Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 733, 2006, с.35-46

УДК 519.862:517.977.8

Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики

А. А. Васильев, А. М. Назаренко
Сумской государственный университет, Украина

The article deals with mathematical modeling of macroeconomic processes using some approaches of game theory and profit maximization hypothesis. Prognostic and descriptive characteristics of discrete models, obtained by various methods from differential-game dynamic model, are compared. Algorithms to identify these models with the help of econometric methods are substantiated. It is possible to use them analyzing macroeconomics of the developed countries.

В последнее время в теории математического моделирования экономических процессов и систем нашли широкое применение методы эконометрики [1,2], которые позволяют провести глубокий качественный анализ изучаемых систем, представленных в виде линейных моделей. Однако большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано понятием сложная система, и адекватно описывать их в рамках линейных моделей невозможно [3]. Вопрос построения и идентификации нелинейных динамических математических моделей экономических процессов и систем малоизучен как в отечественной, так и в зарубежной литературе. Некоторые подходы для решения данной проблемы могут быть заимствованы у активно развивающейся в последнее время дифференциальной теории игр [4-6], где представление изучаемого процесса сводится к ситуации конфликта или кооперации, записанной в виде системы дифференциальных уравнений, и участвующие стороны осуществляют выбор стратегии во времени.

В [7] предложен концептуальный подход к построению эконометрико-игровых моделей. В нем принципы дифференциальной теории игр используются для теоретического обоснования конструируемых моделей, а с помощью методов эконометрики проводится их идентификация.

В данной работе рассматривается обобщение этого подхода на случай рынка с множеством участников, а также изучение последствий этого обобщения и дальнейшей дискретизации на дескриптивные и прогнозные свойства моделей. При этом ставилась цель обосновать применимость предлагаемого подхода к описанию крупных рынков, точнее, к описанию их текущего состояния и вычислению для них прогнозных значений.

Следуя [7], при построении моделей будем использовать принцип максимизации прибыли в экономическом анализе [8], согласно которому при моделировании макроэкономической деятельности можно рассматривать рынок, все участники которого имеют одну цель – максимизировать собственную прибыль. Этих участников можно рассматривать как игроков, которые, с точки зрения их влияния на интегральную функцию цели, преследуют общие или противоположные цели. Для этого нужно выбрать для изучения некоторый основной показатель h и функцию G, описывающую его зависимость от влияющих на него факторов – рыночных ресурсов, которыми управляют соответствующие игроки. В зависимости от рассматриваемого показателя h все ресурсы можно разделить на две группы: способствующие и препятствующие росту h, а соответствующие факторы будут иметь положительную (факторы p_1, p_2, …, p_n) или отрицательную (факторы q_1, q_2, …, q_m) направленность влияния на функцию G. Направленность влияния можно определить на основании экономической теории или посредством проведения корреляционного анализа системы показатель-факторы.

В качестве функции G удобно выбрать производственную функцию типа Кобба-Дугласа

$$G = a_0 p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}. \quad (1)$$

Так, при моделировании макроэкономической деятельности страны в качестве основного показателя h может быть взят валовый внутренний продукт (ВВП), а факторами, влияющими на него, будут [8]: затраты основных фондов p_1, численность рабочей силы p_2, материальные затраты q_1. Тогда, выбрав для изучения двухфакторный рынок, вместо (1) можно записать

$$G = a_0 p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}, \quad (2)$$

а рассматривая трехфакторный:

$$G = a_0 p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot q_1^{\beta_1}. \quad (3)$$

При этом сумма оценок коэффициентов α_1 и α_2 в первом случае и α_1, α_2 и β_1 во втором позволит оценить эффект от увеличения масштаба производства.

В (2) показатели α_1 и α_2 являются коэффициентами эластичности выпуска (ВВП) по затратам основного капитала (p_1) и труда (p_2). Если по отдельности они указывают на процентное увеличение (или уменьшение) ВВП при однопроцентных колебаниях величин затрат капитала p_1 и труда p_2, то их сумма $\alpha_1 + \alpha_2$ отражает уже общую реакцию производства на указанные изменения показателей. При $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (ВВП увеличивается в той же пропорции, что и p_1, и p_2) наблюдается неизменность отдачи факторов при любых масштабах. Если $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, ВВП растет в большей пропорции и наблюдается возрастающий эффект от масштаба производства. Если же $\alpha_1+\alpha_2<1$, налицо убывающий эффект от масштаба производства (ВВП растет в меньшей пропорции, чем p_1 и p_2), наращивание затрат ресурсов оборачивается снижением их продуктивности [11].

