Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.968.519.6
№ 733, 2006, с.117-133

Математическая модель для расчета гофрированного волновода на базе сингулярных интегральных уравнений и метода дискретных особенностей

С. В. Духопельников
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The discrete mathematical model of axially symmetrical diffraction problem for a monochromatic wave in a round waveguide with a finite number of fill in dielectric extensions was constructed. The system of singular integral equations are derived. The numerical solution of these systems was performed by the method of discrete singularities.

1. Введение.

Построена дискретная математическая модель для расчета электромагнитного поля в круглом волноводе с конечной системой расширений. Настоящая работа является продолжением работы [1]. Рассматривается задача рассеяния первичного поля в случае, когда рабочая зона и расширения (рис.1) заполнены диэлектриками с различными диэлектрическими проницаемостями. В работе [1] уравнения Максвелла распадались на две системы соответствующие поперечной электрической волне и поперечной магнитной волне. Чего нельзя сказать о рассматриваемой в этой работе задаче. Построенная в работе математическая модель рассматриваемой краевой задачи Максвелла сводится к системе двух связанных между собой сингулярных интегральных уравнений.

2. Постановка задачи.

Геометрия задачи.

Введем следующие обозначения $L_q=\left(a_q,b_q\right)$, $l_q=b_q-a_q$, $R_q=R+h_q$, $L=\bigcup\limits_{q=1}^{m}L_q$, $CL=\left(-\infty,\infty\right)\setminus L$. В этих обозначениях, «рабочая зона» – множество: $Pз=\left\{z\in\left(-\infty,\infty\right),\rho\in\left(0,R\right),\phi\in\left[0,2\pi\right)\right\}$, а «зона расширения» – множество: $Зр=\left\{z\in L,\rho\in\left(R,R_q\right),\phi\in\left[0,2\pi\right)\right\}$. При этом «внутренностью волновода» будем называть объединение рабочей зоны и зоны расширения $Pз\bigcup Зр\bigcup\left\{z\in L,\rho=R,\phi\in\left[0,2\pi\right)\right\}$. Металлическая поверхность волновода – множество $\Gamma=\left\{z\in CL,\rho=R\right\}\bigcup\left\{z\in L,\rho=R_q\right\}\bigcup$

$$\bigcup\bigcup_{q=1}^{m}\left(\left\{z=a_q,\rho\in\left[R,R_q\right]\right\}\bigcup\left\{z=b_q,\rho\in\left[R,R_q\right]\right\}\right).$$

Рассматривается аксиально-симметричная задача, поля не зависят от ϕ.

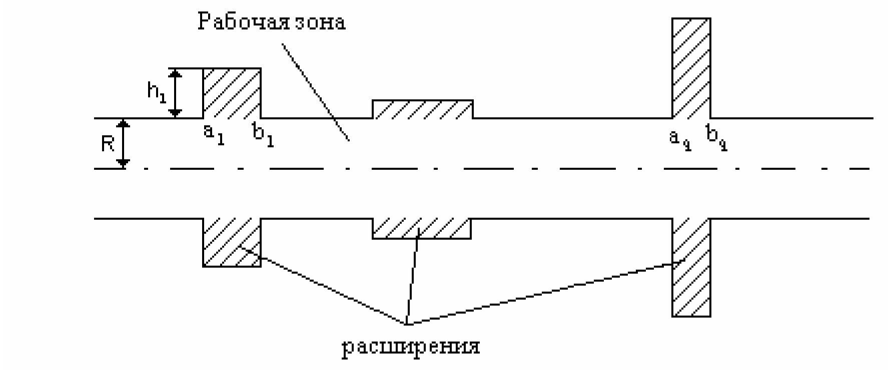

Рис.1. Осевое сечение волновода с расширениями.

Математическая модель.

Зависимость полей от времени гармоническая и задается множителем $e^{-i\omega t}$.

Запишем стационарные уравнения Максвелла, в дальнейшем – уравнения Максвела, для комплексных амплитуд:

$$rotH = -i\omega\varepsilon E \tag{1}$$

$$rotE = i\omega\mu H \tag{2}$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, μ - абсолютная магнитная проницаемость.

