

Математическая модель на базе МДО многоэлементной
полосковой антенны
на экранированной диэлектрической подложке

А. В. Антоненц

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In this paper, we present new method for the modeling of printed strip gratings. Our general approach for finite perfectly electric conducting (PEC) strip gratings printed on a dielectric substrate with a PEC ground plane is based on the parametric representations of the integral and pseudo-differential operators and Method of Discrete Singularities (MDS). Diffraction problem is first reduced to hypersingular integral equation. Then this equation is solved using the MDS. Finite-order Cantorian set strip grating is investigated numerically. Some of obtained results are presented.

1. Введение

Задаче дифракции электромагнитных волн (ЭМВ) на бесконечно тонких ленточных решетках посвящено большое количество работ, в частности монографии [1,2], где имеется подробная библиография. В данной статье используется метод дискретных особенностей (МДО), приложение которого для задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках, а также замкнутых или открытых цилиндрических поверхностях тщательно проработано и обосновано [3-5]. Основные идеи МДО подробно изложены в [6]. Этот метод состоит в сведении краевой задачи к системе сингулярных или гиперсингулярных интегральных уравнений и последующему численному решению ее с помощью квадратурных формул интерполяционного типа. Таким образом, метод позволяет получать результаты с высокой точностью при относительно небольших затратах на вычисления. В данной работе МДО используется наряду с техникой параметрического представления псевдодифференциальных и интегральных операторов [7,8] для решения задачи дифракции ЭМВ на идеально проводящей предфрактальной многоэлементной решетке, нанесенной на диэлектрическую подложку с идеально проводящим экраном. Следует также отметить, что данная работа является первым шагом в применении МДО для анализа плоских ленточных решеток в слоистых средах. Математическая модель на базе МДО в задаче дифракции плоской монохроматической волны на предканторовой решетке изложена в работе [9], а на предканторовой решетке, расположенной перед идеально проводящим экраном (без диэлектрической подложки), проводился автором и был изложен в [10].

2. Постановка задачи

Рассматривается задача дифракции плоской монохроматической Н-поляризованной волны на конечной решетке, состоящей из бесконечно тонких идеально проводящих лент, расположенных на диэлектрической подложке с идеально проводящим экраном. Зависимость величин от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. На рис. 1 приведено сечение рассматриваемой структуры плоскостью, перпендикулярной направляющим решеткой. Сечение решетки образует предканторово множество конечного порядка на отрезке $[-l, l]$. Дальнейшее изложение проводится для произвольного набора лент $L = \bigcup_{q=1}^m (a_q, b_q)$, $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < +\infty$.

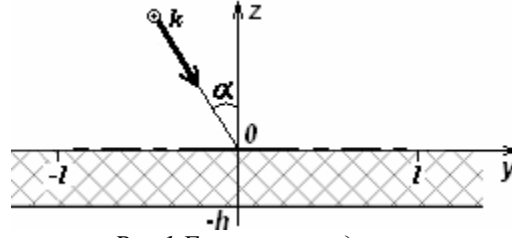


Рис.1. Геометрия задачи

Подложка имеет толщину h и относительную диэлектрическую проницаемость ε^- . Относительную диэлектрическую проницаемость свободного пространства обозначим ε^+ ($\varepsilon^+ = 1$), а волновое число $k = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$.

Введем обозначения для областей подложки и свободного пространства: $\Omega^- = \{y \in \mathbf{R}, -h < z < 0\}$ и $\Omega^+ = \{y \in \mathbf{R}, z > 0\}$ соответственно. В рассматриваемом случае электрический и магнитный векторы представимы в виде

$$E = (0, E_y, E_z); \quad H = (H_x, 0, 0)$$

Единственную отличную от нуля компоненту вектора H обозначим $u(y, z)$, тогда

$$E_y = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^\pm} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^\pm} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (y, z) \in \Omega^\pm.$$

Функция $u(y, z)$ должна удовлетворять уравнениям Гельмгольца в соответствующих подобластях:

$$\Delta u + \varepsilon^\pm k^2 u = 0, \quad (y, z) \in \Omega^\pm; \quad (1)$$

условиям сопряжения на границе свободное пространство/диэлектрик, которые мы получаем из условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей:

$$u(y, z)|_{z \downarrow 0} = u(y, z)|_{z \uparrow 0}, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \downarrow 0} = \frac{1}{\varepsilon^-} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \uparrow 0}, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L; \quad (3)$$

