Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 703, 2005, с. 50-66

УДК 519.6

Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями

Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков
Днепропетровский национальный университет, Украина

Most of numerical methods are not applicable for analysis of disturbances less, than discretization parameters. In the present paper the solutions of such problems are searched as a series with respect to small parameter, which is the reference scale of the disturbance. The following solutions of relevant elliptical boundary-value problems are made by boundary element method. Small domain shape disturbances, boundary condition disturbances and fundamental solution disturbances are considered. Due to high accuracy of the boundary element method the proposed approach is enough effective, what was proved by numerical experiments

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В настоящее время интенсивное развитие микроэлектроники, микромеханики и биотехнологий делает весьма актуальной проблему малых возмущений, то есть проблему определения влияния эффектов, которыми раньше пренебрегали из-за малости их характерных параметров или малости области действия. Не останавливаясь подробно на физических аспектах подобных задач, отметим только, что в механике сплошной среды и теории тепломассообмена сформировалось отдельное направление, названное «многомасштабные явления» (термин является прямым переводом с английского «multiscale phenomena» и, может быть, не совсем удачен). Традиционно в механике многофазных сред пользовались разного рода приемами осреднения, обзор которых можно найти, например, в монографии [1]. Однако в последнее время все чаще стали прибегать к прямому моделированию малых эффектов и разработке соответствующих численных методов на основе лагранжевых [2, 3] и эйлеровых [4] подходов. Эта же идея была распространена на метод граничных элементов [5] и, естественно, стимулировала интерес к возможности учета малых возмущений в методе граничных элементов.

2. Истоки исследования авторов

В теории численных методов существует устоявшаяся точка зрения на проблему малых возмущений, которая сводится к тому, что так называемые подсеточные эффекты в рамках численного метода не могут быть проанализированы. Этот тезис явно и очевидно сформулирован для эйлеровых, преимущественно сеточных подходов и неявно, с трудом прослеживается для лагранжевых, преимущественно бессеточных подходов (последняя трудность скорее терминологическая – сетки нет, а подсеточные эффекты есть, в этом случае правильнее было бы называть такие эффекты мелкомасштабными).

Указанный тезис приводит к очевидному выводу: чем меньший эффект следует исследовать, тем более подробную дискретизацию следует ввести. Такой подход привел даже к развитию специального направления в численных методах – многосеточных методов.

Хотя идея использовать методы теории возмущений и асимптотические разложения при построении численных алгоритмов, вообще говоря, достаточно очевидна и упоминалась во многих книгах [6-8], она не получила достаточного развития, по-видимому, из-за трудностей с доказательством сходимости асимптотических разложений и из-за того, что фактически сводила сформулированную краевую задачу к последовательности других краевых задач, что явно малоэффективно. В результате, быстрый прогресс численных методов оставил данную идею невостребованной. Не останавливаясь подробно на истории и тенденциях развития численных методов, поскольку это требует отдельного анализа, отметим только, что в настоящее время появились высокоточные численные методы, среди которых следует выделить численные методы теории потенциала, например, метод граничных элементов, метод дискретных вихрей и разного рода их модификации [2, 3, 9, 10]. Специальные алгоритмы метода граничных элементов могут обеспечить исключительно высокую точность решения линейных эллиптических задач [11, 12].

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Целью настоящей работы является применение асимптотических разложений по малому параметру совместно с численным методом, в данном случае методом граничных элементов, для анализа малых возмущений в эллиптических задачах. Основная идея данного подхода достаточно очевидна и основывается на хорошо известном факте – для метода высокого порядка точности погрешность результатов применения метода оказывается много меньшей, нежели погрешности исходных аппроксимаций. Этот факт установлен как теоретически [7], так и экспериментально [11, 12] для ряда численных методов. Пусть в параметры, определяющие краевую задачу (в настоящей статье имеется в виду эллиптическая краевая задача, но данный подход может быть применен к краевой задаче любого типа), внесено возмущений $\varepsilon f(x)$, где ε – малая величина, $f \sim 1$ – некоторая функция от координат x (в общем случае от независимых переменных, в которых задача определена, как непосредственно, так и в виде нелинейности). Тогда будем отыскивать решение краевой задачи и в виде следующего ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \qquad (3.1)$$

Традиционно в асимптотических методах функции u_i определялись аналитически. Как сказано выше, идея настоящей работы заключается в том, чтобы определить u_i при помощи численного метода, в частности, метода граничных элементов, который считается наиболее точным для эллиптических задач, здесь рассматриваемых. В классических численных методах для решения данной возмущенной задачи требовалось бы произвести дискретизацию таким образом, чтобы погрешность дискретизации $\delta < \varepsilon$, а желательно $\delta << \varepsilon$. Обозначим погрешность численного определения функции u_0 через Δ (как будет показано ниже, как правило, все функции u_i удовлетворяют аналогичным краевым задачам, поэтому следует ожидать, что все эти функции будут определены примерно с той же самой погрешностью Δ). Для современных численных методов, по меньшей мере, $\Delta < \delta$, а как правило, $\Delta << \delta$. Полагая функцию u, ограниченной и дополнительно полагая для простоты $u_1 \sim u_0$ (что, вообще говоря, необязательно), получим, что применение разложения (3.1) позволяет снизить требования к параметрам дискретизации до $\delta > \varepsilon > \Delta$, то есть, весьма существенно.

