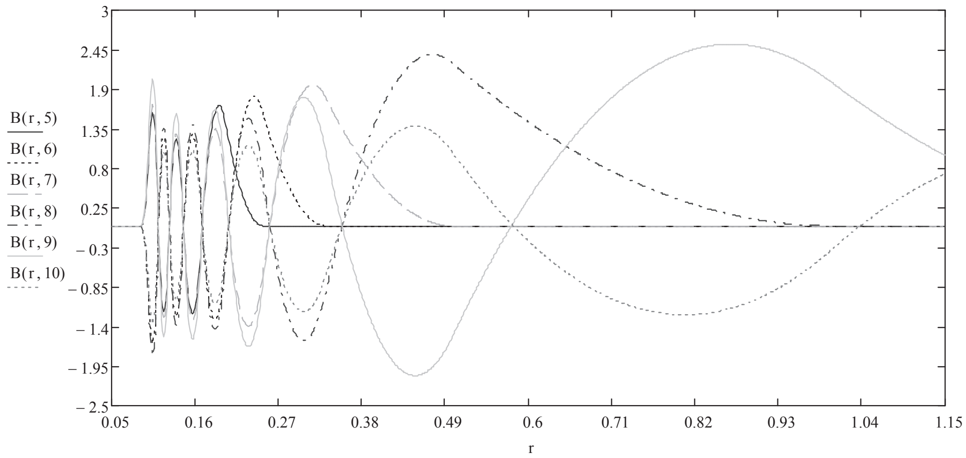

Рис. 2. График сплайна $B_q(r_\mu) = \delta_{q,\mu}$, $1 \le q, \mu \le N$, простроенного с помощью базисного сплайна второго порядка вида (2), при $q = \overline{5,10}$

В случае функций f, заданных на отрезке $[0,1]$, этим сплайном определяется линейный положительный оператор, который каждой непрерывной функции $f \in C[0,1]$ ставит в соответствие полиномиальный сплайн $S(x) \in S(\Delta_n)$ порядка r на сетке $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$. Положительность оператора S означает, что если $f(x) \ge 0$, то $S(x, f) \ge 0$ для всех $x \in [0,1]$.

Также в работе [2] построен параболический сплайн $S(x) = S(x, f)$ для неравномерного размещения узлов в виде линейной комбинации функций типа B-сплайнов. Для построения автором рассмотрена на оси $\mathbf{R}$ бесконечная в обе стороны сетка узлов $\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$; $h_j = x_{j+1} - x_j \,(j \in \mathbf{Z})$, для функций $f \in W_\infty^2(\mathbf{R})$ и введено обозначение

$$[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{y_{j+2}}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_j)} - \frac{y_{j+1}}{h_{j+1} h_j} + \frac{y_j}{h_j(h_{j+1} + h_j)}, \tag{4}$$

$j \in \mathbf{Z}$, для разделенной разности 2-го порядка по значениям функции $y_j = f(x_j)$ в точках x_j, x_{j+1} и x_{j+2}. Функции $f \in W_\infty^2(\mathbf{R})$ ставится в соответствие параболический сплайн

$$\begin{aligned} S(x) = S(x,f) = f(x_j) + \frac{h_{j-1}h_j}{4} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \\ + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{h_j + h_{j+1}}(x - x_j) + \frac{h_{j-1}}{h_j}(x-x_j)^2 f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] + \\ + \left(\frac{h_{j+1}}{h_j} f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] - \frac{h_{j-1}}{h_j} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \right) \left(x - \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \right)_+^2, \\ x \in [x_j, x_{j+1}] \ (j \in \mathbf{Z}) \end{aligned} \tag{5}$$

где $(x-\alpha)_+^2 = \max\{0,(x-\alpha)\}^2$. Для формулировки теоремы о свойствах функции $S(x)$ введено несколько вспомогательных функций (далее j - произвольное целое число). Пусть