При игровой интерпретации функцию G можно рассматривать как результат разрешения конфликта, который возникает на изучаемом рынке между двумя указанными выше группами игроков. Так, игроки, управляющие факторами p_1, p_2, …, p_n, стремясь в процессе своей деятельности увеличить собственную прибыль, будут наращивать значение соответствующих факторов и, как следствие, увеличивать показатель h. Однако игроки, от которых зависят значения величин q_1, q_2, …, q_m, также, стремясь получить наибольшую прибыль, своими действиями будут уменьшать значение показателя h. Тогда по поведению функции G, включающей в себя результаты взаимодействия всех рыночных участников, можно судить об успешности деятельности каждого из игроков в моменты времени $t = 0, 1, \ldots, N$. Если рассматривать описанный рынок изменяющийся непрерывно во времени, то вместо дискретных значений изучаемых факторов в каждый момент времени необходимо ввести в рассмотрение соответствующие функции $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t), q_1(t), q_2(t), \ldots, q_m(t)$. В этом случае ситуация на рассматриваемом рынке может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений градиентного типа [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = u_1(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dp_n}{dt} = u_n(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_n}, \\ \dfrac{dq_1}{dt} = -v_1(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = -v_m(t)\dfrac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_m} \end{cases} \tag{4}$$

при начальных условиях $p_i(0) = p_i^*(0), q_j(0) = q_j^*(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Содержательный смысл функций $u_i(t)$ и $v_j(t)$ в (4) состоит в характеристике скорости, с которой соответствующий игрок инвестировал средства на развитие сопоставленного ему фактора. Рассматривая систему (4) с экономической точки зрения, можно заметить, что каждое из уравнений представляет скорость роста рассматриваемого фактора. Например, dp_1 / dt есть произведение скорости вложений $u_1(t)$ в p_1 на эффективность их вложения $\partial G / \partial p_1$.

Задача нахождения функций управления $u_i(t)$ и $v_j(t)$ теоретически может решаться несколькими способами [10], но известные процедуры их численной реализации требуют настолько много вычислений, что проведение полной идентификации системы (4) даже небольшой размерности затруднительно. Кроме того, существующие подходы к решению обратных задач, к которым относится задача идентификации (4), разработаны для детерминированных моделей, а применение последних, в силу особенностей экономического моделирования, может привести к неадекватному описанию реальных систем. Поэтому здесь предложен другой подход к решению поставленной задачи, который базируется на эконометрическом аппарате и позволяет не только провести регрессионный анализ моделей, построенных на базе (4), но и оценить их качество приближения с помощью коэффициента детерминации R^2 [11].

В данной работе функции управления аппроксимируются многочленами

$$\begin{aligned} u_i(t) &= b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + \ldots + b_{ik_i}t^{k_i}, \quad i = 1, 2, ..., n; \\ v_j(t) &= c_{j0} + c_{j1}t + c_{j2}t^2 + \ldots + c_{jl_j}t^{l_j}, \quad j = 1, 2, ..., m, \end{aligned} \tag{5}$$

причём степени многочленов устанавливаются апостериорно – экспериментально на основе критерия, который будет описан ниже.

Решение задачи идентификации модели сводится к нахождению оценок неизвестных коэффициентов в (5). Для этого в работе предлагается два подхода. Согласно первому необходимо записать (4) в разностной форме, заменив неизвестные функции $u_i(t)$ и $v_j(t)$ предложенным в (5) аналогом. Получим следующую модель:

$$\begin{cases} p_1^{t+1} = p_1^t + \left(b_{10} + b_{11}t + b_{12}t^2 + ... + b_{1k_1}t^{k_1}\right)\dfrac{\partial G}{\partial p_1} + u_{k_1}^t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n^{t+1} = p_n^t + \left(b_{n0} + b_{n1}t + b_{n2}t^2 + ... + b_{1k_n}t^{k_n}\right)\dfrac{\partial G}{\partial p_n} + u_{k_n}^t, \\ q_1^{t+1} = q_1^t - \left(c_{10} + c_{11}t + c_{12}t^2 + ... + c_{1l_1}t^{l_1}\right)\dfrac{\partial G}{\partial q_1} + v_{l_1}^t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m^{t+1} = q_m^t - \left(c_{m0} + c_{m1}t + c_{m2}t^2 + ... + c_{ml_m}t^{l_m}\right)\dfrac{\partial G}{\partial q_m} + v_{l_m}^t, \end{cases} \tag{6}$$

где $t = 0, 1, ..., N\text{-}1$; p_i^t $(i = 1, 2, \dots, n)$, q_j^t $(j = 1, 2, \dots, m)$ – известные на основании статистических данных значения параметров системы в момент времени t; $u_{k_i}^t$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $v_{l_j}^t$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ – некоррелирующие, нормально распределенные случайные отклонения модели с нулевым математическим ожиданием и соответствующими дисперсиями: $u_{k_i}^t \sim N\left(0, \sigma_{u_{k_i}}^2\right)$, $v_{l_j}^t \sim N\left(0, \sigma_{v_{l_j}}^2\right)$.