В силу отсутствия источников «внутри волновода» выполняются условия:

$$divE = 0 \qquad divH = 0 \tag{3}$$

На поверхности цилиндра выполняется граничное условие (касательные компоненты электрического поля на границе волновода обращаются в ноль):

$$\left[E, n\right]\Big|_{\Gamma} = 0 \tag{4}$$

где n – единичная нормаль к поверхности волновода.

Волновод представим в виде объединения двух непересекающихся областей: «зоны расширений» и «рабочей зоны», и запишем уравнения Максвелла для каждой области отдельно.

Уравнения Максвелла для «зоны расширений»:

$$rotH^{-}\left(\rho,z\right) = -i\omega\varepsilon_q^{-}E^{-}\left(\rho,z\right),\quad q=1,...,m\quad \rho\in\left(0,R\right),\ z\in\left(-\infty,\infty\right) \tag{5}$$

$$rotE^{-}\left(\rho,z\right) = i\omega\mu H^{-}\left(\rho,z\right),\ \rho\in\left(0,R\right),\ z\in\left(-\infty,\infty\right) \tag{6}$$

здесь константа ε_q^{-} – диэлектрическая проницаемость среды в расширениях, при чем в каждом из расширений можно задать свое значение, и μ – магнитная проницаемость, которая во всех расширениях постоянна.

Граничное условие в «зоне расширений» принимает вид:

$$E_z^{-}\left(R_q,z\right) = E_\phi^{-}\left(R_q,z\right) = 0,\ z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{7}$$

$$E_\phi^{-}\left(\rho,a_q\right) = E_\phi^{-}\left(\rho,b_q\right) = 0,\ q=1,...,m \tag{8}$$

в «рабочей зоне»:

$$rotH^{полн}\left(\rho,z\right)=-i\omega\varepsilon^{+}E^{полн}\left(\rho,z\right),\quad \rho\in\left(0,R\right),\ z\in\left(-\infty,\infty\right) \tag{9}$$

$$rotE^{полн}\left(\rho,z\right)=i\omega\mu H^{полн}\left(\rho,z\right),\quad \rho\in\left(0,R\right),\ z\in\left(-\infty,\infty\right) \tag{10}$$

где константа ε^{+} – диэлектрическая проницаемость среды в рабочей зоне. И μ – магнитная проницаемость, которая совпадает со значением в расширениях.

Граничное условие в «рабочей зоне» принимает вид:

$$E_z^{полн}\left(R,z\right)=E_\phi^{полн}\left(R,z\right)=0,\ z\in CL \tag{11}$$

На бесконечности выполнены условия излучения. «На ребрах» выполняются условия Майкснера.

Поскольку поля не зависят от координаты ϕ, в этом случае уравнения (1-2) принимают вид [2]:

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z}=i\omega\varepsilon E_\rho \tag{12}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right)=-i\omega\varepsilon E_z \tag{13}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial\rho}=-i\omega\varepsilon E_\phi \tag{14}$$

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z}=-i\omega\mu H_\rho \tag{15}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\phi\right)=i\omega\mu H_z \tag{16}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial\rho}=i\omega\mu H_\phi \tag{17}$$

условия (3) принимают вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right)+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right)=-\frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{18}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\rho\right)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\rho\right)=-\frac{\partial H_z}{\partial z} \tag{19}$$

Будем искать поле в «рабочей зоне» в виде:

$$H^{полн}\left(\rho,z\right)=H^{+}\left(\rho,z\right)+H_0\left(\rho,z\right)$$

$$E^{полн}\left(\rho,z\right)=E^{+}\left(\rho,z\right)+E_0\left(\rho,z\right)$$

где $H_0\left(\rho,z\right)$ и $E_0\left(\rho,z\right)$ – «первичное поле», представимое как суперпозиция конечного числа собственных волн круглого волновода радиуса R, распространяющихся в направлении возрастающих значений z.