Замечание. Обоснованием предложенного подхода может служить доказательство сходимости ряда (3.1), однако, как и для большинства асимптотических разложений, доказать этот факт очень сложно и, по-видимому, в общем виде невозможно, поэтому примем в качестве обоснования метода результаты численных экспериментов на тестовых задачах, что, конечно, не может считаться строгим обоснованием.

Поставленная выше задача вплотную примыкает к известной проблеме чувствительности численного метода к малым возмущениям. Чувствительность здесь понимается как изменение результатов вычислений после внесения в задачу малых возмущений. Иногда под чувствительностью понимают производную изменения решения по возмущению, но, поскольку в настоящей работе основной интерес представляет пороговая чувствительность, то есть, предельный случай, когда определение такой производной затруднительно, то и использование определения чувствительности как производной представляется нецелесообразным. Далее в настоящей работе будет проведено исследование пороговой чувствительности метода граничных элементов, хотя полный анализ чувствительности метода требует отдельного исследования и в цели данной работы не входит (первые попытки такого исследования были предприняты в работе [13]). Для исследования чувствительности и анализа влияния малых возмущений принципиальное значение имеет методика тестирования программ и алгоритмов.

4. Методика тестирования граничноэлементных программ

Методика тестирования программного обеспечения представляется исключительно важным моментом разработки, на который, как правило, не обращают должного внимания. Однако, правильная методика тестирования может вскрыть ряд свойств алгоритма, которые вообще не изучались в теоретических исследованиях. Общие вопросы тестирования программного обеспечения рассмотрены в книге [14].

Тестирование программ, предназначенных для численного решения задач теории потенциала, отличается рядом специфических аспектов, поскольку сами алгоритмы имеют весьма специфические особенности, например, полностью заполненные матрицы систем линейных алгебраических уравнений, сильная зависимость погрешности метода от формы области.

Рассмотрим методику тестирования метода граничных элементов. Как показано в работе [11], основной вклад в погрешность метода вносит аппроксимация границы области решения, однако эту погрешность легко можно исключить, равно как и погрешность, вызванную аппроксимацией функций, известных из граничных условий. Объединим оба эти вида погрешности одним термином – устранимая погрешность. (Поскольку интеграл по реальной границе приходиться определять численно, определенная погрешность вычисления интегралов, включающих функции, известные из граничных условий, все-таки остается, но благодаря современным возможностям численного интегрирования погрешность эту можно уменьшить до достаточно малой величины.) Сформулируем первое правило тестирования, относящееся к устранимой погрешности. Для анализа устранимой погрешности необходимо сравнить результаты расчета на различных граничноэлементных сетках. Например, очень удобно уменьшить в два раза размер граничного элемента. Если погрешность аппроксимации границы исключена, измельчение сетки можно заменить применением интегрирования выражений, содержащих известные граничные функции, по более точным квадратурным формулам. Отметим также, что в ряде случаев, в том числе и в случае исключения погрешности аппроксимации границы, коэффициенты при неизвестных произволах, входящих в аппроксимацию неизвестных граничных функций, приходится определять численно, то есть, вносится определенная погрешность, которая по форме влияния на общую погрешность близка к погрешности аппроксимации границы, но, как правило, много меньше ее. Для исследования роли указанной погрешности также можно предложить как пересчет на удвоенной граничноэлементной сетке, так и применение более точных квадратурных формул. К сожалению, все три указанных вида погрешности входят в итоговую погрешность метода не напрямую, а после решения системы линейных алгебраических уравнений, а при увеличении числа граничных элементов собственная погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений растет, то есть, непосредственный вклад рассматриваемых видов погрешности можно оценить только качественно на основе тенденций изменения (если при решении системы линейных алгебраических уравнений определяется число обусловленности, то в первом приближении рост погрешности, связанной с решением системы линейных алгебраических уравнений при увеличении числа граничных элементов, можно оценить по отношению чисел обусловленности матриц).

Замечание. В настоящее время широкое распространение получили системы аналитического программирования, которые позволяют производить операции дифференцирования и интегрирования аналитически, то есть, без погрешности. Если алгоритм метода граничных элементов реализован в подобной системе, то три вышеназванных вида погрешности (погрешность аппроксимации границы, погрешность вычисления интегралов, содержащих известные из граничных условий функции, погрешность вычисления интегралов, входящих в коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений) могут быть исключены полностью, то есть, в системах аналитического программирования все эти три вида погрешности должны быть отнесены к устранимой погрешности.