Второй подход основан на записи системы (4) в интегральной форме:

$$\begin{cases} p_1(t) = p_1^* + \displaystyle\int_0^t u_1(t)\frac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_1}dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n(t) = p_n^* + \displaystyle\int_0^t u_n(t)\frac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial p_n}dt, \\ q_1(t) = q_1^* - \displaystyle\int_0^t v_1(t)\frac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_1}dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m(t) = q_m^* - \displaystyle\int_0^t v_m(t)\frac{\partial G(p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m)}{\partial q_m}dt. \end{cases} \tag{7}$$

Привлекательность интегральной формы (7) связана с предположением о том, что она позволит сгладить случайные выбросы в исходных статистических данных, вследствие введения временного лага, и избежать процедуры их предварительной фильтрации, которая, как правило, вносит в них дополнительные неточности.

Следуя (7), в работе предлагается следующая приближенная модель:

$$\begin{cases} p_1^{t+1} = P_1 + b_{10}\sum_{i=0}^{t}\frac{\partial G}{\partial p_1} + b_{11}\sum_{i=0}^{t} i\frac{\partial G}{\partial p_1} + b_{12}\sum_{i=0}^{t} i^2\frac{\partial G}{\partial p_1} + \ldots + b_{1k_1}\sum_{i=0}^{t} i^{k_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} + u_{k_1}^t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n^{t+1} = P_n + b_{n0}\sum_{i=0}^{t}\frac{\partial G}{\partial p_n} + b_{n1}\sum_{i=0}^{t} i\frac{\partial G}{\partial p_n} + b_{n2}\sum_{i=0}^{t} i^2\frac{\partial G}{\partial p_n} + \ldots + b_{1k_n}\sum_{i=0}^{t} i^{k_n}\frac{\partial G}{\partial p_n} + u_{k_n}^t, \\ q_1^{t+1} = Q_1 - c_{10}\sum_{i=0}^{t}\frac{\partial G}{\partial q_1} - c_{11}\sum_{i=0}^{t} i\frac{\partial G}{\partial q_1} - c_{12}\sum_{i=0}^{t} i^2\frac{\partial G}{\partial q_1} - \ldots - c_{1l_1}\sum_{i=0}^{t} i^{l_1}\frac{\partial G}{\partial q_1} + v_{l_1}^t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_m^{t+1} = Q_m - c_{m0}\sum_{i=0}^{t}\frac{\partial G}{\partial q_m} - c_{m1}\sum_{i=0}^{t} i\frac{\partial G}{\partial q_m} - c_{m2}\sum_{i=0}^{t} i^2\frac{\partial G}{\partial q_m} - \ldots - c_{ml_m}\sum_{i=0}^{t} i^{l_m}\frac{\partial G}{\partial q_m} + v_{l_m}^t. \end{cases} \tag{8}$$

Оценки коэффициентов в (6) и (8) можно вычислить, рассматривая каждое уравнение соответствующей системы для моментов времени t = 0, 1, ..., N-1 и используя метод наименьших квадратов. Для иллюстрации сказанного запишем первое уравнение системы (8) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=0} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \sum_{i=0}^{1}\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} & \sum_{i=0}^{1} i\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} & \ldots & \sum_{i=0}^{1} i^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \sum_{i=0}^{N-1}\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} & \sum_{i=0}^{N-1} i\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} & \ldots & \sum_{i=0}^{N-1} i^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p_1}\right|_{t=i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1k_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{k_1}^0 \\ u_{k_1}^1 \\ u_{k_1}^2 \\ \ldots \\ u_{k_1}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_1^1 \\ p_1^2 \\ \ldots \\ p_1^N \end{pmatrix} \tag{9}$$

или сокращенно

$$\vec{A}\vec{b}_1^* + \vec{u}_{k_1} = \vec{y}.$$

Тогда оценки неизвестных коэффициентов будут вычисляться по формуле [11]

$$\hat{\vec{b}}_1^* = \left(\vec{A}'\vec{A}\right)^{-1}\vec{A}'\vec{y}, \tag{10}$$

где $\vec{A}'$ – транспонированная матрица.