$t_1 = \frac{x_{j-2} + x_{j-1}}{2}$, $t_2 = x_{j-1}$, $t_3 = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$, $t_4 = x_j$, $t_5 = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$, $t_6 = x_{j+1}$, $t_7 = \frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2}$

и сплайн на каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1,6}$ задается такими функциями

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-t_1)^2}{h_{j-1}(h_{j-1} + h_{j-2})}, \ x \in [t_1, t_2];$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{h_{j-1} + h_{j-2}} \left(\frac{h_{j-2}}{4} + x - t_2 + \frac{h_{j-2}}{h_{j-1}^2}(x-t_2)^2 \right), \ x \in [t_2, t_3];$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) - \frac{2h_{j-2} + h_{j-1}}{h_{j-1}^2(h_{j-1} + h_{j-2})}(x-t_1)^2, \ x \in [t_3, t_4];$$

$$\varphi_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{h_j^2}(x-t_4)^2, \ x \in [t_4, t_5];$$

$$\varphi_5(x) = \varphi_4(x) + \frac{2h_{j+1} + h_j}{h_j^2(h_j + h_{j+2})}(x-t_5)^2, \ x \in [t_5, t_6];$$

$$\varphi_6(x) = \frac{1}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_j)}(x-t_7)^2, \ x \in [t_6, t_7].$$

Целесообразность использования сплайнов такого вида связана со свойствами процесса аппроксимации с использованием сплайнов, сформулированными в работе [2] в виде теоремы.

Теорема 1. Локальный процесс аппроксимации (5) имеет следующие свойства:

1. Наследует локально свойство монотонности исходных данных $\{y_i\}$ в том смысле, что

а) если $y_{j-1} \le y_j \le y_{j+1}$ (или $y_{j-1} \ge y_j \ge y_{j+1}$), то функция $S(x)$ не убывает (не возрастает) на промежутке $\left(x_j, \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$;

б) если $y_j \le y_{j+1} \le y_{j+2}$ (или $y_j \ge y_{j+1} \ge y_{j+2}$), то функция $S(x)$ не убывает (не возрастает) на промежутке $\left(\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}, x_{j+1}\right)$;

2. Наследует локально свойство выпуклости исходных данных, а именно:

а) если $[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}] \ge 0$ ($[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}] \le 0$), то функция $S(x)$ выпуклая вниз (вверх) на промежутке $\left(x_j, \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$;

б) если $[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] \ge 0$ ($[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] \le 0$), то функция $S(x)$ выпуклая вниз (вверх) на промежутке $\left(\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}, x_{j+1}\right)$;

3. Функция $S(x)$ непрерывна на всей оси $\mathbf{R}$, причем

$$S(x_j) = y_j + \frac{h_{j-1}h_j}{4}[y_{j-1}, y_j, y_{j+1}] \quad (j \in \mathbf{Z});$$

4. Функция $S(x)$ имеет на всей оси $\mathbf{R}$ непрерывную первую производную $S'(x)$, причем $S'(x_j) = \dfrac{1}{h_{j-1} + h_j}(y_{j+1} - y_{j-1}) \quad (j \in \mathbf{Z})$;

5. а) для любой функции $f \in W_\infty^2[x_{j-1}, x_{j+1}]$ $(j \in \mathbf{Z})$ имеет место точное неравенство $\left|S''(x)\right| \le \dfrac{h_{j-1}}{h_j}$, $x \in \left(x_j, \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$;

б) для любой функции $f \in W_\infty^2[x_j, x_{j+2}]$ $(j \in \mathbf{Z})$ имеет место точное неравенство $\left|S''(x)\right| \le \dfrac{h_{j+1}}{h_j}$, $x \in \left(\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}, x_{j+1}\right)$;

6. При любом $x \in \mathbf{Z}$ справедлива формула $S(x) = \sum\limits_j y_j B_j(x)$, причем при $x \in \left(\dfrac{x_{l-1} + x_l}{2}, \dfrac{x_l + x_{l+1}}{2}\right)$ $(l \in \mathbf{Z})$ эта сумма состоит из трех слагаемых, а именно

$$S(x) = y_{l-1}B_{l-1}(x) + y_l B_l(x) + y_{l+1}B_{l+1}(x).$$

Теорема 1 доказана в работе [2], а для случая равномерной сетки узлов Ю.Н. Субботиным [1].