Условия сопряжения выполняются на пересечении замыканий «рабочей зоны» и «зоны расширений» $\left\{\overline{Pз}\bigcap\overline{Зр}\right\}=\left\{(\rho,z):\rho=R,\ z\in L\right\}$, тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей «зоны расширений» и «рабочей зоны» совпадают:

$$H_\phi^+(R,z)+H_{0\phi}(R,z)=H_\phi^-(R,z),\ z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{20}$$

$$H_z^+(R,z)+H_{0z}(R,z)=H_z^-(R,z),\ z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{21}$$

$$E_\phi^+(R,z)+E_{0\phi}(R,z)=E_\phi^-(R,z),\quad z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{22}$$

$$E_z^+(R,z)+E_{0z}(R,z)=E_z^-(R,z),\quad z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{23}$$

Используя соотношения между компонентами электрического и магнитного полей, запишем условия сопряжения (20-23) в виде:

так равенство (23), с использованием (13), примет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^+}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi^+\right)+E_{0z}=\frac{1}{\varepsilon^-}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi^-\right) \tag{24}$$

а равенство (21) запишем в виде:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\phi^+\right)+H_{0z}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\phi^-\right) \tag{25}$$

Компоненты первичного поля удовлетворяют условиям:

$$E_{0\phi}\,|_{\rho=R}=0\quad E_{0z}\,|_{\rho=R}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_{0\phi}\right)|_{\rho=R}=0\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_{0z}\right)|_{\rho=R}=0$$

Условия сопряжения (20), (22), (24) и (25) с учетом условий на первичное поле имеют вид:

$$H_\phi^+ + H_{0\phi}=H_\phi^- \tag{26}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^+}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi^+\right)=\frac{1}{\varepsilon^-}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi^-\right) \tag{27}$$

$$E_\phi^+ = E_\phi^- \tag{28}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\phi^+\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_{0\phi}\right)+H_{0z}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\phi^-\right) \tag{29}$$

3.Математическая модель рассеяния.

Используя изложенные соображения и действую так же как в [1], введем в рассмотрение новые неизвестные функции. В то время как в [1] достаточно ввести только одну неизвестную функцию, в работе вводится две неизвестные функции, которые необходимо найти для решения поставленной задачи:

$$g(z)=\frac{\partial}{\partial z}E_\phi^+(R,z) \tag{30}$$

$$h(z)=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi^+\right)(R,z) \tag{31}$$

В силу условия сопряжения (28) и граничного условия (11) функция $g(z)$ обладает следующими свойствами:

$$g(z)=\frac{\partial}{\partial z}E_{\phi}^{-}(R,z), \quad z\in L_q \tag{32}$$

$$g(z)=0,\ z\in CL \tag{33}$$

$$\int_{L_q} g(\xi)\,d\xi=0,\quad q=1,...,m \tag{34}$$

и в силу условия сопряжения (27) и граничного условия (11) функция $h(z)$ обладает следующими свойствами:

$$h(z)=\frac{\varepsilon^{+}}{\varepsilon^{-}R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_{\phi}^{-}\right)(R,z),\quad z\in L_q \tag{35}$$

$$h(z)=0,\ z\in CL \tag{36}$$

Из системы дифференциальных уравнений (12-17) следует, что компонент $E_{\phi}(\rho,z)$ и $H_{\phi}(\rho,z)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца.

В «рабочей зоне» имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_{\phi}^{+}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_{\phi}^{+}\right)\right)+\left(k^{+}\right)^2E_{\phi}^{+}=0,\ \rho\in(0,R),\ z\in(-\infty,\infty), \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}H_{\phi}^{+}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_{\phi}^{+}\right)\right)+\left(k^{+}\right)^2H_{\phi}^{+}=0,\ \rho\in(0,R),\ z\in(-\infty,\infty) \tag{38}$$

где $k^{+}=\varepsilon^{+}\mu\omega^2$,

В «зоне расширений»:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_{\phi}^{-}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_{\phi}^{-}\right)\right)+\left(k_q^{-}\right)^2E_{\phi}^{-}=0,\ \rho\in(R,R_q),\ z\in(-\infty,\infty), \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}H_{\phi}^{-}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_{\phi}^{-}\right)\right)+\left(k_q^{-}\right)^2H_{\phi}^{-}=0,\ \rho\in(R,R_q),\ z\in(-\infty,\infty) \tag{40}$$

где $k_q^{-}=\varepsilon_q^{-}\mu\omega^2$

Предполагается, что среда имеет небольшие потери: проводимость среды $\sigma>0$, k_{δ}^{+} – соответствующее волновое число $k_{\delta}^{+}=k^{+}+i\delta$, $0<\delta<<k$. Компоненту E_{ϕ}^{+} электрического поля в «рабочей зоне» ищем в виде:

$$E_{\phi,\delta}^{+}(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}C_{\phi}^{+}(\lambda)\frac{(-i)I_1\left(\gamma_{\delta}^{+}\rho\right)}{\lambda I_1\left(\gamma_{\delta}^{+}R\right)}e^{i\lambda z}d\lambda \tag{41}$$

