Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.218
№ 703, 2005, с.172-177

Корреляционные функции и квазидетерминированные сигналы

А. Ю. Петрова, В. А. Фадеев, Н. В. Черемская
Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Украина
ФЭД, Харьковский машиностроительный завод, Украина
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

In the article random sequences, processes and fields on the given mathematical expectations and correlation functions are reconstructed. At the same time the corresponding random sequences are defined by the set of finite random quantities, what effectively facilitates the consequent analysis of the probabilistic models with such random sequences. It is important that nonstandard random processes and sequences of the finite rank of nonstationarity confined themselves to the reconstruction scheme

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При обработке данных о случайных функциях чаще всего ограничиваются построением эмпирической корреляционной функции. В связи с этим возникает задача о построении случайной функции (квазидетерминированного сигнала), определяемой конечным набором случайных величин и имеющей заданную корреляционную функцию, причем случайную функцию часто можно считать гауссовской, так как во многих случаях на выходе системы получается случайный сигнал, который достаточно хорошо аппроксимируется гауссовским.

Для стационарных случайных процессов такая задача моделирования детерминированного случайного процесса по корреляционной функции была решена в [1], для случайных полей аналогичная задача была рассмотрена в [2].

Для случайных последовательностей и дискретных случайных полей, а также для нестационарных случайных сигналов проблема оставалась открытой.

2. Постановки задачи

Рассмотрим сначала задачу о восстановлении случайной последовательности по известным математическому ожиданию и корреляционной функции. Строится такая модельная случайная последовательность, у которой математическое ожидание и корреляционная функция совпадают с заданными.

Математическое ожидание и корреляционная функция являются простейшими вероятностными числовыми характеристиками, но они не определяют однозначно соответствующий набор плотностей распределения вероятностей, удовлетворяющие условиям нормировки и согласованности (кроме гауссовских стационарных последовательностей) [3], при условии, что при каждом фиксированном целом значении параметра случайная последовательность является непрерывной случайной величиной.

3. Решение

Решение сформулированной задачи для стационарных случайных последовательностей сводится к восстановлению спектральной плоскости по коэффициентам ряда Фурье или, в более общем случае, к степенной проблеме моментов.

В случае стационарных случайных последовательностей известно, что корреляционная функция может быть представлена в виде [3]

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} dF(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} f(x)\, dx\,, \tag{1}$$

где $f(x) = F'(x) \ge 0$, если соответствующая производная существует.

Пусть заданы математическое ожидание и корреляционная функция некоторой стационарной случайной последовательности: $M\xi(n) = a(n)$, $K_{\xi}(n,m) = K(n-m)$.

Рассмотрим случайную последовательность $\tilde{\xi}(n) = a(n) + \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, где ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные вещественнозначные величины и $M\xi_1 = 0$, $a(n)$ – детерминированная функция дискретного аргумента Очевидно, что $M\tilde{\xi}(n) = a(n)$. Найдем корреляционную функцию $K(n,m) = M(\xi(n) - M\xi(n))(\overline{\xi(m) - M\xi(m)})$, в случае, если $M\xi(n) \ne 0$. Если $M\xi(n) = 0$, то $K(n,m) = M\xi(n)\overline{\xi(m)} = M(\xi_1 e^{i\xi_2 n} \xi_1 e^{-i\xi_2 m}) = K(n-m)$.

Следовательно,

$$K(n-m) = K(\tau) = M|\xi_1|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} p(x)\, dx\,, \tag{2}$$

где $\tau = n - m$, $p(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi_2(\omega)$.

Из (1) и (2) следует, что $p(x) = \dfrac{1}{M|\xi_1|^2} f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, где $f(x)$ – спектральная плотность, т. е. плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi_2(\omega)$ пропорциональна спектральной плоскости, которая восстанавливается по корреляционной функции $K(n-m)$ по формуле $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau} K(\tau)$ [3].

4. Стационарный случай.

Пример 1. Рассмотрим случайную стационарную последовательность с корреляционной функцией $K(0) = 1$, $K(\tau) = 0$ при $\tau \ne 0$ и математическим ожиданием равным нулю [3].

Построим квазидетерминированный дискретный сигнал $\xi(n)$ с $M\xi(n) = 0$: $\xi(n) = \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины и $M|\xi_1|^2 = 1$.

Найдем его корреляционную функцию при условии, что спектральная плотность имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}$.

