Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.6
№ 703, 2005, с.158-164

Метод дискретных вихрей для сингулярных интегральных уравнений первого рода в классе обобщённых функций

И. К. Лифанов, А. С. Ненашев
Институт Вычислительной математики РАН
Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского

In this article the method of discrete curls for the singular integral equations of the first kind within the class of generalized functions is considered.

Введение

В различных приложениях, связанных с решением прикладных задач аэродинамики и электродинамики приходится рассматривать решение сингулярных интегральных уравнений в классе обобщённых функций, то есть, например, следующее уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{x-x_0}+\alpha\int_{-1}^{1}K(x,x_0)g(x)dx=f(x_0),\ x_0\in(-1,1). \qquad (1)$$

где - $K(x,x_0)$ гельдеровская функция, рассматривается в случаях, когда правая часть может быть неинтегрируемой функцией $f(x_0)=(x_0-q)^{-1}$. Как показано в [1] для характеристического уравнения (1) ($\alpha=0$) частное решение $g(x)$ является дельта-функцией. Для таких функций сингулярный интеграл в (1) надо понимать как оператор в обобщённых весовых Соболевских пространствах, опираясь на известные [2] спектральные соотношения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x_0-x)}=U_{n-1}(x_0), \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}U_n(x)dx}{x_0-x}=T_{n+1}(x_0), \qquad (3)$$

где $x_0\in(-1,1)$, $n=0,1,...$, $T_n(x)$, $U_n(x)$ - полиномы Чебышева первого и второго рода, кроме того, будем считать, что $U_{-1}(x)\equiv 0$.

При $\alpha=0$ получим так называемое характеристическое сингулярное интегральное уравнение на отрезке

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{x-x_0}=f(x_0). \qquad (4)$$

Будем рассматривать решения уравнений (1) и (4) в классе функций, обращающихся в бесконечность на концах отрезка $[-1,1]$ и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = C . \qquad (5)$$

Рассмотрим вопрос о нахождении решения уравнения (4) с правой частью типа $(x_0 - q)^{-1}$ и дополнительным условием (5)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{x - x_0} = \frac{1}{x_0 - q}, \; q \in (-1,1) . \qquad (6)$$

Если понимать интегральные оператор в уравнении (6) как оператор в обобщённых Соболевских пространствах, то можно записать решение уравнения (6) в следующем виде

$$g(x) = -\pi\delta(x - q) + \frac{C_0}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (7)$$

где C_0 - константа, подлежащая определению.

Для нахождения C_0 воспользуемся условием (5). Тогда получим

$$-\pi + C_0 \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = C ,$$

$$C_0 = \frac{C}{\pi} + 1 . \qquad (8)$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего сингулярного уравнения на отрезке (1). Так как функция $K(x, x_0)$ является гёлдеровской по обоим своим аргументам, то можно применить обратный сингулярный оператор для соответствующего характеристического уравнения (4) к обеим частям уравнения (1)

$$g(x) + \alpha S^{-1}\left(\int_{-1}^{1} K(x, x_0) g(x)dx, x\right) = S^{-1}\left(f(x_0), x\right), \qquad (9)$$

где $S^{-1}(*, x)$ - обратный сингулярный оператор для характеристического уравнения (4) в соответствующем классе поиска решений.

Поскольку применение обратного сингулярного оператора к гёлдеровской функции даёт также гёлдеровскую функцию, то ядро интегрального оператора в уравнении (9) является гёлдеровским, поэтому данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В тех случаях, когда α не является собственным числом, можно рассматривать вопрос о построении численного метода решения данного уравнения.

Вычислительная схема метода дискретных вихрей для характеристического уравнения (3) при указанной правой части

Возьмём на отрезке $[-1,1]$ точки $x_i = -1 + (i-1)h$, $i = 1,...,N$, $h = 2(N-1)^{-1}$ и точки $x_{0j} = x_j + h/2$, $j = 1,...,N-1$. Для численного решения уравнения (1) при правой части вида $(x_0 - q)^{-1}$ надо взять схему

$$\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N} g_N(x_i)\frac{h}{x_i - x_{0j}} = \frac{1}{x_{0j}-q}, \ j=1,...,N-1,$$

$$\sum_{i=1}^{N} g_N(x_i) = C, \tag{10}$$

где $q \in \{x_i\}$, $i = 2,...,N-1$.

Как следует из результатов [2], имеем

$$g_n(x_i) = \pi\frac{1}{h}I_{1,i}^{(N)}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(N)}\frac{h}{x_i - x_{0j}}\frac{1}{x_{0j}-q} + \frac{1}{h}I_{1,i}^{(N)}C, \ i=1,...,N, \tag{11}$$

где $I_{1,i}^{(N)} = \dfrac{1}{x_{0N}-x_i}\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{N}(x_{0m}-x_i)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{N}(x_m - x_i)}$, $I_{1,0j}^{(N)} = \left(x_{0N}-x_{0j}\right)\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{N}\left(x_{0j}-x_m\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\left(x_{0j}-x_{0m}\right)}$.