где $\gamma_{\delta}^{+}=\sqrt{\lambda^2-\left(k_{\delta}^{+}\right)^2}$

а $C_{\phi}^{+}(\lambda)$ - преобразование Фурье функции $g(z)$:

$$C_{\phi}^{+}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{L}g(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \tag{42}$$

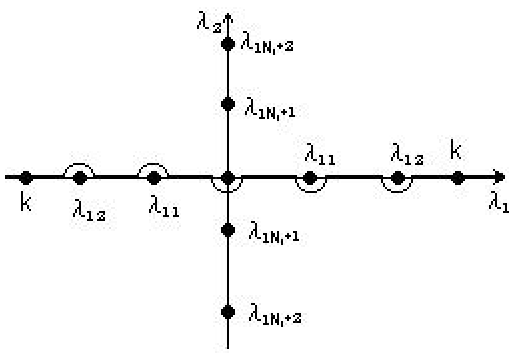

Рис. 2. Полюса подинтегральной функции в выражении (41) для $E^{+}_{\phi,\delta}$

Выражение (41) можно интерпретировать, как интеграл от функции комплексного переменного λ вдоль вещественной оси. Заметим, что при $\sigma = 0$ лишь конечная часть полюсов подынтегральной функции (41) расположена на вещественной оси (см. рис.2)

$$\lambda_{1,n} = \mathrm{sign}(n)\sqrt{\left(k^{+}\right)^2 - \left(\frac{j_{1,n}}{R}\right)^2},\ 0<|n|\le N_1;$$

остальные полюса лежат на мнимой оси

$$\lambda_{1,n} = i\,\mathrm{sign}(n)\sqrt{\left(\frac{j_{1,n}}{R}\right)^2 - \left(k^{+}\right)^2},\ |n|>N_1$$

Здесь $j_{1,n}$ - нули функции Бесселя 1-го порядка $J_1(x)$, N_1 определяется из неравенств $j_{1,N_1} \le k^{+}R$, $j_{1,N_1+1} > k^{+}R$.

Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы обойти точки $\lambda_{1,n}$, $0<|n|\le N_1$ и 0 по половинам окружностей малого радиуса δ и обозначим контур интегрирования $\Gamma^{(1)}_{\delta}$.

Значение интеграла (41) при этом не изменится, поскольку деформируем контур в области аналитичности интегрируемой функции.

$$E^{+}_{\phi}(\rho,z) = \lim_{\delta\downarrow 0} E^{+}_{\phi,\delta}(\rho,z) = -i\int_{\Gamma^{(1)}_{\delta}} C^{+}_{\phi}(\lambda)\frac{(-i)I_1(\gamma^{+}\rho)}{\lambda I_1(\gamma^{+}R)}e^{i\lambda z}d\lambda \tag{43}$$

где $\gamma^{+} = \sqrt{\lambda^2 - \left(k^{+}\right)^2}$

Убедимся, что так выбранный контур обеспечивает выполнение условий излучения. Применяя теорему о вычетах, для рассеянного поля в правом полубесконечном волноводе (при $b_m < z < \infty$) получим

$$E^{+}_{\phi}(\rho,z) = -\frac{1}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_{1,n}}{\lambda^2_{1,n}}\frac{J_1\left(j_{1,n}\dfrac{r}{R}\right)}{J_0\left(j_{1,n}\right)}e^{i\lambda_{1,n}z}\int_L g(\xi)e^{-i\lambda_{1,n}\xi}d\xi$$

Входящие в это выражения слагаемые при $n \le N_1$ представляют волны, распространяющиеся вне «зоны расширений» ($z > b_m$) в направлении возрастающих значений z. Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \to \infty$. Аналогично, для рассеянного поля в левом полубесконечном волноводе, вне «зоны расширений» (при $-\infty < z < a_1$) получим

$$E_\phi^+(\rho, z) = -\frac{1}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_{1,n}}{\lambda_{1,n}^2}\frac{J_1\left(j_{1,n}\frac{r}{R}\right)}{J_0\left(j_{1,n}\right)}e^{-i\lambda_{1,n}z}\int_L g(\xi)e^{i\lambda_{1,n}\xi}d\xi$$

При $n \le N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении убывающих значений z. Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \to -\infty$. Таким образом, условие излучения выполняется.