Наиболее сложным моментом тестирования граничноэлементных комплексов является определение вклада погрешности, связанной с аппроксимацией неизвестных функций. Повышение порядка аппроксимации «портит» свойства матрицы системы, вплоть до нарушения принципа диагонального преобладания в матрице системы. Чтобы отделить непосредственный эффект аппроксимации неизвестных функций от суммарной погрешности, возникающей при решении полной задачи, введем понятие внутренней погрешности метода. Пусть u – некоторая функция, удовлетворяющая рассматриваемому дифференциальному уравнению, используем функцию u как тестовое решение, тогда легко получить необходимое граничное выражение для функции u, соответствующее типу граничных условий актуальной задачи. Подставим в интегральное представление для функции u вместо неизвестных (по граничным условиям актуальной задачи) функций аппроксимации этих функций для u, полученные согласно применяемого алгоритма, (другие источники ошибки метода, в частности, устранимая погрешность также включаются в рассмотрение согласно применяемого алгоритма). Разность между аналитическим решением u и полученным указанным образом приближенным значением u в заданном наборе точек называется внутренней погрешностью метода. Сформулируем второе правило тестирования. Чтобы оценить погрешность, вносимую на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, следует сравнить погрешность метода с внутренней погрешностью метода для одной и той же тестовой задачи в одном и том же наборе точек.

Назовем тривиальной тестовой задачей тестовую задачу, для которой аппроксимирующие функции метода совпадают по виду с искомой функцией, например, для уравнения Лапласа в качестве тестовой выбрана линейная функция, тогда при аппроксимации неизвестной функции на граничном элементе линейной, квадратичной функцией или полиномом более высокого порядка такая тестовая задача будет тривиальной. Сформулируем третье правило тестирования. Наиболее явно погрешность, вносимая на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, наблюдается при сравнении погрешности метода с внутренней погрешностью метода для тривиальной тестовой задачи. Действительно в этом случае погрешность аппроксимации неизвестных функций будет минимальна (собственно погрешность будет отсутствовать, а ее роль сыграет погрешность вычисления соответствующих интегралов, которую можно уменьшать, повышая точность квадратурной формулы), поэтому решение тривиальной тестовой задачи можно считать решением без погрешности аппроксимации неизвестных функций. С другой стороны, для данного варианта алгоритма, для того же типа граничных условий, в той же области тривиальная тестовая задача имеет ту же матрицу, что и любая актуальная задача. Однако, невозможно сделать полное заключение о характере погрешности метода, основываясь только на тривиальных тестовых задачах.

Погрешность метода граничных элементов существенным образом зависит от выбора набора точек, в которых она определяется. Общая закономерность в этом вопросе такова – чем ближе граница, тем больше погрешность, на границе погрешность максимальна, эта закономерность является естественным следствием принципа максимума, но имеет место также и для задач, для которых не выполняется принцип максимума. Сформулируем четвертое правило тестирования. Выбор набора точек, в которых анализируется погрешность, определяется множеством точек, в которых должно быть получено решение актуальной задачи.

Отметим, что выбор формы оценки погрешности также определяется требованиями актуальной задачи, но в методе граничных элементов кроме традиционных среднеквадратичных и максимальных норм погрешности, может быть введена еще интегральная норма погрешности

$$\|\delta\| = \int_D \rho(x)(u - \vec{u})dx\,, \qquad (4.1)$$

где u – точное решение, $\vec{u}$ – приближенное, $\rho(x)$ – весовая функция.

Введение нормы (4.1) возможно, поскольку формально $\vec{u}$ – функция, заданная в аналитическом виде. Варьирование функции ρ позволяет более точно удовлетворить критериям актуальной задачи (но, как правило, выбирается $\rho \equiv 1$).

Погрешность, вносимая на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, в значительной мере зависит от формы области решения и граничноэлементной сетки. В зависимости от выпуклости области, а в случае невыпуклой области в зависимости от отношения «ширины узких мест» к характерному размеру области, погрешность может изменяться в достаточно широком диапазоне (может изменяться даже порядок погрешности). Поэтому сформулируем пятое правило тестирования. Полное тестирование алгоритма обязательно должно включать тестовые расчеты в невыпуклых и многосвязных областях.

Проблема зависимости общей погрешности метода граничных элементов от формы области решения тесно связана с проблемой оптимизации граничноэлементной сетки. В плоском случае построение граничноэлементной сетки с наперед заданными свойствами трудностей не вызывает. Определив общую длину участка границы

$$L_1 = \int_{t_0}^{t_N} h(t)dt, \qquad (4.2)$$

где $h(t)$ – функция формы кривой, t – обобщенная координата. Можно любым образом задать правило построения последовательности длин граничных элементов $S_k, k = \overline{1,N}$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{N} S_k = L, \qquad (4.3)$$

и S_k удовлетворяет некоторому правилу, например, $S_{k+1} / S_k = \beta$ или $S_{k+1} = S_k + \delta_k$. Тогда, если определена «верхняя» граница элемента S_k, то для определения конца $(k+1)$-го элемента S_{k+1} следует численно решить трансцендентное уравнение

$$\int_{t_k}^{t} h(t)dt = S_{k+1}. \qquad (4.4)$$

В пространственном случае дело обстоит намного сложнее и необходимы специальные алгоритмы сгущения сетки. Но даже в плоском случае, основываясь на уравнении (4.4), оптимизировать сетку весьма сложно, поскольку речь идет о минимизации погрешности решения тестовой задачи, определенной на заданном наборе точек и зависящей от N переменных S_k. Задача минимизации такого функционала не представляет принципиальных трудностей, но исключительно трудоемка. Оптимальность же построенной сетки для актуальной задачи можно обосновать лишь эвристическими соображениями, хотя минимизация погрешности, вносимой при решении системы линейных алгебраических уравнений, в этом случае, безусловно, будет достигнута.

