

Вісник Харківського національного університету  
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»  
УДК 518.1:004 № 629, 2004, с.33-38

## Стохастичні моделі для комп'ютерної діагностики вагових спектрів кубатур

А. Н. Хомченко, Г. Я. Тулученко

*Херсонський державний технічний університет*

The article contains the description of the stochastic models for the computer diagnostics of the cubature weight spectrums.

### 1. Загальна постановка задачі та її актуальність.

При реалізації методу скінченних елементів (МСЕ) важливу роль відіграє операція обчислення кратних інтегралів. В більшості випадків аналітичне обчислення таких інтегралів виявляється занадто складним для практичного виконання або взагалі неможливим. Тому зараз увага фахівців сконцентрована на пошуках кубатурних формул, що є оптимальними у відповідності до змісту конкретної прикладної задачі: у відповідності до властивостей підінтегральної функції, до властивостей границі області інтегрування, до необхідної точності обчислень тощо [1].

### 2. Витоки дослідження авторів.

Існує кілька підходів до побудови кубатурних формул, які пов'язані з МСЕ. При цьому підінтегральна функція замінюється інтерполяційним поліномом

$$f(x; y) \approx \sum_{i=1}^n f_i \cdot N_i, \quad (1)$$

де  $f(x; y)$  – підінтегральна функція,  $f_i$  – значення функції  $f(x; y)$  в вузлах скінченного елемента (СЕ),  $N_i$  – базисні функції,  $n$  – кількість вузлів СЕ.

Після заміни (1) операція інтегрування зводиться до інтегрування базисних функцій по області  $D$  скінченного елемента:

$$\iint_D f(x; y) dx dy \approx \iint_D \left( \sum_{i=1}^n f_i \cdot N_i \right) dx dy = \sum_{i=1}^n \left( f_i \cdot \iint_D N_i dx dy \right). \quad (2)$$

Як відомо, інтеграл  $\iint_D N_i dx dy$  легко обчислюється в  $L$ -координатах [2, с. 50],

якщо область  $D$  є трикутник.

Таким чином, значення інтегралів від базисних функцій є ваговими коефіцієнтами для кубатурних формул. Тобто існування альтернативних базисів обумовлює існування альтернативних кубатурних формул.

У другий спосіб кубатурні формули можуть бути отримані методом усередненого зважування значень підінтегральної функції в вузлах скінченного елемента.

І, нарешті, спектр невід'ємних вагових коефіцієнтів кубатурних формул може бути змодельований як спектр статистичних частот кількості частинок, які поглинуті при броунівському русі вузлами СЕ. Моделюючи несиметричні блукання, можна отримувати всі спектри з невід'ємними ваговими коефіцієнтами, що містять кубатурні формули, які побудовані першим або другим способом.

Створення бібліотеки альтернативних кубатурних формул для різних видів скінченних елементів з різною кількістю вузлів розпочато в роботах А.Н.Хомченка та його учнів [3-5].

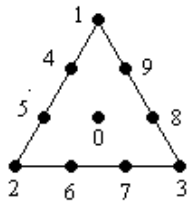


Рис. 1

### 3. Нерозв'язані задачі та мета роботи.

Найбільш поширеним СЕ є трикутний елемент. Якщо похідна функції, що досліджується, не може бути апроксимована з достатньою точністю за допомогою кусочно-сталих функцій, тоді використовують СЕ високих порядків.

У роботі вперше розглядається побудова альтернативної кубатурної формули для комплекс-елементу третього порядку з десятьма вузлами (рис. 1).

Мета проведених досліджень полягала в розробці самої кубатурної формули, а також моделей випадкових блукань в названому СЕ, які дозволяють проводити комп'ютерну діагностику вагових спектрів кубатур.

### 4. Основний матеріал дослідження.

В табл. 1 наведені базисні функції в системі  $L$ -координат, що відповідають методу невизначених коефіцієнтів, та значення подвійних інтегралів від цих базисних функцій.

Таблиця 1. Характеристики базисних функцій комплекс-елементу третього порядку

Базисна функція, $N_i$	Значення інтегралу $\iint_D N_i dx dy$
$N_0 = 27L_1L_2L_3$	$\frac{9}{20}S_D$
$N_1 = \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$	$\frac{1}{30}S_D$
$N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$	$\frac{3}{40}S_D$

За  $S_D$  позначено площу комплекс-елементу третього порядку.