Перепишем систему (11) в виде

$$g_N(x_i) = \pi\frac{1}{h}I_{1,i}^{(N)}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(N)}\frac{1}{x_i - q}\left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + \frac{h}{x_{0j}-q}\right) + \frac{1}{h}I_{1,i}^{(N)}C, \tag{12}$$

$$i \neq i_q, \ x_{i_q} = q,$$

$$g_N(q) = -\pi\frac{1}{h}I_{1,i_q}^{(N)}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(N)}\frac{h}{\left(x_{0j}-q\right)^2} + \frac{1}{h}I_{1,i_q}^{(N)}C. \tag{13}$$

В работе [2] получены следующие асимптотические представления

$$\frac{1}{h}I_{1,i}^{(N)} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} + O\left(\frac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}}\right), \tag{14}$$

$$\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(N)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x_{0j}^2} + O\left(\frac{h}{\sqrt{1-x_{0j}^2}}\right). \tag{15}$$

Введём теперь в рассмотрение две функции

$$g_N^*(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}}\left(1+\dfrac{C}{\pi}\right), \ i = i_q, \\ g_N(x_i), \ i=1,...,N, \ i\neq i_q, \end{cases} \tag{16}$$

$$g_N^{**}(x_i) = \begin{cases} 0, \ i \neq i_q, \\ g_N(q) - \dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}}\left(1+\dfrac{C}{\pi}\right), \ i = i_q. \end{cases} \tag{17}$$

Из формул (16) и (17) видно, что выполняется равенство

$$g_N^*(x_i) + g_N^{**}(x_i) = g_N(x_i), \ i=1,...,N. \tag{18}$$

Рассмотрим вначале функцию $g_N^*(x_i)$. При $i \neq i_q$ с учётом соотношений (14) и (15) получим, что

$$g_N^*(x_i) = \pi \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{x_i - x_{0j}} \frac{1}{x_{0j} - q} + \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} C =$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \frac{1}{x_i - q} \sum_{j=1}^{N-1} \sqrt{1-x_{0j}^2} \left(\frac{1}{x_{0j} - x_i} - \frac{1}{x_{0j} - q} \right) h + \frac{1}{\pi} \frac{C}{\sqrt{1-x_i^2}} + O\left(\frac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \frac{1}{x_i - q} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x_{0j}^2} \left(\frac{1}{x_0 - x_i} - \frac{1}{x_0 - q} \right) dx_0 + \frac{1}{\pi} \frac{C}{\sqrt{1-x_i^2}} + O\left(\frac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}} \right).$$

Напомним известное равенство [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_0 - x} = x_0, \; x_0 \in (-1,1). \tag{19}$$

Поэтому с учётом определения (16)

$$g_N^*(x_i) = \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi} \right) + O\left(\frac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}} \right), \; i = 1, \ldots, N. \tag{20}$$

Вычислим теперь значение функции $g_N^{**}(x_i)$ при $x_i = q$.

$$g_N^{**}(q) = -\pi \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{\left(x_{0j} - q\right)^2} + \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} C - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2}}{\left(x_{0j} - q\right)^2} h - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + O\left(\frac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}} \right). \tag{21}$$

Представим конечную сумму в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2}\, h}{\left(x_{0j} - q\right)^2} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2} - \sqrt{1-q^2} + \dfrac{q\left(x_{0j} - q\right)}{\sqrt{1-q^2}}}{\left(x_{0j} - q\right)^2} h + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\left(x_{0j} - q\right)^2} h -$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{qh}{\sqrt{1-q^2}\left(x_{0j} - q\right)} == S_N^{(1)} + S_N^{(2)} - S_N^{(3)}.$$

Рассмотрим каждую из этих сумм в отдельности.

Так как

$$\lim_{x_0 \to q} \frac{\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-q^2} + \dfrac{q\left(x_0 - q\right)}{\sqrt{1-q^2}}}{\left(x_0 - q\right)^2} = \lim_{x_0 \to q} \frac{\dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} + \dfrac{q}{\sqrt{1-q^2}}}{2\left(x_0 - q\right)} = -\frac{1}{\left(1-q^2\right)^{3/2}} < \infty,$$

то $S_N^{(1)}$ является суммой Дарбу соответствующего определённого интеграла, поэтому

$$S_N^{(1)} = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-q^2} + \dfrac{q\left(x_0-q\right)}{\sqrt{1-q^2}}}{\left(x_0-q\right)^2} dx_0 + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\left(x_0-q\right)^2} dx_0 -$$

$$-\sqrt{1-q^2} \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{\left(x_0-q\right)^2} + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{\left(x_0-q\right)} + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right).$$

Напомним известное равенство [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(x-x_0\right)^2} dx = -1\,, \tag{22}$$

тогда

$$S_N^{(1)} = -\pi + \sqrt{1-q^2}\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1+q}\right) + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{\left(x_0-q\right)} + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right) =$$

$$= -\pi + \frac{2}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{\left(x_0-q\right)} + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right). \tag{23}$$

Вычислим теперь $S_N^{(3)}$.