Отметим, что можно построить локальные параболические сплайны с произвольными фиксированными узлами для отрезка $[0,1]$ и в непериодическом случае. Пусть $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1$ - сетка узлов на отрезке $[0,1]$. Полагаем

$$S(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} x + \frac{h_1}{h_0}\left(x - \frac{x_1}{2}\right)_+^2 [y_0, y_1, y_2], \; x \in [0, x_1],$$

$$S(x) = y_{n-1} + \frac{y_{n-2} y_{n-1}}{4}[y_{n-2}, y_{n-1}, y_n] + \frac{y_n - y_{n-2}}{h_{n-1} + h_{n-2}}(x - x_{n-1}) +$$

$$+\frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}(x - x_{n-1})^2 [y_{n-2}, y_{n-1}, y_n] - \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}[y_{n-2}, y_{n-1}, y_n]\left(x - \frac{1 + x_{n-1}}{2}\right)_+^2,$$

$x \in [x_{n-1}, 1]$.

На отрезках $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 1,2,...,n-2$) функция $S(x)$ строится по формулам (5). Построенная таким образом на отрезке $[0,1]$ функция $S(x)$ такая, что $S^{'}(x) \in C[0,1]$. При этом сплайн $S(x)$ локально наследует свойства монотонности и выпуклости исходных данных $y_j = f(x_j)$, $j = 1,2,...,n$.

Важным является также утверждение приведенной ниже теоремы 2 о погрешности аппроксимации.

Теорема 2. Для любой функции $f \in W_\infty^2 [x_{j-1}, x_{j+2}]$ $(j \in \mathbf{Z})$ для сплайна $S(x) = S(x, f)$, определенного формулой (5), имеет место точное неравенство

$$\left| f(x) - S(x) \right| \le \psi_j(x), \; x \in [x_j, x_{j+1}] \quad (j \in \mathbf{Z}),$$

где $$\psi_j(x) = \begin{cases} \psi_{j,1}(x), x \in \left[x_j, \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2} \right] \\ \psi_{j,2}(x), x \in \left[\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}, x_{j+1} \right] \end{cases},$$

$$\psi_{j,1}(x) = \frac{1}{2}\left[(x - x_j)^2 \frac{h_{j-1} - h_j}{h_j} + (x - x_j)(h_j - h_{j-1}) + \frac{h_j h_{j-1}}{4} \right],$$

$$\psi_{j,2}(x) = \frac{1}{2}\left[(x - x_{j+1})^2 \frac{h_{j+1} - h_j}{h_j} - (x - x_{j+1})(h_j - h_{j+1}) + \frac{h_j h_{j+1}}{4} \right].$$

Обе функции $\psi_{j,1}(x)$ и $\psi_{j,2}(x)$ являются неотрицательными в областях своего определения.

Рассмотрим случай построения математической модели процесса формирования контингента студентов с помощью формулы вида (1), где $B_q(r)$ получаем с помощью сплайна вида (5).

Графики сплайна $B_q(r)$ на интервале $[0,1]$ при $q = \overline{5,10}$ приведем на рис. 3.