граничным условиям на идеально проводящих поверхностях (лентах и экране):

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \downarrow 0} = \frac{1}{\varepsilon^-} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \uparrow 0} = 0, \quad y \in L, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u = 0, \quad z = -h, \quad y \in \mathbf{R}; \quad (5)$$

условию Майкснера конечности энергии в окрестности ребер решеток и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

3. Вывод гиперсингулярного интегрального уравнения

Будем искать функцию u в виде

$$u(y, z) = \begin{cases} u_0(y, z) + u^+(y, z), & z > 0, \\ u_0(y, z) + u^-(y, z), & -h < z < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_0(y, z)$ – решение задачи дифракции плоской электромагнитной Н-поляризованной волны на экранированной подложке без решетки. Это решение легко найти аналитически.

Функции u^+ и u^- будем искать в виде Фурье подобных представлений:

$$u^+(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^+(\lambda) e^{i\lambda y - \gamma^+(\lambda)z} d\lambda, \quad (7)$$

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^-(\lambda) e^{i\lambda y} \frac{\operatorname{ch}[\gamma^-(\lambda)(z+h)]}{\operatorname{ch}[\gamma^-(\lambda)h]} d\lambda, \quad (8)$$

где $\gamma^\pm(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon^\pm k^2}$, а ветвь радикала выбирается таким образом, что $\operatorname{Re} \gamma^\pm \geq 0, \operatorname{Im} \gamma^\pm \leq 0$.

Таким выбором вида решения мы удовлетворили уравнению Гельмгольца (1), граничному условию (5), а также условию излучения Зоммерфельда. Оставшиеся условия (2)-(4) приводят к системе парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\varepsilon^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \operatorname{th}[\gamma^-(\lambda)h] e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad (9)$$

$$y \in L,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\varepsilon^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \operatorname{th}[\gamma^-(\lambda)h] e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (10)$$

$$y \in \mathbf{R} \setminus L,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} C^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L. \quad (11)$$

где $f(y) = -\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u_0(y, z) \Big|_{z \downarrow 0}$ – известная функция.

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$F(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} (C^+(\lambda) - C^-(\lambda)) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Из условия (11) получаем: $F(y) \equiv 0, y \in \mathbf{R} \setminus L$.

Из условий (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon^+} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^-} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \operatorname{th}[\gamma^-(\lambda)h],$$

и, следовательно,

$$C^-(\lambda) = -\frac{\varepsilon^- \gamma^+(\lambda)}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)} C^+(\lambda) \operatorname{cth}[\gamma^-(\lambda)h].$$

Тогда,

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{cth}[\gamma^-(\lambda)h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)} C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (13)$$

Обозначим $\tilde{F}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $F(y)$:

$$\tilde{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-i\lambda y} d\lambda. \quad (14)$$

Из равенства (13) получаем, что

$$C^+(\lambda) = \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch}[\gamma^-(\lambda)h]} \tilde{F}(\lambda). \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch}[\gamma^-(\lambda)h]} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad y \in L. \quad (16)$$

Преобразуем выражение:

$$D(\lambda) := \frac{-\gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh}[\gamma^-(\lambda)h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch}[\gamma^-(\lambda)h]},$$

выделив главные члены асимптотики при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Получим:

$$D(\lambda) = -\frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} |\lambda| + \frac{k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \left(\frac{(\varepsilon^+)^2}{\gamma^+(\lambda)} + \frac{(\varepsilon^-)^2}{\gamma^-(\lambda)} \right) + Q(\lambda), \quad (17)$$

где $Q(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|^{-3})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (для функции $Q(\lambda)$ имеется явное аналитическое выражение).