В силу симетричності СЕ для даного базису кубатурна формула має вигляд:

$$\iint_D f(x; y) dx dy \approx S_D \cdot \left[ \frac{9}{20} f_0 + \frac{1}{30} \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{3}{40} \sum_{i=4}^9 f_i \right] \quad (3)$$

Побудуємо альтернативну кубатурну формулу. Виконаємо усереднене зважування трьох примітивних моделей. За кожною з моделей інтеграл (2) дорівнює середньому арифметичному об'ємів призм, основою яких є скінчений елемент, а висоти дорівнюють значенням функції  $f(x; y)$  в певних вузлах елемента.

За першою моделлю інтеграл (2) дорівнює

$$I_1 \approx S_D \cdot f_0,$$

за другою –

$$I_2 \approx \frac{1}{3} S_D \cdot \sum_{i=1}^3 f_i,$$

за третьою –

$$I_3 \approx \frac{1}{6} S_D \cdot \sum_{i=4}^9 f_i.$$

Зважимо отримані примітивні моделі у відповідності до кількості вузлів, що задіяні при їх обчисленні:

$$I = \frac{6}{10} \left( \frac{3}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2 \right) + \frac{4}{10} I_3.$$

Підставивши в останню формулу вирази для інтегралів  $I_1, I_2, I_3$ , отримуємо альтернативну кубатурну формулу:

$$\iint_D f(x; y) dx dy \approx S_D \cdot \left[ \frac{9}{20} f_0 + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{1}{15} \sum_{i=4}^9 f_i \right]. \quad (4)$$

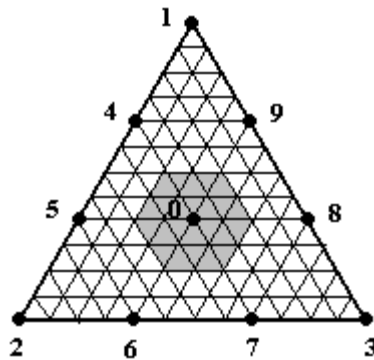


Рис. 2

Виконаємо наступні обчислення:

$$Row = (4 - 1)(Points + 1) + 1 = 3Points + 4,$$

Відтворимо спектри вагових коефіцієнтів кубатурних формул (3) та (4) за допомогою схеми випадкових несиметричних блукань. Накладемо на елемент сітку з трикутними комірками (рис. 2). Області тяжіння до нульового вузла надамо шестикутної форми.

По-перше, покажемо, що регулювання величини статистичних частот кількості частинок, які поглинуті вузлами елемента, тільки за рахунок області тяжіння навколо нульового вузла, недостатньо для отримання будь-яких спектрів з невід'ємними ваговими коефіцієнтами.

де  $Points$  – кількість поділок між вузлами на стороні елемента;  $Row$  – кількість рядків сітки.

Тоді

$$Total = \frac{1}{2}(Row + 1)Row,$$

а

$$Boundary = 3 \cdot (Row - 1),$$

де  $Total$  - загальна кількість вузлів сітки;  $Boundary$  - кількість вузлів на границі.

Отже, ймовірність того, що частинка при вкиданні в елемент одразу потрапить на границю дорівнює:

$$P = \frac{Boundary}{Total} = \frac{6(Row - 1)}{(Row + 1)Row}.$$

Зрозуміло, що лише, коли  $Row \rightarrow \infty$ , ймовірність потрапляння частинки на границю при вкиданні в елемент прямує до нуля. А коли щільність сітки скінченна, вплив границі, на якій за умовою відбуваються симетричні блукання, достатньо відчутний. Наприклад, якщо  $Points = 5$ , тоді  $P = 0,28$ . Тобто приблизно третина всіх кинутих в елемент частинок виконують симетричні блукання.

В проведених авторами експериментах  $Points = 10$ . В цьому випадку на границю одразу потрапляє приблизно 15% всіх частинок.

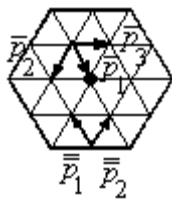


Рис. 3

Сформулюємо правила блукання для точок, що знаходяться всередині СЕ. Точки, що знаходяться поза область тяжіння, виконують блукання за шестимаршрутною схемою з рівними ймовірностями переходів. Точки, що потрапили в область тяжіння, мають маршрути переходів, яким надається перевага. Для точок, що опинилися на діагоналях шестикутника тяжіння, перевага надається трьома маршрутам, які направленні до нульового вузла (рис. 3) і мають такі перехідні ймовірності:  $\bar{p}_1 > \bar{p}_2 = \bar{p}_3$ . Для інших точок області переважними є два маршрути переходу. Наприклад, такі, як показані на рис. 3. Їх перехідні ймовірності обчислювалися наступним чином:  $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \frac{1}{2}(1 - \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \bar{p}_3)$ .