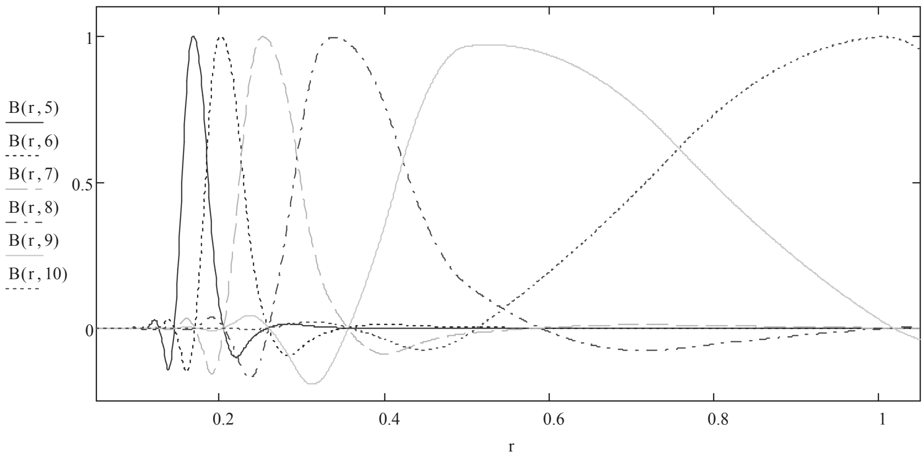

Рис. 3. Графики базисных сплайнов $B_q(r_\mu) = \delta_{q,\mu}$, $1 \le q, \mu \le N$ *вида (5) при* $q = \overline{5,10}$

При построении модели процесса формирования контингента студентов вуза при помощи рассмотренных сплайнов, проведен расчет для двух случаев задания функции цены:

1) полиномом вида $Q1(p,k) = \sum_{l=1}^{N_k} F(r_k, p_l) \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne l}}^{N_k} \frac{p - P_q}{P_l - P_q}$;

2) в виде $Q2_k(p) = b_{0,k} + b_{1,k}p + b_{2,k}p^2$ для заданного значения рейтинга r, где $b_{i,k}, i = \overline{0,2}$ находятся из условия наилучшего приближения методом наименьших квадратов экспериментальных данных $F(r_k, p_l)$.

Отметим, что результаты вычислительного эксперимента модели (1) позволяют проводить анализ критических значений цены, при которой спрос на исследуемую специальность, при известном значении рейтинга, падает. Также полученные зависимости подтверждают гипотезу, что при фиксированном значении цены и при росте рейтинга увеличивается количество зачисленных студентов, которое по условиям модели выражается в доле студентов контрактной формы обучения к их общему количеству.

3. Выводы

Построенные модели формирования контингента студентов с помощью рассмотренных сплайнов второго порядка позволяют проводить эконометрический анализ зависимости процесса формирования контингента студентов вуза от изменений его рейтинга и цены обучения. Сложности построения прогнозов с использованием полученных зависимостей связаны с проблемой исходных данных, шаг между которыми мал. Кроме того, в рейтинге вузов Украины всего 5 вузов, которые входят в группу высоких рейтингов (от 1 до 3), а высокий уровень цены характерен для вузов рейтинга от 1 до 9.

Таким образом, анализ результатов вычислительного эксперимента, проведенного на основании указанных выше экспериментальных данных по Украине, для одной из специальностей показывает, что использование квадратичных сплайнов по одной переменной на неравномерной сетке узлов для приближения зависимости принятых студентов $E(r,p)$ позволяет найти области монотонности, а также локальные экстремумы (максимумы и минимумы). Это приводит к возможности найти зависимость между переменными r и p, при которых функция $E(r,p)$ будет иметь наибольшее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин Ю.Н. Исследование свойств монотоности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМиМФ. – 1993. – 33, № 7. – С. 996–1003.
2. Шевалдин В.Т. Аппроксимация локальними параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики/ РАН. Сиб. отд-ние.-Новосибирск. – 2005. – 8, № 1. – С. 77–88.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 220 с.
4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 215 с.
5. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполирование операторов. – К.: Наукова думка, 2000. – 406 с.
7. Литвин О.М., Ткаченко О.В. Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів // Доповіді НАН України. – 2010. - №1. – С.34-39.
8. Литвин О., Ярмош О. Математичне моделювання процесу формування контингенту студентів ВНЗ // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2012. – Випуск 18. –С.191-200.

Надійшла у першій редакції 22.01.2014, в останній - 19.06.2014.