5. Проблема погрешности фундаментального решения

Проблема погрешности, вносимой в общую погрешность метода граничных элементов вследствие использования приближенного фундаментального решения (функции Грина), очень мало изучена в настоящее время. Возможны три вида возмущения фундаментального решения (функции Грина):

1) регулярное возмущение, то есть вместо истинного фундаментального решения φ используется фундаментальное решение φ^*, которое связано с решением φ соотношением

$$\varphi^* = \varphi + \alpha f_r, \tag{5.1}$$

где α – малый параметр, f_r – регулярная ограниченная функция;

2) сингулярное возмущение того же типа, то есть

$$\varphi^* = \varphi(1 + \alpha f_r), \tag{5.2}$$

где α – малый параметр, f_r – регулярная ограниченная функция;

в) сингулярное возмущение другого типа, то есть

$$\varphi^* = \varphi + \alpha f_s, \tag{5.3}$$

где α – малый параметр, f_s – сингулярная функция, отличающаяся от φ по виду сингулярности.

Хотелось бы отметить, что в случае чисто граничной регулярной формулировки сингулярные возмущения регуляризируются и сводятся к виду (5.1). К сожалению, в реальных задачах известен только параметр α (а нередко только его порядок), а функции f_r, f_s неизвестны; поэтому представления (5.1)-(5.3) невозможно использовать для анализа погрешностей. Однако можно пойти иным путем, и исследовать поведение решения, предварительно задав функции f_r, f_s, тогда для любой тестовой задачи путем численного эксперимента можно получить влияние погрешности фундаментального решения. Для реальной задачи, в которой используется приближенное фундаментальное решение, полученный таким образом результат укажет лишь возможные пределы погрешности, вызванной неточностью фундаментального решения, а для модельных задач указанный прием является мощным средством экспериментального исследования свойств алгоритма. Если же оценки погрешности фундаментального решения не получены вообще, то, выбирая разные функции f_r или f_s, можно определить общие тенденции изменения погрешности метода в зависимости от возмущения фундаментального решения.

Представления (5.1)-(5.3) при заданных функциях f_2, f_s позволяют провести и теоретическое исследование погрешности. Следуя методу малого параметра, будем отыскивать решение в виде

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots, \tag{5.4}$$

тогда для представления (5.1)

$$\begin{aligned} & c(x_0)(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots) = \\ & = \int_\Gamma (\varphi + \alpha f_r) \frac{\partial (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots)}{\partial n} ds - \\ & - \int_\Gamma (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots) \frac{\partial (\varphi + \alpha f_r)}{\partial n} ds, \end{aligned} \tag{5.5}$$

В силу произвольности параметра α для выполнения равенства (5.5), необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях α :

$$c(x_0) u_0 = \int_\Gamma \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} ds - \int_\Gamma u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \tag{5.6}$$

$$c(x_0) u_1 = \int_\Gamma \left(\varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) ds - \int_\Gamma \left(u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \tag{5.7}$$

$$c(x_0) u_2 = \int_\Gamma \left(\varphi \frac{\partial u_2}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds - \int_\Gamma \left(u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \tag{5.8}$$

…………………………………………………………..

$$c(x_0) u_k = \int_\Gamma \left(\varphi \frac{\partial u_k}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_{k-1}}{\partial n} \right) ds - \int_\Gamma \left(u_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_{k-1} \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \tag{5.9}$$

Очевидно, что u_0 – точное решение, и может быть найдено как решение уравнения (5.6), которое имеет ту же структуру, что и уравнение (5.7), все последующие уравнения имеют аналогичную структуру. Таким образом, соотношения (5.4) и уравнения (5.6)-(5.7) дают оценку погрешности решения, вызванной возмущением фундаментального решения. Заменив (5.1) на

$$\varphi^* = \varphi(1 + \alpha f_r), \tag{5.10}$$

и внеся соответствующие изменения в (5.5)-(5.9), можно получить оценку погрешности по построенному приближенному решению и заданной функции f_r.

Аналогично для (5.2) получим аналог (5.9)

$$\begin{aligned} & c(x_0)(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots) = \\ & = \int_\Gamma (1 + \alpha f_r) \varphi \frac{\partial (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots)}{\partial n} ds - \\ & - \int_\Gamma (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots) \frac{\partial (1 + \alpha f_r) \varphi}{\partial n} ds, \end{aligned} \tag{5.11}$$

из (5.11) по аналогичным соображениям имеем

$$c(x_0)u_0 = \int\limits_{\Gamma} \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} ds - \int\limits_{\Gamma} u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \tag{5.12}$$

$$c(x_0)u_1 = \int\limits_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) ds - \int\limits_{\Gamma} \left(u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \tag{5.13}$$

$$c(x_0)u_2 = \int\limits_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u_2}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds - \int\limits_{\Gamma} \left(u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \tag{5.14}$$

$$c(x_0)u_k = \int\limits_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u_k}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_{k-1}}{\partial n} \right) ds - \int\limits_{\Gamma} \left(u_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_{k-1} \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \tag{5.15}$$

Отличия системы уравнений (5.12)-(5.15) от системы (5.6)-(5.9) минимальны. Аналогичной будет и система построения для представления (5.3), за исключением вопроса об интегрируемости функции f_s.

