Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517+681
№ 703, 2005, с.87-94

Моделирование составных поверхностей в системах символьной математики

П. Г. Доля
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The method of compiling of uniform analytic formulas for the equations of the continuous surfaces composed of various sections with the given equations is proposed. The general equation of a piecewise-ruled surface stretched on a frame consisting of a set of not intersected space curves constructs.

1. Введение

При расчете и проектировании конструкций, составленных из элементов сложной геометрической формы, возникает задача строгого математического описания контуров их поверхностей. Один из подходов, применяемых в САПР и системах символьной математики, состоит в использовании множества графических примитивов. Однако он плохо приспособлен для использования в расчетах. Конструктивный математический подход к решению этой задачи был предложен В. Л. Рвачевым [1,2], который дал метод построения неявных уравнений составных чертежей. Еще один подход к решению этих задач дает теория сплайнов [3,4]. В работах автора [5,6] предложен способ математического описания составных кривых и приведены общие формулы для построения явных и параметрических уравнений кусочно-гладких непрерывных функций и кривых. В настоящей работе этот метод применяется для построения единых аналитических выражений для уравнений составных поверхностей. Выводятся также общие формулы для построения единых аналитических уравнений кусочно-линейчатых поверхностей.

В основу предлагаемой методики положено использование введенной в работе [5] функции:

$$P(t,a,w)=\frac{1}{2w}(w+|t-a|-|t-a-w|)\quad (w\neq 0)\,. \tag{1}$$

Функция $P(t,a,w)$ является непрерывной по переменной *t*. При $t<a$ функция равна 0, при $t>a+w$ она равна 1, а внутри интервала $a\le t\le a+w$ функция линейная $\frac{1}{w}(t-a)$ (если w>0).

2. Параметрическое уравнение кусочно-линейчатой поверхности

Пусть дано семейство непересекающихся пространственных криволинейных отрезков с уравнениями $\vec r=\vec r_k(\tau)$, $\tau\in[\tau_0^k,\tau_1^k]$ ($k=0,1,\dots,n$). В каждом из уравнений сделаем замену переменных $\tau = \tau_0^k + \dfrac{\tau_1^k - \tau_0^k}{u_1 - u_0}(u - u_0)$. Получим новые уравнения кривых $\vec{r}_k(u) = \vec{r}_k\left(\tau_0^k + \dfrac{\tau_1^k - \tau_0^k}{u_1 - u_0}(u - u_0)\right)$, в которых параметр u изменяется в одинаковом для всех криволинейных отрезков интервале $[u_0, u_1]$. Соединим прямолинейным отрезком начальные точки соседних криволинейных отрезков и будем его двигать так, чтобы он все время соединял точки, имеющие одинаковые значения параметра *u*. Между каждой парой кривых получим линейчатую поверхность. Эти поверхности стыкуются друг с другом по кривым исходного семейства, образуя некоторую непрерывную кусочно-линейчатую поверхность. Составим параметрическое уравнение этой поверхности.

Положим, что кривые исходного семейства являются координатными линиями *v=const* образованной кусочно-линейчатой поверхности. Назначим каждой кривой значение параметра $v = v_k$ так, чтобы значения v_k образовывали монотонно-возрастающую последовательность. Тогда уравнение кусочно-линейчатой поверхности будет иметь следующий вид:

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}_0(u) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k(u) - \vec{r}_{k-1}(u)\right)P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1}),\ \left(u_0 \le u \le u_1, v_0 \le v \le v_n\right). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\vec{R}(u,v)$ на интервале $v_{p-1} \le v \le v_p$ при некотором фиксированном p $(1 \le p \le n)$. В сумме (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1}) = 1$ при $k<p$, а при $k>p$ $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1}) = 0$. Поэтому (2) принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{R}(u,v) &= \vec{r}_0(u) + \sum_{k=1}^{p-1}\left(\vec{r}_k(u) - \vec{r}_{k-1}(u)\right) + \left(\vec{r}_p(u) - \vec{r}_{p-1}(u)\right)P(v, v_{p-1}, v_p - v_{p-1}) = \\ &= \vec{r}_{p-1}(u) + \left(\vec{r}_p(u) - \vec{r}_{p-1}(u)\right)P(v, v_{p-1}, v_p - v_{p-1})\end{aligned}$$