Заметим, что применение моделей (6), (8) и разработанной методики их идентификации позволяет не только оценить функции $u_i(t)$ и $v_j(t)$, что дает возможность изучить состояние системы в рассматриваемый период, но и, в силу независимости значений величин p_i и q_j в момент времени t от их значений в предыдущие моменты времени, дать краткосрочный прогноз динамики развития изучаемых величин.

Степени полиномов (5) представляется разумным выбирать из условия нахождения максимально точных прогнозных значений исследуемых величин. Для определения оптимальных степеней в (5) в работе предлагается использовать критерий, базирующийся на величине доверительного интервала для прогнозных значений изучаемых величин [11]:

$$y_{N+1} = \hat{y}_{N+1} \pm \delta t_\alpha\,,\ \delta = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 (1 + \vec{a}_{N+1} (\vec{A}'\vec{A})^{-1} \vec{a}'_{N+1})}\,. \tag{11}$$

Здесь δ – среднеквадратическая ошибка прогноза, t_α – двусторонний квантиль распределения Стьюдента с N-l-1 степенями свободы (l – степень соответствующего полинома), $\hat{\sigma}_u^2$ – оценка дисперсии остаточного члена, $\vec{a}_{N+1}$ – значение вектора объясняющих переменных в момент времени N+1, матрица $\vec{A}$ описана выше.

Соответственно, чем ниже значение среднеквадратической ошибки прогноза, тем уже доверительный интервал для прогнозных значений и, следовательно, выше прогнозные свойства модели. Тогда оптимальной степенью соответствующего полинома в (5) можно считать такую степень, при которой среднеквадратическая ошибка прогноза в (11) будет минимальной.

Обоснуем описанный выше подход фактом успешного рассмотрения реальных макроэкономических систем небольшой размерности для определённых рынков. Рассматриваемые рынки включают трех обобщенных участников: первый – это производители товаров и услуг, которые выпускают конечный продукт, а в качестве фактора, которым он управляет возьмем потребление основных фондов p. Вторым участником выберем домохозяйства и будем характеризовать его численностью рабочей силы q. В качестве третьего участника будем рассматривать условного рыночного агента, следящего за материальными затратами и характеризуемого уровнем потребления r. Соответственно каждый из указанных участников в процессе своей деятельности оказывал влияние на величину ВВП h, однако направленность влияния каждого фактора на h априорно определить невозможно, так как она будет зависеть от рассматриваемого рынка.

Конкретнее рассмотрим динамику развития Дании, Финляндии, Франции, Италии, Японии, Нидерландов и США в период 1990-2005 гг. [12], используя статистические данные о потреблении основных фондов p, количестве рабочих q, уровне материальных затрат r и ВВП h. Построение моделей осуществим на данных 1990-2003 гг., а на 2004 г. и 2005 г. будем вычислять прогнозные значения изучаемых величин. Так как в [12] приведены прогнозные экспертные оценки их значений на 2006 г., то интересным является сравнение последних с рассчитанными на основании моделей значениями. Иллюстрацию проведенных вычислений проведем на примере Дании (табл. 1), а результаты расчетов для остальных стран приведем в сводной таблице.

Аппроксимируем зависимость величины валового внутреннего продукта от потребления основного капитала, численности рабочих страны и материальных затрат функцией вида (3). После оценивания неизвестных коэффициентов линеаризованная форма (3) принимает вид (в скобках указаны стандартные ошибки оценок, u – случайное отклонение модели):

$$\underset{(c.o.)}{\ln G} = \underset{(1.538)}{-1.714} + \underset{(0.162)}{0.450} \ln p + \underset{(0.183)}{0.434} \ln q + \underset{(0.177)}{0.487} \ln r + u\,,\quad R^2 = 0.\ 0.99858,$$

откуда получаем

$$G(p, q, r) = 0.180 \cdot p^{0.450} \cdot q^{0.434} \cdot r^{0.487} \cdot e^u. \tag{12}$$

Таблица 1. Макроэкономические показатели Дании в период 1990-2005 гг.