6. Тестирование чувствительности алгоритма

Тестирование может разрешить вопрос об устойчивости алгоритма и его чувствительности к возмущениям. Возмущения фундаментального решения, которые представляют собой отдельную проблему, были рассмотрены выше, остальные виды возмущений можно разделить на два основных типа: глобальные и локальные. Кроме того возмущения могут быть внесены в граничные и начальные (если таковые имеются) условия, в форму области и в источниковые члены. Возмущения, вносимые в коэффициенты дифференциального оператора, относятся к возмущениям фундаментального решения. В принципе, возмущения могут быть как сингулярные, так и регулярные, но ограничим данное рассмотрение практически важным случаем малых возмущений. Определим пороговую чувствительность метода к возмущению как величину возмущения, при которой начинает меняться суммарная погрешность решения тестовой задачи. Понятно, что определение величины пороговой чувствительности метода зависит не только от свойств метода, но и от способа определения погрешности, то есть набора точек, в которых погрешность определяется, и использования максимальной, среднеквадратичной или интегральной нормы погрешности. Пороговая чувствительность может существенно отличаться по величине в зависимости от тестовой задачи, для того, чтобы уменьшить разброс значений пороговой чувствительности, желательно использовать нормированные некоторым образом решения тестовых задач. Следует различать пороговую чувствительность к локальным и глобальным возмущениям. Чем меньше по модулю величина пороговой чувствительности, тем лучшим следует считать алгоритм. При анализе эффективности метода следует соотносить пороговую чувствительность с общей погрешностью метода. Пороговая чувствительность определяет необходимую для получения данной точности решения точность задания входных данных задачи, поэтому более эффективным следует считать алгоритм, который при достаточно больших значениях пороговой чувствительности обеспечивает более высокую точность (здесь имеется расхождение в определении лучшего, в смысле более чувствительного, и эффективного алгоритма). Кроме того, пороговая чувствительность по определенному возмущению ограничивает величину ошибки, допустимой при аппроксимации соответствующей функции. Если пороговая чувствительность меньше, чем ошибка аппроксимации, то такой алгоритм следует считать неудачным. Если при определении локальной или глобальной пороговой чувствительности малому возмущению соответствует конечное изменение погрешности, то алгоритм является неустойчивым (это довольно редкое явление). Можно ввести количественный критерий чувствительности (соответственно устойчивости) алгоритма, как численно определенную производную суммарной погрешности по возмущению. Сформулируем шестое правило тестирования. Для нескольких тестовых задач должна быть определена пороговая чувствительность алгоритма, как и для суммарной погрешности метода, так и для внутренней погрешности метода, для малых локальных и глобальных возмущений граничных условий, формы области, источниковых членов и начальных условий, полученные результаты необходимо сравнить с ошибками, вносимыми соответствующими аппроксимациями. Если метод граничных элементов используется как часть вычислительного процесса, то параметры шагов внешнего вычислительного процесса должны подбираться так, чтобы изменения входных данных метода граничных элементов хотя бы в несколько раз превышали пороговую чувствительность метода граничных элементов по соответствующему возмущению.

Иногда при исследовании свойств численного метода помимо пороговой чувствительности целесообразно вводить также понятие пороговой корректности. Действительно пороговая чувствительность отражает только изменение суммарной погрешности, но не гарантирует, что такое изменение правильно, поскольку малое возмущение, взаимодействуя с разного рода источниками погрешности метода, может привести к некорректному изменению численного решения. Определим пороговую корректность метода к возмущению как величину возмущения, при которой суммарная погрешность решения тестовой задачи начинает меняться в соответствии с аналитическим решением. Очевидно, что определение пороговой корректности намного сложнее, чем определение пороговой чувствительности, поэтому используется оно намного реже, однако использование его в данной статье представляется целесообразным.

Наконец, рассмотрим вопрос об эффективности метода, то есть о затратах ресурсов ЭВМ, в первую очередь, машинного времени, для получения решения тестовой задачи с нужной точностью. Следует отметить, что эффективность алгоритма помимо свойств собственно алгоритма зависит еще и от типа ЭВМ, используемого программного обеспечения и стиля программирования. Несмотря на очевидный принцип: максимальную точность за минимальное время, в определении эффективности много субъективного, прежде всего в том, какое увеличение затрат ресурсов ЭВМ приемлемо для достижения заданного увеличения точности. Поэтому для определения эффективности невозможно сформулировать какое-либо строгое правило, и следует исходить из требований, которые сформулированы явно или неявно при постановке актуальной задачи, например, допустимые затраты машинного времени, возможность использования оперативной памяти и дискового пространства ЭВМ и так далее, а с другой стороны требований к точности искомого решения. Надо отметить, что в конкретных областях вычислительной механики и прикладной математики в целом сформировались более устойчивые критерии эффективности алгоритмов, основанные на особенностях решаемых задач. Не вдаваясь в подробности, отметим, что метод граничных элементов высоко эффективен практически для всех линейных эллиптических задач. Упомянутые трудности в определении эффективности не снимаются при теоретическом определении эффективности, основанном на теоретической оценке количества арифметических операций, необходимых для выполнения расчета. Хотя такие оценки не зависят от конкретной программной реализации, зачастую они весьма далеки от результатов реальных расчетов вследствие использования очень грубых оценок. Тем не менее, для полноты тестирования алгоритма обязательно надо включить некоторую оценку его эффективности на различных сетках, или хотя бы указать затраты машинного времени.