Учитывая (1) и то, что $v_{p-1} \le v \le v_p$, последнее выражение преобразуется к виду

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}_{p-1}(u) + \left(\vec{r}_p(u) - \vec{r}_{p-1}(u)\right)\frac{v - v_{p-1}}{v_p - v_{p-1}}.$$

Это значит, что на любом отрезке $v_{p-1} \le v \le v_p$, вектор-функция $\vec{R}(u,v)$ представляет уравнение линейчатой поверхности, натянутой между кривыми $\vec{r}_{p-1}(u)$ при $v = v_{p-1}$ и $\vec{r}_p(u)$ при $v = v_p$. Если $v \le v_0$, то в формуле (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ равны нулю, и мы получаем, что $\vec{R}(u,v) = \vec{r}_0(u)$. Если $v \ge v_n$, то в формуле (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ равны единице, и мы получаем, что $\vec{R}(u,v) = \vec{r}_0(u) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k(u) - \vec{r}_{k-1}(u)\right) = \vec{r}_n(u)$. Т.о., выражение (2) дает уравнение непрерывной кусочно-линейчатой поверхности, проходящей последовательно через пространственные кривые $\vec{r}_0(u), \vec{r}_1(u), \ldots, \vec{r}_n(u)$ при

$v = v_0, v_1, ..., v_n$. Фактически кривые семейства $\{\vec{r}_k(u)\}$ являются ребрами образованной поверхности.

Отметим, что с помощью формулы (2) строятся уравнения полной поверхности таких тел как куб, пирамида, конус, уравнение поверхности цилиндра вместе с верхним и нижним основанием и уравнения поверхностей многих многогранников. Например, поверхность куба можно представить как кусочно-линейчатую поверхность натянутую между 4 кривыми. Первой кривой семейства будет точка – центр верхнего основания. Второй – квадрат, образующий контур верхнего основания. Третьей – квадрат, являющийся контуром нижнего основания. Четвертой – точка, лежащая в центре нижнего основания. Для куба с вершинами в точках (1,1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1), (1,-1,-1) параметрическое уравнение поверхности имеет следующий вид

$$x(u,v) = \frac{1}{2}\left(1 - |u| + |u-1| + |u-2| - |u-3|\right) \cdot \left(|v| - |v-1| - |v-2| + |v-3|\right)$$

$$y(u,v) = \frac{1}{2}\left(1 - |u-1| + |u-2| + |u-3| - |u-4|\right) \cdot \left(|v| - |v-1| - |v-2| + |v-3|\right)$$

$$z(u,v) = -|v-1| + |v-2|,$$

при $0 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 3$. Эти уравнения построены по формуле (2) с последующей заменой функций $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ их выражениями (1). Предварительно были составлены параметрические уравнения квадратов (контуров верхнего и нижнего оснований) в соответствии с формулами работы [5].

3. Уравнение составной поверхности

Уравнение составной поверхности, секции которой заданы уравнениями в параметрическом виде. Пусть на плоскости *UV* задана ортогональная сетка $[u_0, u_1, ..., u_n] \times [v_0, v_1, ..., v_m]$ и в ее ячейках $\Delta_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ определены вектор-функции $\vec{r}_{ij}(u,v) = \left(x_{ij}(u,v), y_{ij}(u,v), z_{ij}(u,v)\right)$ (*i=0,1,2,…,n-1, j=0,1,2,…,m-1*), представляющие уравнения некоторых поверхностей. Положим, что для составной поверхности в области $[u_0, u_n] \times [v_0, v_m]$ выполняется условие непрерывности. Т.е. для соседних вектор-функций $\vec{r}_{ij}(u,v)$ выполняются условия $\vec{r}_{ij}(u_{i+1}, v) = \vec{r}_{i+1\,j}(u_{i+1}, v)$ при $v_j \le v \le v_{j+1}$, и $\vec{r}_{ij}(u, v_{j+1}) = \vec{r}_{i\,j+1}(u, v_{j+1})$ при $u_i \le u \le u_{i+1}$. На прямоугольнике $[u_0, u_n] \times [v_0, v_m]$ требуется построить единое аналитическое уравнение поверхности, состоящей из секций с уравнениями $\vec{r}_{ij}(u,v)$ в областях Δ_{ij}.