Из представления (43) следует, что

$$\frac{\partial E_\phi^+}{\partial \rho}(R, z) = -i\int_{\Gamma_\delta^{(1)}} C_\phi^+(\lambda)\frac{\gamma^+ I_1'\left(\gamma^+ R\right)}{\lambda I_1\left(\gamma^+ R\right)}e^{i\lambda z}d\lambda \tag{44}$$

Имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\frac{\gamma^+ I_1'\left(\gamma^+ R\right)}{\lambda I_1\left(\gamma^+ R\right)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda} + \underline{O}\left(\lambda^{-2}\right),\ \lambda \to \infty \tag{45}$$

подставляя (45) в (44) имеем:

$$\frac{\partial E_\phi^+}{\partial \rho}(R, z) = -i\int_{-\infty}^{\infty} C_\phi^+(\lambda)\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda + \frac{i}{2R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(\lambda)}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_L g(\xi)K_0^E(z-\xi)d\xi \tag{46}$$

где

$$K_0^E(y) = \int_0^{\infty}\left[\lambda - \frac{1}{2R} - \frac{\gamma^+ I_1'\left(\gamma^+ R\right)}{I_1\left(\gamma^+ R\right)}\right]\frac{\sin\lambda y}{\lambda}d\lambda + \frac{\pi i}{R^3}\sum_{n=1}^{N_1}\frac{j_{1n}^2}{\lambda_{1n}^2}\sin\left(\lambda_{1n}y\right) \tag{47}$$

Подынтегральная функция имеет особенности в точках $\lambda_{1,n}$, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Последнее слагаемое представляет собой результат интегрирования по дугам окружностей, обходящим точки $\lambda_{1,n}$.

Используя параметрическое представление преобразования Гильберта [4] и свойство (33) функции $g(z)$ для первого интеграла в (46) имеем:

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda = -\frac{1}{\pi}\int_L\frac{g(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{48}$$

Если $z \in L_q$, то для второго интеграла в (46) получаем:

$$\frac{i}{2R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(\lambda)}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda=-\frac{1}{2R}\int_{a_q}^{z}g(\xi)d\xi \tag{49}$$

Учитывая все преобразования приведенные выше, запишем (46) при $z\in L_q$ в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r}E_\phi^+(R,z)=-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2R}\int_{a_q}^{z}g(\xi)d\xi-$$
$$-\int_L g(\xi)K_0^E(z-\xi)d\xi\,,\qquad z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{50}$$

Получим аналогичное представление для компоненты H_ϕ^+ магнитного поля в «рабочей зоне». Предположим, что среда имеет небольшие потери, т.е. проводимость среды $\sigma>0$, k_δ^+ – соответствующее волновое число ($k_\delta^+=k^++i\delta$, $0<\delta<<k$). Тогда:

$$H_{\phi,\delta}^+(\rho,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_\phi^+(\lambda)I_1(\gamma_\delta^+r)}{\gamma_\delta^+I_0(\gamma_\delta^+R)}e^{i\lambda z}d\lambda \tag{51}$$

где $B_\phi^+(\lambda)$ - преобразование Фурье функции $h(z)$:

$$B_\phi^+(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_L h(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \tag{52}$$

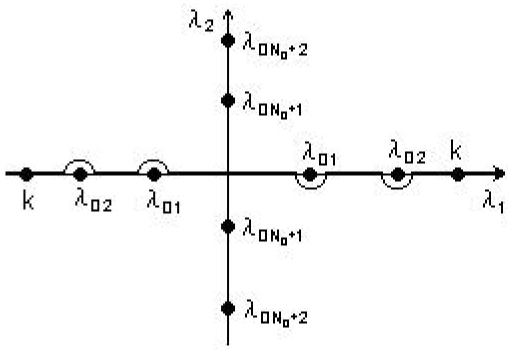

Рис.3 Полюса подинтегральной функции в выражении (51) для $H_{\phi,\delta}^+$.