В заключение еще раз хотелось бы подчеркнуть, что результаты тестирования не дают доказанных оценок точности и не могут гарантировать точность решения актуальной задачи, но тестирование на правильно подобранном наборе тестовых задач может служить основой для выработки практических рекомендаций и повышает достоверность результатов численного решения актуальной задачи.

7. Другие виды возмущений

Наибольший интерес при решении прикладных задач вызывают не возмущения фундаментальных решений, а возмущения формы границы области решения и граничных условий. В традиционных дифференциальных постановках анализ малых возмущений граничных условий в линейных задачах не составляет особого труда и сводится к простому разложению возмущения граничного условия в ряд по малому параметру с последующим применением обычной процедуры метода малого параметра. То есть, различия между применением асимптотических методов для анализа малых возмущений граничных условий в дифференциальной и интегральной формулировках невелики. В то же время, в дифференциальной формулировке крайне затруднительно анализировать возмущение формы области решения, а в интегральной формулировке, как будет показано ниже, такой анализ немногим сложнее анализа возмущения граничных условий.

Пусть заданы невозмущенное, в смысле возмущения границы (7.1) и возмущенное (7.2) граничные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_\Gamma \frac{\partial u(x, y)}{\partial n}\varphi_0(x, x_0, y, y_0)ds(x, y) - \\ - \int_\Gamma u(x, y)\frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n}ds(x, y), \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$
\begin{aligned}
c(x_0, y_0)u^*(x_0, y_0) &= \int_\gamma \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n^*}\varphi_0(x, x_0, y, y_0)ds^*(x, y) - \\
&- \int_\gamma u^*(x, y)\frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n^*}ds^*(x, y).
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

Целью в данной задаче является установление связи между этими уравнениями, если возмущение известно и может быть представлено в виде

$$\varepsilon f(x, y),$$

где ε – некоторый малый параметр, f – некоторая, по меньшей мере, кусочно-непрерывная функция порядка $O(1)$.

Возмущения границы области решения и граничных условий могут быть включены в уравнение (7.2). Тогда представим функцию формы возмущенной границы в виде следующего разложения в ряд

$$h^*(t) = h^{*0}(t) + \varepsilon h^{*1}(t) + \varepsilon^2 h^{*2}(t) + \cdots + \varepsilon^k h^{*k}(t) + \cdots, \tag{7.3}$$

где t – внутренний параметр кривой (в простейшем случае он совпадает с длиной кривой s). Аналогичным образом представим и граничные значения искомой функции и ее нормальной производной (возмущение которых может быть следствием возмущения границы или иметь иную, отдельную причину)

$$u^*(t) = u^{*0}(t) + \varepsilon u^{*1}(t) + \varepsilon^2 u^{*2}(t) + \cdots + \varepsilon^k u^{*k}(t) + \cdots, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial n} = \frac{\partial u^{*0}(t)}{\partial n} + \varepsilon\frac{\partial u^{*1}(t)}{\partial n} + \varepsilon^2\frac{\partial u^{*2}(t)}{\partial n} + \cdots + \varepsilon^k\frac{\partial u^{*k}(t)}{\partial n} + \cdots. \tag{7.5}$$

После подстановки представлений (7.3)-(7.5) в уравнение (7.2) получим

$$
\begin{aligned}
& c(x_0, y_0)(u^{*0}(x_0, y_0) + \varepsilon u^{*1}(x_0, y_0) + \varepsilon^2 u^{*2}(x_0, y_0) + \cdots) = \\
&= \int_\gamma \{\frac{\partial(u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \cdots)}{\partial n}\varphi_0(x, x_0, y, y_0) \times \\
&\times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^1 h^{*2}(x, y) + \cdots)\}ds(x, y) - \\
&- \int_\gamma (u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \cdots)\frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} \times \\
&\times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^1 h^{*2}(x, y) + \cdots)\}ds(x, y).
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

Как и ранее, поскольку параметр ε, вообще говоря, произвольный, то чтобы уравнение (7.6) выполнялось при любом значении параметра ε, следует потребовать равенства коэффициентов при каждой степени параметра ε, в результате нулевое приближение имеет вид

$$
\begin{aligned}
c(x_0, y_0)u^{*0}(x_0, y_0) &= \int_\Gamma \frac{\partial u^{*0}(x, y)}{\partial n}\varphi_0(x, x_0, y, y_0)h^{*0}(x, y)ds(x, y) - \\
&- \int_\Gamma u^{*0}(x, y)\frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n}h^{*0}(x, y)ds(x, y).
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Интегрирование в уравнении (7.7) выполняется вдоль невозмущенной границы Γ, поскольку h^{*0} совпадает с функцией формы невозмущенной границы. Отметим, что нулевое приближение (7.7) фактически совпадает с невозмущенным уравнением (7.1). Первое приближение имеет вид