Воспользуемся параметрическими представлениями для интегральных операторов с символами $-|\lambda|$ и $(\gamma^\pm(\lambda))^{-1}$ соответственно:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{(\xi - y)^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (-|\lambda|) \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (18)$$

где интеграл в левой части понимается в смысле конечной части по Адамару, и

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^\pm} k |\xi - y|) F(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma^\pm(\lambda))^{-1} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda. \quad (19)$$

Таким образом, первый член разложения (17) – гиперсингулярный интеграл, второй – интеграл с логарифмической особенностью в ядре, а третий – интеграл с гладким ядром

$$K_1(|\xi - y|) = \int_0^{+\infty} Q(\lambda) \cos(\lambda|\xi - y|) d\lambda.$$

Следовательно, уравнение (16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{(\xi - y)^2} d\xi - \frac{\left((\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) \ln(|\xi - y|) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_L K(|\xi - y|) F(\xi) d\xi = f(y), \quad y \in L, \quad (20)$$

где для гладкого ядра $K(\zeta)$ имеем выражение

$$K(\zeta) = \frac{(\varepsilon^+)^2 k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^+} k \zeta) + \frac{(\varepsilon^-)^2 k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^-} k \zeta) +$$

$$+ \frac{\left((\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \ln \zeta + K_1(\zeta). \quad (21)$$

Решение гиперсингулярного уравнения (20) будем искать в классе функций $F(\xi)$, $\xi \in L$, сужение которых на отрезки (a_q, b_q) имеет вид

$$F(\xi) \Big|_{\xi \in (a_q, b_q)} = V_q(\xi) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}, \quad q = 1 \dots m, \quad (22)$$

где $V_q(\xi)$, $\xi \in [a_q, b_q]$ – непрерывная по Гельдеру функция. При этом выполняются условия Майкснера на ребре. Таким образом, гиперсингулярное уравнение (20) на системе отрезков сводится к системе гиперсингулярных уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{V_q(\xi)}{(\xi - y)} \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi + \\
& + \frac{\left((\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} V_q(\xi) \ln(|\xi - y|) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi + \\
& + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_p}^{b_p} K_{p,q}(\xi, y) V_q(\xi) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi = f_q(y), \quad y \in (a_q, b_q), \quad q = \overline{1, m},
\end{aligned} \tag{23}$$

где $f_q(y) = f(y)|_{y \in (a_q, b_q)}$, а ядра $K_{q,p}(\xi, y)$ являются гладкими функциями на отрезках (a_q, b_q) и имеют вид:

$$K_{q,p}(\xi, y) = \begin{cases} K(|\xi - y|), & p = q, \\ \frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{(\xi - y)^2} + \frac{\left((\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \ln(|\xi - y|) + K(|\xi - y|), & p \neq q. \end{cases}$$

4. Дискретная математическая модель

Дискретная математическая модель задачи получим из системы уравнений (23) с помощью квадратурных формул интерполяционного типа. Для этого на отрезках (a_q, b_q) вводятся узловые точки

$$\theta_{qj}^{n_q} = g_q \left(t_j^{n_q} \right), \quad t_j^{n_q} = \cos \frac{j}{n_q} \pi; \quad j = 1, \dots, n_q - 1, \quad q = 1, \dots, m;$$

где

$$g_s : (-1, 1) \mapsto (a_s, b_s) : t \mapsto g_s(t) = \frac{b_s - a_s}{2} t + \frac{b_s + a_s}{2}.$$

Будем искать функции $V_q(\xi)$ в виде полиномов Чебышева второго рода по узлам $\theta_{qj}^{n_q}, j = 1, \dots, n_q - 1$. Гладкое ядро $K_{q,p}(\xi, y)$ также заменим его интерполяционным полиномом Чебышева второго рода по той же системе узлов. Тогда, применив к интегралам квадратурные формулы интерполяционного типа [4], мы сведем систему гиперсингулярных интегральных уравнений (23) к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций $V_q(\xi)$ в узлах интерполяции. Решая данную СЛАУ, мы получим приближенные значения искомой функции в узлах интерполяции. Используя затем построенные по этим значениям интерполяционные полиномы, можно получить приближенные значения физических характеристик антенны.

5. Результаты численного эксперимента

При проведении численного эксперимента строились диаграммы направленности рассматриваемой полосковой антенны. Используя метод стационарной фазы, из выражений (7) и (13) получаем следующее выражение для диаграммы направленности поля в дальней зоне:

$$\Phi(\varphi) = \frac{\sqrt{\varepsilon^+} k}{\sqrt{2\pi}} W(\sqrt{\varepsilon^+} k \sin \varphi) \cos \varphi \int_L F(\xi) e^{-i\sqrt{\varepsilon^+} k \sin \varphi \xi} d\xi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

где
$$W(\lambda) = \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{cth}[\gamma^-(\lambda)h]}.$$

Заменяя в (24) функцию $F(\xi)$ интерполяционным полиномом, построенным по значениям, полученным при решении СЛАУ, мы получаем приближенные значения для диаграммы направленности.