Очевидно, що значення  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$ ,  $\bar{p}_3$  повинні задовольняти вимозі  $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 \leq 1$ . Інші маршрути переходів мають рівні ймовірності.

Таким чином, на результати моделювання впливають наступні фактори: форма області тяжіння, її розміри, величини перехідних ймовірностей для маршрутів, що мають переваги, щільність накладеної на СЕ сітки.

В табл. 2 представлені стабілізовані частоти частинок, що поглинуті вузлами СЕ, при наступних параметрах: кількість частинок – 1200, кількість серій

дослідів – 10,  $Points = 10$ ,  $\bar{p}_1 = 0,2$ ,  $\bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 0,18$ . Для порівняння ця таблиця також містить теоретичні частоти, що розраховані за спектром вагових коефіцієнтів кубатурної формули (4).

Таблиця 2. Статистичні та експериментальні частоти поглинання частинок вузлами СЕ

Вузли	Експериментальні частоти	Теоретичні частоти
0	542,40	540
1-3	62,90	60
4-9	78,15	80

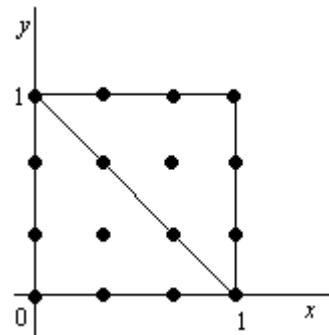


Рис. 4

Порушення симетричності блукань на границі СЕ дозволяє змоделювати спектр вагових коефіцієнтів для формули (3).

В табл. 3 наведені результати обчислення значень подвійних інтегралів від трьох функцій різними способами: аналітично та за кубатурними формулами (3) і (4). Областю інтегрування є одиничний квадрат. При використанні кубатурних формул область інтегрування розбивається на два трикутні СЕ з 10 вузлами (рис. 4). Очевидно, що обидві кубатурні формули дозволяють обчислювати значення даних інтегралів з задовільною точністю.

Таблиця 3. Результати тестування кубатурних формул

№ з/п	Підінтегральна функція	Значення інтеграла, що обчислено		
		аналітично	за формулою (3)	за формулою (4)
1	$f(x; y) = ye^{-xy}$	$\frac{1}{e} \approx 0,3679$	0,3683	0,3696
2	$f(x; y) = \frac{x^2 \cdot \sin y}{1 + x^6}$	$\frac{\pi}{12}(1 - \cos 1) \approx 0,1203$	0,1214	0,1139
3	$f(x; y) = \frac{e^{\sin x} \cdot \cos x}{1 + y^2}$	$\frac{\pi}{4}(e^{\sin 1} - 1) \approx 1,0366$	1,0517	1,0520

### 5. Висновки з отриманих результатів та напрямки подальших досліджень.

В роботі вперше запропоновано та протестовано альтернативну кубатурну формулу на основі трикутного скінченного елемента третього порядку. Спектр її вагових коефіцієнтів змодельовано на основі схеми несиметричних блукань частинок в межах цього СЕ. Точність кубатурної формули (4) задовольняє вимогам, що висуваються до інженерних розрахунків.

Продовження досліджень автори вбачають в подальшому поповненні бібліотеки кубатурних формул для СЕ високих порядків. Особливістю альтернативних кубатурних формул є наявність невід'ємних спектрів вагових коефіцієнтів, що дозволяє моделювати ці спектри за допомогою комп'ютерних експериментів.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Хомченко А.Н., Цибуленко О.В. Модели взвешенного усреднения и кубатурные формулы. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 2. – Харків: ХГУПТ, 2002. – С. 19-24.
2. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Цуркан Ф.В. Способы кратного интегрирования в правильном шестиугольнике. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: Ин-т математики НАНУ, 1996. – С. 268-270.
4. Хомченко А., Зуб П., Цибуленко О. Геометрія випадкових блукань у центрованих дискретних елементах. // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2003. – С. 104-106.
5. Крючковський В.В., Хомченко А.Н., Цибуленко О.В. Геометрія випадкових маршрутів Монте-Карло на гексагоні. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4, Т. 19. – С. 36-39.