Выражение (51) можно интерпретировать, как интеграл от функции комплексного переменного λ вдоль вещественной оси. Заметим, что при $\sigma=0$ лишь конечная часть полюсов подынтегральной функции (51) расположена на вещественной оси (см. рис.3)

$$\lambda_{0,n}=\mathrm{si}\,gn(n)\sqrt{\left(k^+\right)^2-\left(\frac{j_{0,n}}{R}\right)^2},\ 0<|n|\le N_0;$$

остальные полюса лежат на мнимой оси

$$\lambda_{0,n} = i\,\mathrm{si}\,gn(n)\sqrt{\left(\frac{j_{0,n}}{R}\right)^2 - \left(k^+\right)^2},\ |n| > N_0$$

Здесь $j_{0,n}$ - нули функции Бесселя 0-го порядка $J_0(x)$, N_0 определяется из неравенств $j_{0,N_0} \le k^+ R$, $j_{0,N_0+1} > k^+ R$.

Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы обойти точки $\lambda_{0,n}$, $0 < |n| \le N_0$ и 0 по половинам окружностей малого радиуса δ и обозначим контур интегрирования $\Gamma_\delta^{(0)}$.

Значение интеграла (51) при этом не изменится, поскольку деформируем контур в области аналитичности интегрируемой функции.

$$H_\phi^+(\rho,z) = \lim_{\delta\downarrow 0} H_{\phi,\delta}^+(\rho,z) = \int_{\Gamma_\delta^{(0)}} \frac{B_\phi^+(\lambda) I_1(\gamma^+ r)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \tag{53}$$

Убедимся, что так выбранный контур обеспечивает выполнение условий излучения. Применяя теорему о вычетах, для рассеянного поля в правом полубесконечном волноводе (при $b_m < z < \infty$) получим:

$$H_\phi^+(\rho,z) = \frac{i}{R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0,n}} \frac{J_1\left(j_{0,n}\frac{r}{R}\right)}{J_1(j_{0,n})} e^{i\lambda_{0,n} z} \int_L h(\xi) e^{-i\lambda_{0,n}\xi} d\xi$$

Входящие в это выражение слагаемые при $n \le N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении возрастающих значений z. Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \to \infty$.

Аналогично для рассеянного поля в левом полубесконечном волноводе (при $-\infty < z < a_1$) получим

$$H_\phi^+(\rho,z) = \frac{i}{R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0,n}} \frac{J_1\left(j_{0,n}\frac{r}{R}\right)}{J_1(j_{0,n})} e^{-i\lambda_{0,n} z} \int_L h(\xi) e^{i\lambda_{0,n}\xi} d\xi$$

При $n \le N_1$ представляют волны вне «зоны расширений», распространяющиеся в направлении убывающих значений z. Остальные слагаемые экспоненциально убывают при $z \to -\infty$. Таким образом, условие излучения выполняется.

Из представления (53) следует, что

$$\frac{\partial H_\phi^+}{\partial \rho}(R,z) = i \int_{\Gamma_\delta^{(0)}} B_\phi^+(\lambda) \frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \tag{54}$$

Имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R}\frac{1}{\gamma^+}\frac{|\lambda|}{\lambda} + \underline{O}(\lambda^{-2}),\ \lambda \to \infty \tag{55}$$

И тогда (54) имеет вид:

$$\frac{\partial H_\phi^+}{\partial\rho}(R,z)=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\phi^+(\lambda)\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda-\frac{i}{2R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_\phi^+(\lambda)}{\gamma}\frac{|\lambda|}{\lambda}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_L h(\xi)K_0^H(z-\xi)d\xi \tag{56}$$

где

$$K_0^H(y)=\int\limits_0^{\infty}\left[\lambda-\frac{1}{2R\lambda}-\frac{\lambda I_1(\gamma^+R)}{\gamma^+I_0(\gamma^+R)}\right]\sin\lambda y d\lambda+\frac{\pi i}{R}\sum_{n=1}^{N_0}\sin(\lambda_{0n}y) \tag{57}$$

Подынтегральная функция имеет особенности в точках $\lambda_{0,n}$, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Последнее слагаемое представляет собой результат интегрирования по дугам окружностей, обходящим точки $\lambda_{0,n}$.