t	Год	Затраты основного капитала p (mio_eur[1])	Численность рабочих q (тыс. чел.)	Материальные затраты r (mio_eur[1])	ВВП h (mio_eur[1])
0	1990	16176.4	2645	80745.5	107000.0
1	1991	17161.1	2629	83910.9	110558.7
2	1992	17925.4	2600	88099.5	116092.4
3	1993	19100.2	2562	92535.6	120076.2
4	1994	20152.8	2604	99888.1	129511.9
5	1995	21566.5	2629	106301.4	139129.2
6	1996	22700.7	2655	110526.4	145323.9
7	1997	23641.8	2687	113588.9	150414.1
8	1998	24597.2	2727	118464.5	155163.1
9	1999	26233.9	2753	122588.0	163199.9
10	2000	27425.9	2764	126349.1	173597.9
11	2001	28767.1	2785	130828.4	179226.1
12	2002	30011.3	2783	136258.4	184743.6
13	2003	30676.1	2742	140867.2	189640.5
14	2004	31909.0	2741	147704.1	197221.7
15	2005	33247.5	2761	155172.4	208546.1
16	2006	35098.9	2773	162104.0	221849.8

[1] mio_eur: Миллионов евро (с 01.01.1999)/Миллионов ECU (European Currency Unit) (до 31.12.1998).

Отметим, что все коэффициенты полученной модели значимы при уровне значимости α = 0.05, и, следовательно, она может быть выбрана для моделирования макроэкономического рынка Дании. Использование в качестве функции выигрыша в рассматриваемой дифференциальной игре именно производственной функции типа Кобба-Дугласа позволяет избежать проведения корреляционного анализа системы показатель-факторы, так как направленность воздействия и значимость влияния конкретного фактора на изучаемый показатель будет определяться соответственно знаком и значимостью соответствующего оцененного коэффициента.

Анализ (12) показывает, что факторы p, q и r имеют положительную направленность влияния на величину h, и в обозначениях систем (6) и (8) им будут соответствовать p_1, p_2 и p_3. Учитывая это, аналогом (6) для изучаемого макроэкономического рынка Дании будет:

$$\begin{aligned}
p^{t+1} &= p^t + \left(b_{10} + b_{11}t + b_{12}t^2 + \ldots + b_{1k_1}t^{k_1}\right)\cdot 0.0810\,p^{-0.550}q^{0.434}r^{0.487} + u_{k_1}^t,\\
q^{t+1} &= q^t + \left(b_{20} + b_{21}t + b_{22}t^2 + \ldots + b_{2k_2}t^{k_2}\right)\cdot 0.0782\,p^{0.450}q^{-0.566}r^{0.487} + u_{k_2}^t,\\
r^{t+1} &= r^t + \left(b_{30} + b_{31}t + b_{32}t^2 + \ldots + b_{3k_3}t^{k_3}\right)\cdot 0.0878\,p^{0.450}q^{0.434}r^{-0.513} + u_{k_3}^t.
\end{aligned} \tag{13}$$

Матричная форма первого уравнения (13), расписанного для моментов времени $t = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$, принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=0} & 0 & \ldots & 0 \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} & \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} & \ldots & \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=1} \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} & 2\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} & \ldots & 2^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} & (N-1)\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} & \ldots & (N-1)^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1k_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{k_1}^1 \\ u_{k_1}^2 \\ u_{k_1}^3 \\ \ldots \\ u_{k_1}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 - p^0 \\ p^2 - p^1 \\ p^3 - p^2 \\ \ldots \\ p^N - p^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно найти оценки $\widehat{b}_{1i}$ неизвестных коэффициентов b_{1i} методом наименьших квадратов и оценить функцию управления $u_1(t)$, соответствующую фактору p. Аналогично могут быть оценены функции управления $u_2(t)$ для q и $u_3(t)$ для r. Расчеты дают:

$$\underset{(c.o.)}{u_1(t)} = \underset{(25.735)}{389.526}, \qquad \underset{(c.o.)}{u_2(t)} = \underset{(0.201)}{0.466} - \underset{(0.00820)}{0.0180}\,t,$$

$$\underset{(c.o.)}{u_3(t)} = \underset{(1471.323)}{4937.955} + \underset{(1107.170)}{2504.817}\,t - \underset{(218.916)}{503.835}\,t^2 + \underset{(11.831)}{26.465}\,t^3.$$

Здесь все коэффициенты в $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ значимы, что дает основание предполагать адекватность построенных моделей. При найденных функциях управления величины p, q и r приближаются с высокой точностью: для них коэффициенты детерминации равны 0.99414, 0.91348 и 0.99841 соответственно.