$$
\begin{aligned}
&c(x_0, y_0)u^{*1}(x_0, y_0) = \\
&= \int_\gamma \left(\frac{\partial u^{*0}(x,y)}{\partial n} h^{*1}(x,y) + \frac{\partial u^{*1}(x,y)}{\partial n} h^{*0}(x,y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x,y) - \\
&- \int_\gamma \left(u^{*0}(x,y) h^{*1}(x,y) + u^{*1}(x,y) h^{*0}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x,y).
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Тут следует провести различия между возмущенной γ и невозмущенной Γ кривыми. После подстановки в интеграл функции формы указание этих кривых означает лишь изменение пределов интегрирования, и, если эти пределы совпадают, а это лишь вопрос техники описания кривой, то возмущенная и невозмущенная кривая в этом смысле уже неразличимы. Умножив и разделив подынтегральные выражения на h^{*0} и сгруппировав сомножители, можно формально перейти к интегрированию по невозмущенной кривой Γ.

Если u^{*0} известно, пусть даже приближенно, из решения уравнения (7.7), то соотношение (7.8) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно u^{*1} (если $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$ известно из граничных условий) или $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$ (если u^{*1} известно из граничных условий). Таким образом, уравнение (7.8) также подобно уравнению (7.1) (за исключением неоднородного члена).

Наконец, сформулируем m-ое уравнение:

$$
\begin{aligned}
&c(x_0, y_0)u^{*m}(x_0, y_0) = \\
&= \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial u^{*k}(x,y)}{\partial n} h^{*m-k}(x,y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x,y) - \\
&- \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{m} (u^{*k}(x,y) h^{*m-k}(x,y) \right) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x,y).
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Все заключения, сделанные для граничных интегральных уравнений (7.7) и (7.8) справедливы для граничного интегрального уравнения (7.9).

Очевидно, что случай малых возмущений граничных условий является частным случаем возмущения границы. Действительно, если граница области не была возмущена, то в разложение (7.3) все члены, начиная с члена первого порядка, равны 0, и это разложение вырождается в простое тождество. Однако разложения (7.4) и (7.5) формально никак не связаны с возмущением границы, поэтому в них может быть учтено возмущение граничных условий. Соответствующая последовательность граничных интегральных уравнений может быть получена из последовательности (7.7)-(7.9) занулением слагаемых, связанных с возмущением границы области решения.

8. Анализ полученных результатов

Основываясь на описанной выше методике тестирования программ, были произведены тестовые расчеты. В качестве тестовой была выбрана задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{8.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = g(x, y). \tag{8.2}$$

В качестве тестовых были выбраны следующие гармонические функции

$$u_1(x, y) = (x + y)/2, \tag{8.3}$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2, \tag{8.4}$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos\ y, \tag{8.5}$$

определенные в квадрате $(0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1)$ или круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Очевидно, что полное исследование рассматриваемых алгоритмов по описанной выше схеме достаточно трудоемко и не может быть выполнено в ограниченных рамках настоящей работы. Например, при использовании метода граничных элементов нулевого порядка точности (то есть, аппроксимации известных и неизвестных величин на граничном элементе постоянными величинами), который применялся в данной работе, ни для одной из приведенных тестовых функций нельзя сформулировать тривиальную тестовую задачу. Определение внутренней погрешности метода также не представляется необходимым, хотя для определенных случаев глобальных возмущений оно может быть выполнено без труда.

Ситуация осложняется тем, что, если для глобального возмущения тестовая функция подбирается элементарно для любой формы области, например, в виде

$$u(x, y) = u_i + \varepsilon\, u_j, \tag{8.6}$$

где функции в правой части (8.6) определены соотношениями (8.3)-(8.5), то для локального возмущения граничных условий тестовую задачу можно построить только в области, для которой известны достаточно простые выражения функций Грина, то есть, круга, полосы, полуполосы. Что же касается возмущения формы области, то подобрать в этом случае корректную тестовую задачу достаточно сложно из-за необходимости определять и возмущения граничных условий.

Все, приведенные ниже, расчеты были выполнены в единичном квадрате с использованием сетки 50×50 граничных элементов нулевого порядка, при этом максимальная погрешность метода для основной тестовой функции, определенной (8.5), равномерно расположенных узлах сетки внутри области составила 0.68023800E-05, а среднеквадратичная погрешность 0.23669210E-07.

В таблице 1 приведены результаты расчетов при помощи предложенного метода тестовой задачи Дирихле для функции (8.6) в случае глобального возмущения граничных условий. В этом случае отклик на возмущение может быть определен аналитически. Очевидно, что приведенные величины ошибок отклика соответствуют теоретически ожидаемым значениям. Как только величина возмущения оказывается сравнимой с погрешностью метода граничных элементов, использовавшегося для решения краевых задач, относительная ошибка определения отклика начинает резко возрастать. В таблицах 2 и 3 приведены результаты расчетов локальных возмущений граничных условий для классического метода граничных элементов и алгоритма, предложенного в данной статье. Очевидно, что предложенный алгоритм оказался чувствительнее к возмущениям.