$$S_N^{(3)} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{x_{0j}-q} \tag{24}$$

Согласно свойств квадратурных сумм для сингулярных интегралов [3] получим, что

$$S_N^{(3)} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^{1} \frac{dx_0}{\left(x_0-q\right)} + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right). \tag{25}$$

Из выражений (23) и (25) следует

$$S_N^{(1)} - S_N^{(3)} = -\pi + \frac{2}{\sqrt{1-q^2}} + O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right). \tag{26}$$

Наконец, вычислим сумму $S_N^{(2)}$.

$$S_N^{(2)} = \sqrt{1-q^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{\left(x_{0j}-q\right)^2} = \frac{\sqrt{1-q^2}}{h}\left(2\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\left(k+1/2\right)^2} + \sum_{k=m}^{M} \frac{1}{\left(k+1/2\right)^2}\right), \tag{27}$$

где $m = \min\left(i_q, N-i_q-1\right)$, $M = \max\left(i_q, N-i_q-1\right)$.

Так как точка q - фиксированная точка, то из $N \to \infty$ и $m \to \infty$ следует, что второе слагаемое в формуле (27) стремиться к нулю. Далее известна формула [2]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,, \tag{28}$$

поэтому

$$S_N^{(2)}=\frac{\sqrt{1-q^2}\,\pi^2+O(h)}{h}\,. \tag{29}$$

Окончательно получим

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\sqrt{1-x_{0j}^2}\,h}{\left(x_{0j}-q\right)^2}=-\pi+\frac{\sqrt{1-q^2}\,\pi^2+O(h)}{h}+\frac{2}{\sqrt{1-q^2}}+O\left(\frac{h}{\left(1-q^2\right)^{3/2}}\right) \tag{30}$$

Подставим (30) в (21), тогда

$$g_N^{**}\left(q\right)=\frac{-\pi+O(h)}{h}\,. \tag{31}$$

Нетрудно заметить, что функция $g_N^{**}(x_i)$ является дискретным аналогом дельта - функции. Действительно, если ввести в рассмотрение кусочно-непрерывную функцию

$$G_N^{**}\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x\notin\left[x_{0i_q-1},x_{0i_q}\right],\\ g_N^{**}\left(q\right),\ x\in\left[x_{0i_q-1},x_{0i_q}\right],\end{cases} \tag{32}$$

то для любой интегрируемой на интервале $\left(-1,1\right)$ и липшицевой в окрестности точки q функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}G_N^{**}(x)f(x)dx=-\pi f\left(q\right). \tag{33}$$

На основе выражений (20) и (31) получаем, что

$$g_N(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x_i^2}}\left(1+\dfrac{C}{\pi}\right)+O\left(\dfrac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}}\right),i\neq i_q,\\[2ex] -\dfrac{\pi}{h}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x_i^2}}\left(1+\dfrac{C}{\pi}\right)+O\left(\dfrac{h}{\left(1-x_i^2\right)^{3/2}}\right),i=i_q.\end{cases} \tag{34}$$

Перейдём теперь к рассмотрению численного решения полного сингулярного уравнения на отрезке (1).

Вычислительная схема метода дискретных вихрей для полного уравнения (1) при указанной правой части

Введём каноническое разбиение отрезка $[-1,1]$ как и в предыдущем пункте. Тогда численная схема для решения уравнения (1) будет выглядеть следующим образом

$$\frac{1}{\pi}\gamma_n + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N-1} g_N(x_i)\left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + hK(x_i, x_{0j})\right) = \frac{1}{x_{0j} - q}, \; j = 1,...,N-1, \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} g_N(x_i) = C, \tag{36}$$

где $q \in \{x_i\}$, $i = 2,...,N-2$.

Для доказательства сходимости данной численной схемы представим численное решение уравнения (35) в виде следующей суммы

$$g_N(x_i) = \psi_N(x_i) + \rho_N(x_i), \; i = 1,...,N-1, \tag{37}$$

где $\psi_N(x_i)$ - численное решение соответствующего характеристического уравнения, рассмотренное в предыдущем пункте. Тогда система уравнений (35) и (36) преобразуется к следующему виду

$$\frac{1}{\pi}\gamma_n^* + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N-1} \rho_N(x_i)\left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + hK(x_i, x_{0j})\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N-1} \psi_N(x_i) hK(x_i, x_{0j}), \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \rho_N(x_i) = 0. \tag{39}$$

Рассмотрим предел правой части уравнения (38) при $h \to 0$. Согласно свойству решения характеристического уравнения получим, что

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N-1} \psi_N(x_i) hK(x_i, x_{0j}) = K\left(q, x_{0j}\right) + O\left(\frac{h}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Таким образом, правая часть системы (38) является дискретным приближением гёлдеровской функции. Для систем такого вида в [2] была доказана сходимость к точному решению соответствующего полного сингулярного уравнения (1) на отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн, Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41, № 1, с. 121-137.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, Москва, ТОО “Янус”, 1995, 520 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, Москва, Наука, 1985, 256 с.