Составим уравнение каждой секции поверхности в следующем виде

$$\vec{R}_{ij}(u,v) = \vec{r}_{ij}\left(u_i + (u_{i+1} - u_i) P(u, u_i, u_{i+1} - u_i), v_j + (v_{j+1} - v_j) P(v, v_j, v_{j+1} - v_j)\right). \quad (3)$$

Поверхность с этим уравнением $\vec{R}_{ij}(u,v)$ в области прямоугольника $\Delta_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ совпадает с поверхностью, имеющей уравнение $\vec{r}_{ij}(u,v)$ в этой области. Действительно, для любой точки прямоугольника $(u,v) \in \Delta_{ij}$

выполняются следующие соотношения $u_i+(u_{i+1}-u_i)P(u,u_i,u_{i+1}-u_i)=u$, $v_j+(v_{j+1}-v_j)P(v,v_j,v_{j+1}-v_j)=v$ и вектор-функция $\vec{R}_{ij}(u,v)$ совпадает с $\vec{r}_{ij}(u,v)$. Любые значения *(u,v)*, лежащие вне этой области, отображаются в точки границы секции. Например, если $u>u_{i+1}$, $v_j<v<v_{j+1}$, то имеет место $u_i+(u_{i+1}-u_i)P(u,u_i,u_{i+1}-u_i)=u_{i+1}$ и $v_j+(v_{j+1}-v_j)P(v,v_j,v_{j+1}-v_j)=v$. Тогда $\vec{R}_{ij}(u,v)=\vec{r}_{ij}(u_{i+1},v)$, т.е. точка поверхности $\vec{R}_{ij}(u,v)$ находится на границе секции поверхности $\vec{r}_{ij}(u,v)$. Аналогично проверяется, что любые значения $(u,v)\notin\Delta_{ij}$ отображаются в граничные точки секции. Т.о., вектор-функция $\vec{R}_{ij}(u,v)$ представляет параметрическое уравнение *ij*-секции поверхности с краем. Ее можно назвать криволинейной гранью составной поверхности.

Построим единое уравнение поверхности, составленной из секций поверхностей с уравнениями $\vec{R}_{0q}(u,v),\vec{R}_{1q}(u,v),...,\vec{R}_{n-1q}(u,v)$ (*q=0,1,…,m-1*). Для этого сложим уравнения этих секций следующим образом

$$\vec{R}_q(u,v)=\vec{R}_{0q}(u,v)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{iq}(u,v)-\vec{R}_{iq}(u_i,v)\right). \qquad (4)$$

Покажем, что для точек $(u,v)\in[u_p,u_{p+1}]\times[v_q,v_{q+1}]$ имеет место равенство $\vec{R}_q(u,v)=\vec{r}_{pq}(u,v)$. Для этого преобразуем (4) следующим образом

$$\vec{R}_q(u,v)=\vec{R}_{0q}(u,v)+\sum_{i=1}^{p-1}\left(\vec{R}_{iq}(u,v)-\vec{R}_{iq}(u_i,v)\right)+\left(\vec{R}_{pq}(u,v)-\vec{R}_{pq}(u_p,v)\right)+$$
$$+\sum_{i=p+1}^{n-1}\left(\vec{R}_{iq}(u,v)-\vec{R}_{iq}(u_i,v)\right).$$

При *i<p* $\vec{R}_{iq}(u,v)=\vec{r}_{iq}(u_{i+1},v_q+(v_{q+1}-v_q)P(v,v_q,v_{q+1}-v_q))=\vec{R}_{iq}(u_{i+1},v)$ т.к. $P(u,u_i,u_{i+1}-u_i)=1$. При *i>p* имеем $P(u,u_i,u_{i+1}-u_i)=0$ и, следовательно, $\vec{R}_{iq}(u,v)=\vec{r}_{iq}(u_i,v_q+(v_{q+1}-v_q)P(v,v_q,v_{q+1}-v_q))=\vec{R}_{iq}(u_i,v)$. Выражение для $\vec{R}_q(u,v)$ принимает следующий вид

$$\vec{R}_q(u,v)=\vec{R}_{0q}(u_1,v)+\sum_{i=1}^{p-1}\left(\vec{R}_{iq}(u_{i+1},v)-\vec{R}_{iq}(u_i,v)\right)+\left(\vec{R}_{pq}(u,v)-\vec{R}_{pq}(u_p,v)\right)$$