Табл.1.Глобальное возмущение граничных условий. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

Возмущение	Максимум отклика	Среднеква-дратичный отклик	Максимум ошибки отклика	Среднеква-дратичная ошибка отклика
.100000E-01	.2662778E-01	.3169073E-03	.1472421E-05	.7365684E-08
.999999E-03	.2662659E-02	.3169046E-04	.1393026E-05	.7268259E-08
.999999E-04	.2665520E-03	.3169177E-05	.1502704E-05	.7467075E-08
.999999E-05	.2694130E-04	.3172049E-06	.1623745E-05	.7217615E-08
.999999E-06	.3337860E-05	.3232388E-07	.1187220E-05	.5772337E-08
.999999E-07	.1072884E-05	.5991153E-08	.9698707E-06	.4077066E-08
.999999E-08	.9536743E-06	.4546245E-08	.9397531E-06	.4327189E-08

Табл.2. Локальное возмущение граничных условий. Расчет произведен методом граничных элементов.

Возмущение	Максимум отклика	Среднеквадра-тичный отклик
.10000000E-01	.25033280E-02	.22570830E-05
.99999990E-03	.25025760E-03	.22577660E-06
.99999990E-04	.24951990E-04	.23158120E-07
.99999990E-05	.24735930E-05	.56874050E-08
.99999990E-06	.95367430E-06	.49376350E-08
.99999990E-07	.83446500E-06	.44488610E-08
.99999990E-09	.00000000	.00000000

Табл.3. Локальное возмущение граничных условий. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

Возмущение	Максимум отклика	Среднеквадра-тичный отклик
.10000000E-01	.25033360E-02	.22570510E-05
.99999990E-03	.25033370E-03	22570500E-06
.99999990E-05	.25033360E-05	.22570480E-08
.99999990E-06	.28370880E-06	.29762680E-09
.99999990E-07	.25033370E-07	.22570560E-10
.99999990E-08	.25033380E-08	.22570530E-11

Таблицы 4 и 5 содержат аналогичные результаты для случая возмущения границы области решения. Как и ранее, предложенный алгоритм оказался чувствительнее к возмущениям.

Табл.4. Локальное возмущение границы. Расчет произведен методом граничных элементов.

Возмущение	Максимум отклика	Среднеквадратичный отклик
.10000000E-01	.78861560E-02	.78465500E-05
.99999990E-03	.29973690E-03	.29012160E-06
.99999990E-04	.23178760E-04	.33003970E-07
.99999990E-05	.70855020E-05	.23870020E-07
.99999990E-06	.68880620E-05	.23678410E-07
.99999990E-07	.68284570E-05	.23644730E-07

Табл.5. Локальное возмущение границы. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

Возмущение	Максимум отклика	Среднеквадратичный отклик
.10000000E-01	.71920044E-02	.72663500E-05
.99999990E-03	.28376910E-03	.28333180E-06
.99999990E-04	.23447680E-04	.33310090E-07
.99999990E-05	.69143420E-05	.13956750E-07
.99999990E-06	.11147700E-05	.78645340E-08
.99999990E-07	.68145870E-06	.69585622E-08

9. Выводы

В настоящей работе предложен комбинированный алгоритм методов малого параметра и граничных элементов. Выше показана эффективность применения предложенного подхода для анализа малых возмущений. Показано, что точность, достигаемая при помощи предложенного алгоритма намного выше, нежели точность классического метода граничных элементов и достаточна для многих практических целей. Таким образом, данная работа имеет методическое значение для проведения инженерных расчетов.

Научная новизна данной работы заключается в предложенном подходе к численному исследованию малых возмущений и других малых эффектов.

Перспективы развития данной работы, как и возможности использования ее результатов, достаточно очевидны, и заключаются в применении предложенного подхода для построения эффективных расчетных схем с их дальнейшим применением в различных областях науки и техники. В первую очередь результаты настоящей работы представляют интерес для построения численных алгоритмов гидродинамики и тепломассообмена в многофазных средах, механики композитных материалов, микроэлектроники, однако, учитывая универсальный характер предложенного похода, он может быть использован и в других областях, например, микробиологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред, - М.: Наука, 1987. – ч. 1 – 464с., ч. 2 – 360с.
2. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров П. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел, - М.: Наука, 1988. – 309с.
3. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей, - М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. – 368с.
4. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков, - М.: Мир, 1990. – 660 с.
5. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to some multiphase flows // Continuum Models and Discrete Systems. NATO Science Series. II. Mathematics, Physics and Chemestry – Vol. 158. D.J. Bergman, E. Inan (Ed.). Kluwer Academic Publishers, 2004 – P. 181-182
6. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, том 1. - М.: Изд-во иностранной лит., 1958. – 930 с., том 2. - М.: Изд-во иностранной лит., 1960. – 886 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 576с.
8. Бабенко К. И. Основы численного анализа, - М.: Наука, 1986. – 744с..
9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках, - М.: Мир, 1984. – 494с.
10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов, - М.: Мир, 1987. – 524с.
11. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов. // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. Випуск 2. Том 1. – Днепропетровск, 1999. – С. 150-156.
12. Бевза Э. К., Евдокимов Д. В. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - Херсон, 2001 – С. 51-55.
13. Yevdokymov D. V. Comparison of Numerical Method Sensitivity by Numerical Experiment // Annual Scientific Conference GAMM 2004, Dresden 2004. – p. 249.
14. Ван Тассел Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ, - М.: Мир, 1985. – 332с.