При $\tau \neq 0$ и τ – целое $K(n-m)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} f(x)dx=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau}dx=\sin\pi\tau=0$. При $\tau=0$ $K(n-m)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx=1$. В результате,

$$K(\tau)=\begin{cases}0, & \text{если } \tau\neq 0,\\ 1, & \text{если } \tau=0.\end{cases}, \tag{3}$$

Таким образом, стационарная случайная последовательность, у которой корреляционная функция имеет форму (3), а $M\xi(n)=0$ (для простоты), может быть представлена в виде $\xi(n)=\xi_1 e^{i\xi_2 n}$, причем ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, $M\xi_1=0$, $M|\xi_1|^2=1$, а $M\xi_2=0$ и ξ_2 – равномерно распределена на интервале $[-\pi,\pi]$.

Пример 2. $\xi(n)=\xi_1 e^{i\xi_2 n}$, $M|\xi_1|^2=1$, $M\xi_1=0$, ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины. Пусть спектральная плотность имеет вид [3] $f(x)=\dfrac{C}{2\pi}\cdot\dfrac{1-a^2}{|e^{ix}-a|^2}$, где $|a|<1$, a – вещественное. Спектральную плотность, пронормируем на единицу: $\dfrac{C}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1-a^2}{|e^{ix}-a|^2}dx=1$. Легко проверить, что $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{(1-a^2)dx}{(e^{ix}-a)(e^{-ix}-a)}=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{(1-a^2)dx}{1-2a\cos x+a^2}=1$. Отсюда, $C=1$.

Пусть $a(n)=0$, $K(\tau)=Ca^{|\tau|}$, $|a|<1, C>0$. Тогда последовательность $\xi(n)=\xi_1 e^{i\xi_2 n}$ имеет заданную корреляционную функцию, если $M|\xi_1|^2=1$, $M\xi_1=0$, $M\xi_2=0$, а ξ_2 на интервале $[-\pi,\pi]$ имеет распределение $\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$.

Пример 3. Пусть спектральная плотность имеет вид [3]

$$f(x)=\frac{C}{2\pi}\cdot\frac{|e^{ix}-b|^2}{|e^{ix}-a|^2}=\frac{C}{2\pi}\cdot\frac{(e^{ix}-b)(e^{-ix}-b)}{(e^{ix}-a)(e^{-ix}-a)}, \tag{4}$$

где a и b – вещественные, $|a|<1$, $|b|<1$, тогда корреляционная функция вычисляется по формуле $K(n,m)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau}f(x)dx=\dfrac{C}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau}\dfrac{(e^{ix}-b)(e^{-ix}-b)}{(e^{ix}-a)(e^{-ix}-a)}dx$.

В случае спектральной плотности (4) корреляционная функция равна
$$K(\tau)=\begin{cases}\dfrac{C(a-b)(1-ab)}{1-a^2}\cdot a^{|\tau|-1} & \text{при } \tau\neq 0,\\ \dfrac{C(1-2ab+b^2)}{1-a^2} & \text{при } \tau=0.\end{cases}$$

Причем C и b можно определить из системы $\begin{cases}\dfrac{C(a-b)(1-ab)}{a(1-a^2)}=C_1,\\ \dfrac{Cb}{a}=C_2.\end{cases}$

5. Нестационарный случай

Рассмотрим теперь восстановление квазидетерминированного сигнала в нестационарном случае, когда корреляционная функция не является функцией разности.

Пусть корреляционная функция имеет вид [4]:
$$K(n,m)=\sum_{\tau=0}^{\infty}\varphi(n+\tau)\overline{\varphi(m+\tau)}, \tag{5}$$
τ – целое, а функции $\varphi(k)$ строятся специальным образом по комплексным числам, расположенным в единичной окружности на комплексной плоскости (дискретный спектр).

В этом случае структура квазидетерминированного сигнала более сложная, чем в предыдущих случаях, но легко проверить, что случайная последовательность вида $\xi(n)=\dfrac{\xi_1(\omega)\varphi(n+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p_{\xi_0(\omega)}}}$, где $M\xi_1(\omega)=0$, $M|\xi_1(\omega)|^2=1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины $\xi_0(\omega)$ – дискретная случайная величина, принимающая счетное количество значений 0, 1, 2,… с вероятностями $p_0, p_1, p_2,\ldots$, имеет корреляционную функцию вида (5).