Условия стыковки соседних секций поверхности, имеющие вид $\vec{r}_{iq}(u_{i+1},v)=\vec{r}_{i+1q}(u_{i+1},v)$ ($v_q\le v\le v_{q+1}$), теперь можно записать в форме $\vec{R}_{iq}(u_{i+1},v)=\vec{R}_{i+1q}(u_{i+1},v)$, поскольку $\vec{R}_{ij}(u,v)=\vec{r}_{ij}(u,v)$ для любых точек $(u,v)\in[u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}]$. Поэтому в выражении для $\vec{R}_q(u,v)$ сокращаются все слагаемые, кроме одного. Получаем, что для точек $(u,v)\in\Delta_{pq}$ $\vec{R}_q(u,v)=\vec{R}_{pq}(u,v)=\vec{r}_{pq}(u,v)$. Это значит, что поверхность с уравнением $\vec{R}_q(u,v)$ при $v_q\le v\le v_{q+1}$ на отрезках $u_p\le u\le u_{p+1}$ совпадает с поверхностями соответствующих *pq*-секций.

Поверхность с уравнением $\vec{R}_q(u,v)$ также можно рассматривать как некоторую секцию поверхности. Сложим эти уравнения (4) следующим образом

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}_0(u,v) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(\vec{R}_j(u,v) - \vec{R}_j(u,v_j)\right). \qquad (5)$$

Нас интересует значение этого выражения в точке $(u,v) \in \Delta_{pq}$. Разложим сумму (5) на части.

$$\begin{aligned}\vec{R}(u,v) = \vec{R}_0(u,v) + \sum_{j=1}^{q-1}\left(\vec{R}_j(u,v) - \vec{R}_j(u,v_j)\right) + \left(\vec{R}_q(u,v) - \vec{R}_q(u,v_q)\right) + \\ + \sum_{j=q+1}^{m-1}\left(\vec{R}_j(u,v) - \vec{R}_j(u,v_j)\right)\end{aligned} \qquad (6)$$

Если $j<q$ и $v_q \le v \le v_{q+1}$, имеем $P(v, v_j, v_{j+1} - v_j) = 1$, и для любого $u \in [u_i, u_{i+1}]$ будет $\vec{R}_j(u,v) = \vec{R}_{ij}(u,v) = \vec{r}_{ij}(u_i + (u_{i+1} - u_i)P(u,u_i,u_{i+1} - u_i), v_{j+1}) = = \vec{R}_{ij}(u, v_{j+1})$. Если $q<j$ и $v_q \le v \le v_{q+1}$, имеем $P(v, v_j, v_{j+1} - v_j) = 0$, и для любого $u \in [u_i, u_{i+1}]$ будет $\vec{R}_j(u,v) = \vec{R}_{ij}(u,v) = \vec{r}_{ij}(u_i + (u_{i+1} - u_i)P(u,u_i,u_{i+1} - u_i), v_j) = = \vec{R}_{ij}(u, v_j) = \vec{R}_j(u, v_j)$.

Последняя сумма в выражении (6) обращается в 0, и мы получаем

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}_{p0}(u,v_1) + \sum_{j=1}^{q-1}\left(\vec{R}_{pj}(u,v_{j+1}) - \vec{R}_{pj}(u,v_j)\right) + \left(\vec{R}_{pq}(u,v) - \vec{R}_{pq}(u,v_q)\right) \qquad (7)$$

Отметим, что при выводе последней формулы мы использовали доказанный выше факт, что для любой точки $(u,v) \in \Delta_{ij}$ $\vec{R}_j(u,v) = \vec{R}_{ij}(u,v)$.