Используя параметрическое представление оператора Гильберта и свойство (36) функции $h(z)$ для первого интеграла в (56) имеем:

$$i\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\phi^+(\lambda)\frac{|\lambda|}{\lambda}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{58}$$

А для второго интеграла в (56) получим:

$$-\frac{i}{2R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{B_\phi^+(\lambda)}{\gamma}\frac{|\lambda|}{\lambda}e^{i\lambda z}d\lambda=\frac{1}{4R}\int\limits_L h(\xi)\frac{|z-\xi|}{z-\xi}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_L h(\xi)d\xi\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\gamma}-1\right)\frac{\sin\lambda(z-\xi)}{\lambda}d\lambda \tag{59}$$

Поэтому, если $z\in L_q$, то (56) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}H_\phi^+(R,z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2R}\int\limits_{a_q}^{z}h(\xi)d\xi+\frac{1}{4R}\sum_{p=1}^{q-1}\int\limits_{L_p}h(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{4R}\sum_{p=q}^{m}\int\limits_{L_p}h(\xi)d\xi+\frac{1}{\pi}\int\limits_L h(\xi)K_0^H(z-\xi)d\xi,\quad z\in L_q,\ q=1,\ldots,m \tag{60}$$

Переходим к представлению полей в «зонах расширений».

Компоненту $E_\phi^{-(q)}(\rho,z)$ электрического поля в расширениях ищем в виде:

$$E_\phi^{-(q)}(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{(q)E}(\rho)C_{\phi,n}^{-(q)}\sin\lambda_n^{(q)}(z-a_q) \tag{61}$$

где $V_n^{(q)E}(\rho)=\dfrac{1}{\lambda_n^{(q)}}\dfrac{K_1(\gamma_n^{-(q)}R_q)I_1(\gamma_n^{-(q)}\rho)-I_1(\gamma_n^{-(q)}R_q)K_1(\gamma_n^{-(q)}\rho)}{K_1(\gamma_n^{-(q)}R_q)I_1(\gamma_n^{-(q)}R)-I_1(\gamma_n^{-(q)}R_q)K_1(\gamma_n^{-(q)}R)}$,

$$\gamma_n^{-(q)}=\gamma^-\left(\lambda_n^{(q)}\right)=\sqrt{\left(\lambda_n^{(q)}\right)^2-\left(k_q^-\right)^2}$$

Используя асимптотическую оценку

$$\frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) = -1 - \frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}} + \underline{O}\left(n^{-2}\right),\ n \to \infty \tag{62}$$

преобразуем (61) с учетом (62) к виду:

$$\frac{\partial E_\phi^{-(q)}}{\partial \rho}(R,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi,n}^{-(q)} \frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi,n}^{-(q)} \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) - \frac{1}{2R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi,n}^{-(q)} \left[\frac{dV_n^{(q)E}}{d\rho}(R) + 1 + \frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right] \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) \tag{63}$$

Известно, что интегральный оператор

$$\left(H_q W\right)(z) = \frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z - a_q\right)\int_{a_q}^{b_q} \frac{W(\xi)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z - a_q\right) - \cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi - a_q\right)} d\xi \tag{64}$$

действует на базисные элементы следующим образом [3]:

$H_q : \cos\lambda_n^{(q)}\left(\xi - a_q\right) \to -\sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right),\ \xi, z \in L_q,\ n = 1,2,...$

Используя свойство (33) функции $g(z)$, получаем выражение для первого ряда в (63)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi,n}^{-(q)} \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) =$$

$$= \frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z - a_q\right)\int_{a_q}^{b_q} \frac{g(\xi)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z - a_q\right) - \cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi - a_q\right)} d\xi \tag{65}$$

Так как $E_\phi^{-(q)}(R,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) = \int_{a_q}^{z} g(\xi)\, d\xi$, то для второго интеграла в (63) получаем

$$-\frac{1}{2R}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin\lambda_n^{(q)}\left(z - a_q\right) = -\frac{1}{2R}\int_{a_q}^{z} g(\xi)\, d\xi \tag{66}$$

Для коэффициентов Фурье функции $\frac{\partial E_\phi^{-(q)}}{\partial z}(R,z)$ имеем:

$$C_{\phi,n}^{-(q)} = \frac{2}{l_q}\int_{a_q}^{b_q} g(\xi)\cos\lambda_n^{(q)}\left(\xi - a_q\right) d\xi \tag{67}$$