Чтобы подтвердить адекватность модели (12), (13) для макроэкономического рынка Дании, необходимо проверить условия, накладываемые на остатки u, u_{k_1}, u_{k_2} и u_{k_3}, эконометрическим аналогом которых есть условия Гаусса-Маркова [13]. Расчеты показывают, что все присутствующие в модели случайные отклонения можно считать нормально распределенными случайными величинами. Из условий Гаусса-Маркова не удовлетворяется только третье условие (отсутствие автокорреляции) для (13). Присутствие автокорреляции в модели (13) может быть объяснено тем, что аппроксимация функций управления проводится многочленами, зависящими от времени, а в этом случае наличие зависимости между значением случайного отклонения в текущий момент времени от его значений в предыдущие моменты считается допустимым [13].

Таким образом, модель (12), (13) адекватно описывает ситуацию на макроэкономическом рынке Дании, и может быть использована, например, для вычисления краткосрочного прогноза с помощью (13).

Так, прогнозные значения для величины потребления основных фондов, численности рабочих и материальных затрат на 2004 год составили 31757.1, 2749 и 147740.5 соответственно (относительные ошибки прогнозов -0.478%, 0.289% и 0.0247%). Доверительные интервалы для прогнозных значений p, q и r равны 31757.1±594.2, 2749±53 и 147740.5±3670.1 (величины доверительных интервалов в процентах составляют 1.87%, 1.93% и 2.48%). Они оказались достаточно узкими, что говорит о хороших прогнозных свойствах построенной модели. Отметим, что прогнозное значение величины ВВП на 2004 год, вычисленное с помощью функции $G(p, q, r)$ (12), при найденных значениях p, q и r, равно 196930.9 (относительная ошибка прогноза равна -0.148%).

Проверим прогнозные свойства модели (12), (13) на два шага вперед. Используя в (13) в качестве исходных данных вычисленные прогнозные значения на 2004 год, находим величины потребления основных фондов, численности рабочих и материальных затрат на 2005 год. Они равны 32843.7, 2756 и 156755.7 соответственно (относительные ошибки прогнозов -1.23%, 0.19% и 1.01%), а доверительные интервалы для них 32843.7±1291.1, 2756±87, 156755.7±6599.4 (величины доверительных интервалов в процентах составляют 3.93%, 3.15% и 4.21%). В данном случае доверительные интервалы несколько расширились, так как при их расчете приходится учитывать случайность вектора объясняющих переменных. Однако качество построенных прогнозов, как и в предыдущем случае, оказалось высоким. Прогнозное значение для величины h на 2005 год, вычисленное с помощью (12) оказалось равным 206007.1 (относительная ошибка прогноза равна -1.23%).

Проведя аналогичные расчеты, но уже на данных 1990-2005 гг., можно вычислить прогнозные значения величин потребления основных фондов, численности рабочих и материальных затрат на 2006 год и сравнить их с экспертными оценками, приведенными в последней строке табл. 1. Так, прогнозные значения величин p, q, r и h получились равными 34519.2, 2770, 165483.7 и 218097.2 (ошибки найденных прогнозов относительно экспертной оценки -1.68%, 0.12%, 2.04% и -1.72%), что говорит о высокой степени соответствия найденных по модели (12), (13) и экспертных прогнозов.

Рассмотрим случай использования в качестве модели, задающей связь между факторами изучаемой макроэкономической системы, модель (8). Для экономики Дании (табл. 1) функция выигрыша равна (12). Аналог (8) в данном случае:

$$
\begin{aligned}
p^{t+1} &= P + b_{10}\sum_{i=0}^{t}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=i} + b_{11}\sum_{i=0}^{t} i\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=i} + b_{12}\sum_{i=0}^{t} i^2\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=i} + \ldots + b_{1k_1}\sum_{i=0}^{t} i^{k_1}\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{t=i} + u_{k_1}^t,\\
q^{t+1} &= Q + b_{20}\sum_{i=0}^{t}\left.\frac{\partial G}{\partial q}\right|_{t=i} + b_{21}\sum_{i=0}^{t} i\left.\frac{\partial G}{\partial q}\right|_{t=i} + b_{22}\sum_{i=0}^{t} i^2\left.\frac{\partial G}{\partial q}\right|_{t=i} + \ldots + b_{2k_2}\sum_{i=0}^{t} i^{k_2}\left.\frac{\partial G}{\partial q}\right|_{t=i} + u_{k_2}^t, \qquad (14)\\
r^{t+1} &= R + b_{30}\sum_{i=0}^{t}\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{t=i} + b_{31}\sum_{i=0}^{t} i\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{t=i} + b_{32}\sum_{i=0}^{t} i^2\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{t=i} + \ldots + b_{3k_3}\sum_{i=0}^{t} i^{k_3}\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{t=i} + u_{k_3}^t.
\end{aligned}
$$