Условие стыковки соседних секций $\vec{r}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{r}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$ при $u_i \le u \le u_{i+1}$ можно записать в виде $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$. Действительно, при $u_i \le u \le u_{i+1}$ вектор-функции $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1})$ и $\vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$ совпадают с вектор-функциями $\vec{r}_{ij}(u,v_{j+1})$ и $\vec{r}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$, которые равны. Покажем, что равенство $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$ выполняется и при других значениях *u*. Действительно, для $u < u_i$, $P(u,u_i,u_{i+1} - u_i) = 0$ и мы получаем $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = = \vec{r}_{ij}(u_i + (u_{i+1} - u_i)P(u,u_i,u_{i+1} - u_i), v_{j+1}) = \vec{r}_{ij}(u_i, v_{j+1})$. Аналогично получаем $\vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1}) = \vec{r}_{i\,j+1}(u_i,v_{j+1})$. Но $\vec{r}_{ij}(u_i,v_{j+1}) = \vec{r}_{i\,j+1}(u_i,v_{j+1})$, поэтому для $u < u_i$ выполняется равенство $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$. Аналогично, для $u_{i+1} < u$ также имеет место равенство $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$. Следовательно, равенство $\vec{R}_{ij}(u,v_{j+1}) = \vec{R}_{i\,j+1}(u,v_{j+1})$ выполняется для любых значений *u*.

Учитывая это условие стыковки соседних секций, после сокращений в соотношении (7) остается только одно слагаемое $\vec{R}_{pq}(u,v)$. Т.о., получаем, что $\vec{R}(u,v) = \vec{R}_{pq}(u,v) = \vec{r}_{pq}(u,v)$ для точек $(u,v) \in \Delta_{pq}$. Это значит, что поверхность с параметрическим уравнением $\vec{R}(u,v)$ при $u_p \le u \le u_{p+1}$, $v_q \le v \le v_{q+1}$ совпадает с поверхностью соответствующей pq-секции.

Если в формулу (5) подставить выражения (4), то получим

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}_{00}(u,v) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{i0}(u,v) - \vec{R}_{i0}(u_i,v)\right) + \tag{8}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(\left(\vec{R}_{0j}(u,v) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{ij}(u,v) - \vec{R}_{ij}(u_i,v)\right)\right) - \left(\vec{R}_{0j}(u,v_j) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{ij}(u,v_j) - \vec{R}_{ij}(u_i,v_j)\right)\right)\right)$$

После перегруппировки слагаемых получаем

$$\vec{R}(u,v) = \vec{R}_{00}(u,v) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{i0}(u,v) - \vec{R}_{i0}(u_i,v)\right) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(\vec{R}_{0j}(u,v) - \vec{R}_{0j}(u,v_j)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\vec{R}_{ij}(u,v) - \vec{R}_{ij}(u,v_j) - \vec{R}_{ij}(u_i,v) + \vec{R}_{ij}(u_i,v_j)\right) \tag{9}$$

Т.о., формула (9) (или (8)) с учетом (3) дает аналитическое представление составной поверхности, если параметрические уравнения ее секций $\vec{r}_{ij}(u,v)$ заданы. Отметим также, что точки *(u,v)*, лежащие вне прямоугольника $[u_0,u_n]\times[v_0,v_m]$, отображаются в граничные точки составной поверхности.

Обычно интервалы изменения аргументов (*u,v*) вектор-функций $\vec{r}_{ij}(u,v)$, представляющих уравнения секций, заданы на произвольном прямоугольнике $u_0^{ij} \le u \le u_1^{ij}$, $v_0^{ij} \le v \le v_1^{ij}$. Чтобы эти прямоугольники согласовать с соответствующими прямоугольниками $[u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}]$ предварительно перед использованием формул (3) в уравнениях поверхностей $\vec{r}_{ij}(u,v)$ следует сделать замену переменных $u = u_0^{ij} + \dfrac{u_1^{ij} - u_0^{ij}}{u_{i+1} - u_i}\left(u' - u_i\right)$, $v = v_0^{ij} + \dfrac{v_1^{ij} - v_0^{ij}}{v_{i+1} - v_i}\left(v' - v_i\right)$.

Формулы (8), (9) всегда представляют уравнение непрерывной поверхности (если исходные вектор-функции $\vec{r}_{ij}(u,v)$ непрерывны) даже, если не выполняется условие стыковки соседних секций. В этом случае результирующая поверхность будет совпадать только с начальной секцией поверхности $\vec{r}_{00}(u,v)$, а остальные секции будут деформированы и пристыкованы к начальной так, чтобы результирующая поверхность была непрерывной.