На рис.2-7 изображены диаграммы направленности для решетки, в сечении представляющей собой предканторово множество 4го порядка. Для всех случаев базовый размер для множества равен 10 мм, толщина диэлектрической подложки – 5 мм, а ее относительная диэлектрическая проницаемость – 2.1 единицы. Частота и угол падения волны указаны для каждой диаграммы.

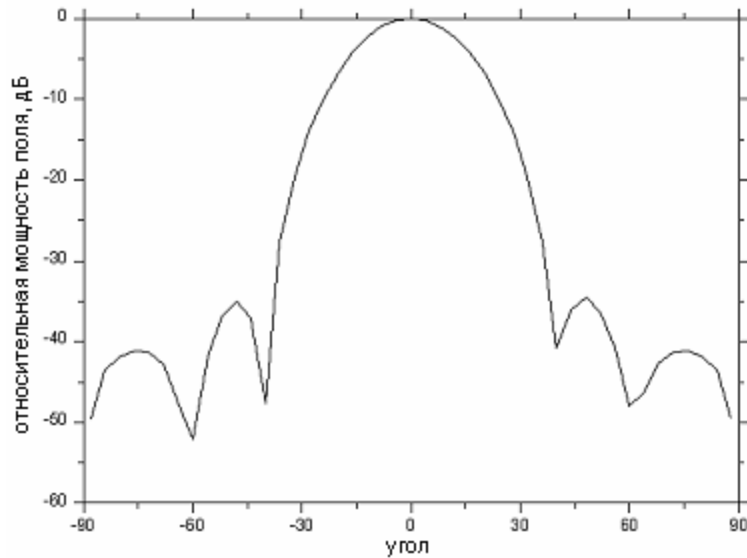


Рис.2. Частота 30 ГГц, угол падения 0°.

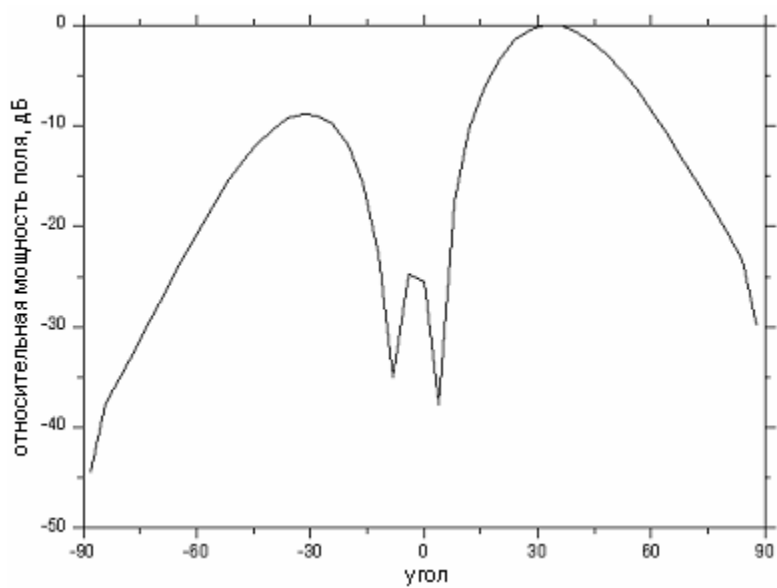


Рис.3. Частота 30 ГГц, угол падения 45° .