Используя матричную форму (9) и ее аналоги для второго и третьего уравнений в (14), можно найти оценки неизвестных коэффициентов в функциях управления и констант P, Q и R. Получим:

$$\underset{(c.o.)}{u_1(t)} = \underset{(17.379)}{355.147} + \underset{(2.796)}{8.169}\,t,\ P = 16025.695;$$

$$\underset{(c.o.)}{u_2(t)} = \underset{(0.288)}{-2.0694} + \underset{(0.107)}{1.104}\,t - \underset{(0.00834)}{0.0859}\,t^2,\ Q = 2650.333;$$

$$\underset{(c.o.)}{u_3(t)} = \underset{(146.178)}{7266.0158},\ R = 80450.324.$$

Здесь все коэффициенты построенных моделей значимы (при уровне значимости $\alpha = 0.05$). При указанных функциях управления факторы p, q и r приближаются с коэффициентами детерминации равными 0.99832, 0.98068 и 0.99517 соответственно. Проверка условий Гаусса-Маркова для остаточных членов в (14) дает результат, аналогичный модели (13).

Следовательно, модель (12), (14) адекватно описывает динамику выбранных макроэкономических показателей для Дании, и пригодна для целей прогноза.

Прогнозные значения для потребления основного капитала, численности рабочих и материальных затрат на 2004 год, вычисленные с помощью (14), составили 32327.9, 2675 и 146293.8 соответственно (относительные ошибки прогнозов 1.30%, -2.45% и -0.96%). Доверительные интервалы для них равны 32327.9±934.7, 2675±99 и 146293.8±4581.1 (величины доверительных интервалов в процентах составляют 2.89%, 3.72% и 3.13%). Прогноз величины h на 2004 год есть 195253.4 (относительная ошибка прогноза -1.01%).

Соответствующие расчеты позволяют найти прогнозные значения изучаемых величин на 2005 год. Они равны: 33603.6 для p, 2681 для q, 151021.2 для r и 201969.7 для h (относительные ошибки прогнозов 1.06%, -2.98%, -2.75% и -3.26%), а соответствующие доверительные интервалы для p, q и r составили 33603.6±1519.3, 2681±158 и 151021.2±9531.4 (величины доверительных интервалов в процентах 4.52, 5.89% и 6.31%).

Аналогичные расчеты на данных 1990-2005 гг. позволяют сравнить прогнозные значения, найденные с помощью (12), (14), и соответствующие экспертные оценки значений изучаемых величин на 2006 год. В результате вычислений с помощью (14) было получено, что прогнозные значения величины потребления основного капитала, численности рабочих, материальных затрат и ВВП на 2006 год, равны 34745.4, 2752, 156827.7 и 212442.5 (ошибки найденных прогнозов относительно экспертной оценки -1.02%, -0.77%, -3.36% и 7.16%). Как видим, в этом случае также наблюдается высокая степень соответствия модельных и экспертных прогнозных значений.

Сравнивая модели (12), (13) и (12), (14), следует отметить, что у первой, вследствие отсутствия временного лага, значительно выше точность прогноза и уже доверительный интервал построенных прогнозных значений, что говорит о ее хороших прогнозных свойствах, однако у второй лучше дескриптивные свойства. Отсюда можно сделать вывод, что для изучения поведения макроэкономической системы в будущих периодах, необходимо использовать модель (12), (13), а для ретроспективного анализа системы – модель (12), (14).

Результаты аналогичного моделирования для Финляндии, Франции, Италии, Японии, Нидерландов и США приведены в табл. 2. В ней указаны прогнозные значения моделируемых величин (верхнее число), а также относительные ошибки прогноза и величина доверительного интервала (нижние числа) в процентах от прогнозного значения. В качестве функции-результата разрешения конфликта выбиралась трехфакторная модель типа (3). Если она содержала незначимые коэффициенты, то после их удаления она вырождалась в дфухфакторную (2). Анализ табл. 2 подтверждает сказанное выше, что модель (12), (13) обладает лучшими прогнозными, а (12), (14) – лучшими дескриптивными свойствами.