Если обратиться к случаю непрерывного параметра t, то для диссипативного нестационарного случайного процесса $\xi(t)$ с $M\xi(t)=0$ ранга нестационарности один корреляционная функция имеет вид [5]:
$$K(t,s)=\int_0^{\infty}\varphi(t+\tau)\overline{\varphi(s+\tau)}\,d\tau, \tag{6}$$
тогда легко проверить, что квазидетерминированный сигнал вида $\xi(n)=\xi_1(\omega)\dfrac{\varphi(n+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}$ имеет корреляционную функцию вида (6), где $M\xi_1(\omega)=0$, $M|\xi_1(\omega)|^2=1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины $\xi_0(\omega)$ – непрерывная случайная величина, $\xi_0(\omega)\in[0,\infty)$, а $p(x)$ – плотность распределения вероятности этой случайной величины.

В случае спектра, расположенного в верхней полуплоскости $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Lambda_k(t)$, где $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$, $\Lambda_k(t)$ имеет вид $\Lambda_k(t)=\sum_{j=1}^{k}b_je^{i\lambda_jt}$, где $\lambda_j=\alpha_j+\frac{1}{2}\beta_j^2$, $\lambda_l\neq\lambda_m$, $l\neq m$, тогда квазидетерминированный сигнал $\xi(t)$ имеет вид $\xi(t)=\frac{\xi_1(\omega)}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{j=1}^{k}b_je^{i\lambda_j(t+\xi_0(\omega))}$, где $M\xi_1(\omega)=0$, $M|\xi_1(\omega)|^2=1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, т. е. представляется в виде суперпозиции внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами, в отличие от стационарного случая, когда можно было ограничиться одним слагаемым и вещественной частотой.

В случае бесконечнократного спектра в нуле $\varphi(t)=\int_0^{\ell}f_0(x)J_0(\sqrt{2tx})dx$ и тогда очевидно, что соответствующий квазидетерминированный сигнал, имеющий корреляционную функцию (6), представляется в виде $\xi(t)=\frac{\xi_1(\omega)}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}\int_0^{\ell}f_0(x)J_0(\sqrt{2(t+\xi_0(\omega))x})dx$, где $M\xi_1(\omega)=0$, $M|\xi_1(\omega)|^2=1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, $f_0(x)\in L^2_{[0;\ell]}$, $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

6. Выводы и направления дальнейших исследований

Отметим, что аналогичный подход можно использовать для моделирования квазидетерминированных сигналов для случайных неоднородных полей (дискретных или непрерывных аргументов) с заданной корреляционной функцией.

Так, для диссипативных случайных полей корреляционная функция имеет вид $K(x,y)=\iiint_0^{\infty}\varphi(x_1+\tau_1,x_2+\tau_2,x_3+\tau_3)\overline{\varphi(y_1+\tau_1,y_2+\tau_2,y_3+\tau_3)}d\tau_1d\tau_2d\tau_3$, где структура функции $\varphi(x)$ определяется спектром неоднородного поля [6].

Тогда как и для квазидетерминированных сигналов, зависящих от одного параметра, легко видеть, что квазидетерминированное непрерывное случайное поле вида $\xi(x)=\frac{\xi_1(\omega)\varphi(x+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}$, где $M\xi_1(\omega)=0$, $M|\xi_1(\omega)|^2=1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, $\xi_0(\omega)=(\xi_{01}(\omega),\xi_{02}(\omega),\xi_{03}(\omega))$ – случайный абсолютно непрерывный вектор с $0\le\xi_0(\omega)<\infty$ и совместной плотностью распределения вероятностей $p(t_1,t_2,t_3)$.

Использование модели случайных функций, определяемых конечным числом параметров, позволяет существенно упростить анализ прикладных задач, решение которых связано с дифференциальными уравнениями со случайными коэффициентами, которые являются такими квазидетерминированными сигналами. При этом нет необходимости использовать сложный аппарат стохастических дифференциальных уравнений, так как решение такого уравнения просто зависит от случайных величин, как от параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / Учебн. пособие для высш. учебн. заведений. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
2. Петрова А. Ю. Восстановление случайных полей по корреляционным функциям // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. науч. тр. Вып. «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – № 6. – Т. 1. – С. 174–182.
3. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // Успехи математических наук, 1952. – № 5. – С. 3–168.
4. Янцевич А. А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. I. Корреляционная теория // Сб. Теория функций, функциональный анализ и приложение. – Х., 1986. – Вып. 45. – С. 139 – 141.
5. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовом пространстве. – Х.: ХГУ, 1971. – 160 с.
6. Абауи Л. Об одном классе неоднородных случайных полей // Вестник Харьковского ун-та: Сер. Механика, теория управления и математическая физика. – 1984. – № 254. – С. 49–53.