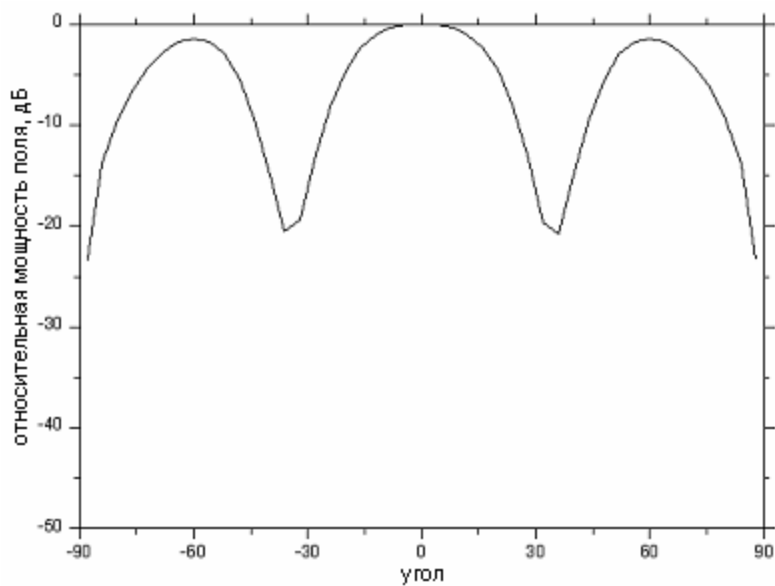


Рис.4. Частота 40 ГГц, угол падения 0° .

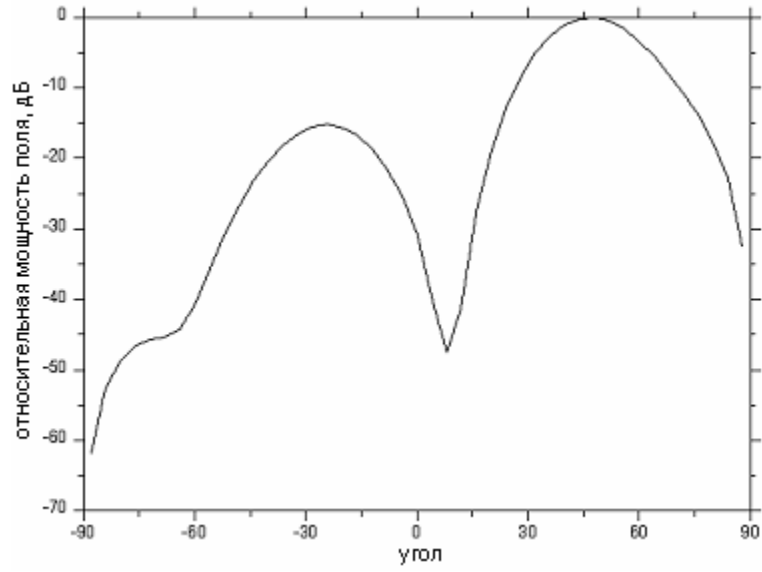


Рис.5. Частота 40 ГГц, угол падения 45°.

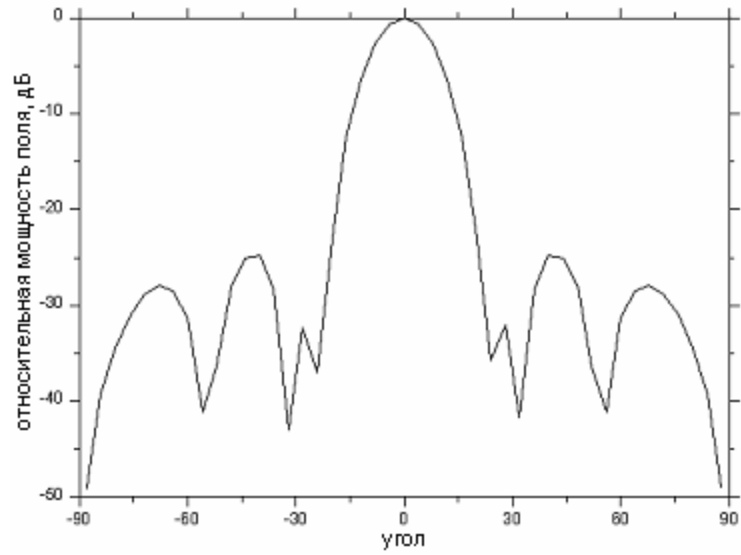


Рис.6. Частота 50 ГГц, угол падения 0°.