Уравнение составной поверхности, секции которой заданы уравнениями в явном виде. Пусть на плоскости *XY* задана ортогональная сеть $\omega_{xy} = [x_0,x_1,...,x_n]\times[y_0,y_1,...,y_m]$ и в ее ячейках определены функции $z_{ij}(x,y)$ (*i=0,1,2,…,n-1, j=0,1,2,…,m-1*), представляющие явные уравнения некоторых поверхностей. Известно, что эти поверхности пересекаются по кривым, расположенным над линиями сети ω_{xy} так, что выполняются условия непрерывности составной поверхности в виде: $z_{ij}(x_{i+1},y) = z_{i+1\,j}(x_{i+1},y)$ при $y_j \le y \le y_{j+1}$, и $z_{ij}(x,y_{j+1}) = z_{i\,j+1}(x,y_{j+1})$ при $x_i \le x \le x_{i+1}$. На прямоугольнике $[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]$ требуется построить единое аналитическое уравнение поверхности, составленной из секций поверхностей, имеющих уравнения $z_{i\,j}(x,y)$ над областями $\Delta_{i\,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$.

Для этого вначале составим уравнение секций поверхности в следующем виде

$$Z_{i\,j}(x,y)=z_{i\,j}(x_i+(x_{i+1}-x_i)P(x,x_i,x_{i+1}-x_i),\quad y_j+(y_{j+1}-y_j)P(y,y_j,y_{j+1}-y_j)) \tag{10}$$

Каждая такая поверхность над областью прямоугольника $\Delta_{i\,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ совпадает с исходной, поскольку для любой точки из прямоугольника $(x,y)\in\Delta_{i\,j}$ аргументы функции в правой части формулы (10) совпадают с x и y. Над полосами влево, вправо, вниз и вверх от этого прямоугольника поверхность $Z_{i\,j}(x,y)$ является цилиндрической, образованной переносом соответствующей граничной кривой секции вдоль одной из координатных осей. Над угловыми квадрантами результирующая функция $Z_{i\,j}(x,y)$ постоянна и равна значению исходной функции $z_{i\,j}(x,y)$ в углах секции.

Повторяя предыдущие построения, получаем следующую формулу

$$Z(x,y)=Z_{00}(x,y)+\sum_{i=1}^{n-1}\bigl(Z_{i0}(x,y)-Z_{i0}(x_i,y)\bigr)+\sum_{j=1}^{m-1}\bigl(Z_{0j}(x,y)-Z_{0j}(x,y_j)\bigr)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\bigl(Z_{ij}(x,y)-Z_{ij}(x,y_j)-Z_{ij}(x_i,y)+Z_{ij}(x_i,y_j)\bigr) \tag{11}$$

Она представляет уравнение составной поверхности, секции которой заданы явными уравнениями $z=z_{i\,j}(x,y)$ над ячейками сети $\Delta_{i\,j}$. Доказательство формулы (11) полностью повторяет предыдущее доказательство с той лишь разницей, что вместо вектор-функций $\vec{r}_{i\,j}(u,v)$ и $\vec{R}_{i\,j}(u,v)$ рассматриваются скалярные функции $z_{i\,j}(x,y)$ и $Z_{i\,j}(x,y)$.

4. Заключение

С помощью введенной функции (1) и формулы (2) можно составлять единые аналитические выражения для уравнений кусочно-линейчатых поверхностей. Метод позволяет построить уравнения полных поверхностей таких тел как куб, пирамида, конус, уравнение поверхности цилиндра вместе с верхним и нижним основанием и уравнения поверхностей многих многогранников. Формулы (3), (9) и (10), (11) дают способ построения уравнений непрерывных составных поверхностей в форме единых аналитических выражений, если уравнения отдельных секций (криволинейных граней) поверхности заданы. Использование этих формул в системах символьной математики позволяет генерировать уравнения широкого класса кусочно-гладких непрерывных составных поверхностей. Алгоритмы настоящей работы реализованы в некоторых процедурах пакета расширения PscFunctions системы символьной математики MAPLE, созданного автором. Он представлен на интернет сайте www.maplesoft.com/products/thirdparty/PSCFunctions. Формулы настоящей работы имеют применение в научной графике для изображения дву- и трехмерных тел и различных полей на их поверхности. Поверхности тел в системах инженерной компьютерной графики также могут описываться с использованием предложенных в работе уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982.-552с.
3. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001.
5. Доля П.Г. Параметрические уравнения кусочно-гладких непрерывных кривых.// Вестник Международного Славянского Университета. Харьков. Серія “Технічні науки”, т.5, 2002, №7.
6. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых.// Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 661. Сер. ”Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.4. – С.97-103.