Таблица 2. Результаты моделирования для Финляндии, Франции, Италии, Японии, Нидерландов и США

Страна	Потребление основных фондов p			Численность рабочих q			Материальные затраты r		
	R^2	2004	2005	R^2	2004	2005	R^2	2004	2005
Для модели (1), (6)									
Финляндия	0.932	22237.0 -0.73; 1.78	23734.9 -1.85; 3.61	0.864	2398 -1.38; 2.03	2390.8 0.26; 4.21	–	–	–
Франция	0.960	209874.3 1.30; 2.31	216500.7 1.85; 4.01	0.889	25418 -1.79; 2.05	25922 -3.45; 4.11	0.987	1339665.2 -0.58; 1.53	1407865.4 -1.86; 3.21
Италия	–	–	–	0.940	24583 -1.43; 2.35	24753 -1.91; 4.52	0.985	1079854.7 0.93; 2.22	1107214.2 1.30; 3.88
Япония	0.930	910333.3 -3.04; 3.12	918687.9 -2.99; 5.52	–	–	–	0.902	2709948.7 3.76; 4.39	2649460.9 4.50; 6.85
Нидерланды	0.945	74377.4 -1.26; 2.92	76185.5 -1.03; 3.67	–	–	–	0.965	364853.0 -1.26; 2.12	363714.9 1.42; 3.41
США	0.937	1036859.5 -1.89; 2.74	1057566.9 2.62; 3.95	0.924	138080 1.41; 2.68	139724 1.81; 4.47	0.937	8323649.7 2.86; 4.18	8371147.1 2.82; 5.94
Для модели (1), (8)									
Финляндия	0.981	22567.1 2.19; 3.52	24102.4 3.35; 5.47	0.946	2419.1 2.23; 3.65	2489.3 3.71; 6.03	–	–	–
Франция	0.987	211839.9 0.36; 2.44	220996.7 -0.22; 4.36	0.927	25009.5 -0.19; 2.21	25260.1 -0.92; 5.30	0.994	1310524.7 1.63; 2.03	1355943.5 1.90; 4.05
Италия	–	–	–	0.963	23495.9 3.13; 3.74	23627.0 2.77; 5.46	0.991	1059082.1 2.90; 3.45	1086423.7 3.24; 6.13
Япония	0.953	921095.2 -4.17; 4.55	928585.2 -4.02; 7.16	–	–	–	0.923	2917384.3 -4.60; 5.21	2912519.4 -4.94; 7.73
Нидерланды	0.969	72299.1 1.57; 3.43	75060.1 0.45; 5.05	–	–	–	0.982	360944.2 -0.19; 2.63	375094.1 -1.65; 4.74
США	0.962	1043251.9 -2.49; 3.38	1122873.5 -3.35; 5.33	0.966	137283.8 2.00; 3.03	146650.8 3.00; 5.72	0.970	8356617.2 -3.24; 4.67	8824546.2 -2.46; 6.83

Выводы. Разработана и исследована методика построения динамических моделей в дискретном времени для макроэкономических систем, обосновывается их адекватность. Разработанный метод идентификации неизвестных параметров моделей, построенных на основании дифференциальной системы уравнений градиентного типа, позволяет оценить с высокой точностью функции управления, применяемые участниками рынка.

Показано, что модели (1), (6) и (1), (8) обеспечивают высокое согласование со статистическими данными по реальным системам. Анализ результатов моделирования макроэкономики семи европейских стран выявил, что модель (1), (6) обладает хорошими прогнозными свойствами и может использоваться для построения высокоточных прогнозов. Другая модель (1), (8) обладает лучшими дескриптивными свойствами и может применяться для изучения связей между элементами системы и для анализа ее свойств. В дальнейшем представляет интерес исследование реальных рынков с большим числом участников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шніпко О.С. Моделювання ВВП та впливу на нього показників господарської діяльності підприємств окремих галузей промисловості України//Формування ринкових відносин в Україні.– 2006. – №1.– С.11-19
2. Муха О.В. Економетричний аналіз і прогнозування інфляції на сучасному етапі в Республіці Білорусь//Статистика України. – 2005. – №4. – С. 20-27.
3. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 487 с.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. –384 с.
5. Weidlich W. Sociodynamics: A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences. – Harwood: Academic Publishers, 2000.
6. Antipin A. Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems. // Journal of Global Optimization, 2001. – P. 1-25.
7. Назаренко А. М. Об эконометрико-игровом методе построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Механизм регулирования экономики. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2006. – №1. – С. 105-114.
8. Макконелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: принципы, проблемы, политика: Пер. с 13-го англ. изд. – М.: ИНФРА-М, 1999. – XXXIV, 974 с.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
10. Альбрехт Э.Г., Быстрай Г.П. О динамических моделях эволюции некоторых макроэкономических процессов // Исследование федерализма в России: междисциплинарный подход. – Екатеринбург: Институт философии и права УрО РАН, 1999. – С. 214-232.
11. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2005. – 392 с.
12. http://epp.eurostat.ec.europa.eu/
13. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – XIV, 402 с.