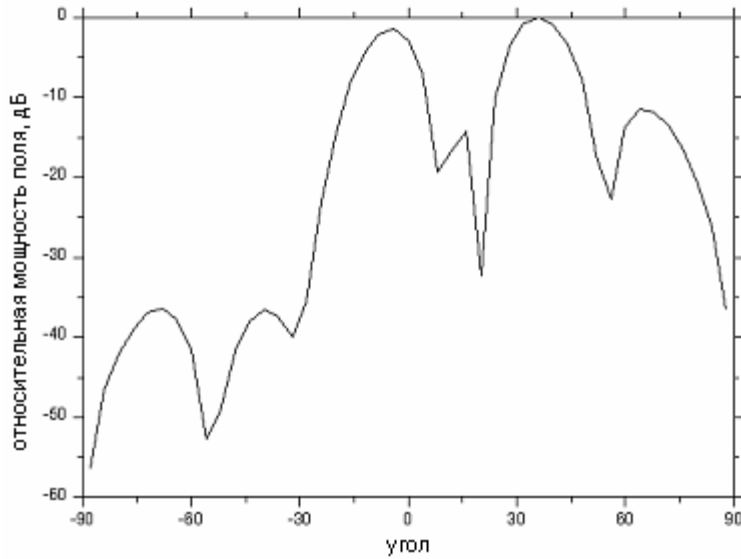


Рис.7. Частота 50 ГГц, угол падения 45°.

На рис.8 изображено поведение диаграммы направленности вблизи направления вдоль подложки при значениях относительной диэлектрической отрицательности близких к 1. Как видно из рисунка, при мало отличающихся от единицы значениях ϵ^- поле стремится к нулю при угле, стремящемся к 90° значительно медленнее, чем при $\epsilon^- = 1$ (фактическое отсутствие диэлектрической подложки). Это иллюстрирует наличие поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы вакуум/диэлектрик при наличии подложки.

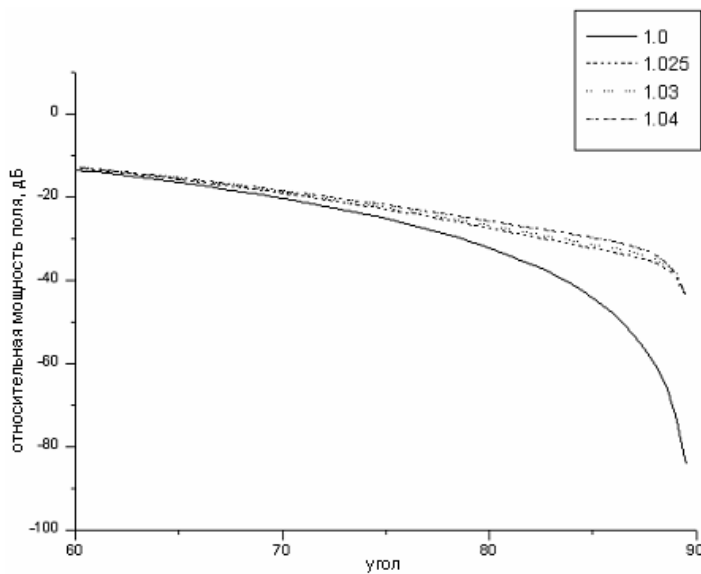


Рис.8. Поведение диаграммы направленности вблизи горизонтального направления при ϵ^+ , близких к 1.

6. Выводы и дальнейшее развитие метода

В данной работе метод дискретных особенностей был применен для построения математической модели задачи дифракции плоских монохроматических волн на идеально проводящей предканторовой полосковой антенне, нанесенной на экранированную диэлектрическую подложку. Показано, что метод эффективен для подобного рода задач и позволяет получать результаты с достаточно точностью при использовании небольшого числа уравнений и времени вычислений. В ближайшем будущем планируется развить изложенный подход для моделирования многослойных решеточных структур в слоистой среде, а также для моделирования дифракции на неидеально проводящих решетках из резистивных диэлектрических и импедансных лент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1973. – 287 с.
2. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наукова думка, 1984. – 240 с.
3. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – М.: Изд-во АН СССР. – 1981. – № 124. – С. 166-183.
4. Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. // Электромагнитные явления. – 1998. – т. 1, № 2. – С. 220-232.
5. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках // Дифференциальные уравнения. – 2003. – т.39, № 9 – С.1229-1239.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: Изд-во ХНУ, 2001. – 92 с.
8. Gandel Yu.V. Parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ*04), Dnipropetrovsk, 2004, pp. 57-62.
9. Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках. // Электромагнитные явления. – 1998. – т. 1, № 4. – С. 455-464.
10. Антоненко А.В. Метод дискретних вихорів у задачі дифракції електромагнітних хвиль на передфракціальних структурах // Десята Міжнародна конференція ім. Академіка М. Кравчука, 13-15 трав. 2004 р., Київ: Матеріали конф. – К.: Задруга, 2004. – С. 20.