Окончательно для (63) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r}E_{\phi}^{-(q)}\left(R,z\right)=-\frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)\int_{a_q}^{b_q}\frac{g\left(\xi\right)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)-\cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi-a_q\right)}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2R}\int_{a_q}^{z}g\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\frac{2}{l_q}\int_{a_q}^{b_q}g\left(\xi\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)E}\left(R\right)+1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right]\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)\cos\lambda_n^{(q)}\left(\xi-a_q\right) \quad (68)$$

Компоненту $H_{\phi}^{-(q)}\left(\rho,z\right)$ магнитного поля в расширениях ищем в виде:

$$H_{\phi}^{-(q)}\left(\rho,\phi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{(q)H}\left(\rho\right)B_{\phi,n}^{-(q)}\cos\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right) \quad (69)$$

где $V_n^{(q)H}\left(\rho\right)=\frac{1}{\gamma_n^{-(q)}}\frac{K_0\left(\gamma_n^{-(q)}R_q\right)I_1\left(\gamma_n^{-(q)}\rho\right)-I_0\left(\gamma_n^{-(q)}R_q\right)K_1\left(\gamma_n^{-(q)}\rho\right)}{K_0\left(\gamma_n^{-(q)}R_q\right)I_0\left(\gamma_n^{-(q)}R\right)-I_0\left(\gamma_n^{-(q)}R_q\right)K_0\left(\gamma_n^{-(q)}R\right)}$

Используя асимптотическое выражение

$$-\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)H}\left(R\right)=1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}+\underline{O}\left(n^{-2}\right),\ n\to\infty \quad (70)$$

получим

$$\frac{\partial H_{\phi}^{-(q)}}{\partial z}\left(R,z\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}B_{\phi,n}^{-(q)}\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)H}\left(R\right)\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_{\phi,n}^{-(q)}\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)+\frac{1}{2R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}}\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}B_{\phi,n}^{-(q)}\left[\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)H}\left(R\right)+1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right]\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right) \quad (71)$$

Используя свойства интегрального оператора $\left(H_qW\right)\left(z\right)$ (64) и свойство (36) функции $h\left(z\right)$ для первого ряда в (69) имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty}B_{\phi,n}^{-(q)}\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)=$$

$$=\frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)\int_{a_q}^{b_q}\frac{h\left(\xi\right)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)-\cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi-a_q\right)}d\xi \quad (72)$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=sign\left(\theta\right)\frac{1}{2}\left(\pi-\left|\theta\right|\right),\ \ 0<\left|\theta\right|<2\pi$, то

$$\sum_{n=}^{\infty}\frac{B_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}}\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)=\frac{2}{l_q}\int_{a_q}^{b_q}h\left(\xi\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)\cos\lambda_n^{(q)}\left(\xi-a_q\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{l_q}\int_{a_q}^{b_q} h(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\left(\sin\lambda_n^{(q)}(z-\xi)+\sin\lambda_n^{(q)}(z+\xi-2a_q)\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2l_q}\int_{a_q}^{b_q} h(\xi)\left[l_q-z-\xi+2a_q+sign(z-\xi)\left(l_q-|z-\xi|\right)\right]d\xi=$$

$$=\int_{a_q}^{z} h(\xi)\,d\xi-\frac{z-a_q}{l_q}\int_{a_q}^{b_q} h(\xi)\,d\xi \tag{73}$$

Используя выражения для коэффициентов Фурье функции $\frac{\partial H_\phi^{-(q)}}{\partial z}(R,z)$ и свойство (36) функции $h(\xi)$, окончательно, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z}H_\phi^{-(q)}(R,z)=-\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}(z-a_q)\int_{a_q}^{b_q}\frac{h(\xi)}{\cos\frac{\pi}{l_q}(z-a_q)-\cos\frac{\pi}{l_q}(\xi-a_q)}d\xi+$$

$$+\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\frac{1}{2R}\int_{a_q}^{z}h(\xi)\,d\xi-\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\frac{1}{2R}\frac{z-a_q}{l_q}\int_{a_q}^{b_q}h(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\frac{2}{l_q}\int_{a_q}^{b_q}h(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)H}(R)+1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right]\sin\lambda_n^{(q)}(z-a_q)\cos\lambda_n^{(q)}(\xi-a_q) \tag{74}$$

Перейдем к выводу сингулярных интегральных уравнений.

Условие сопряжения (19) эквивалентно выражениям:

$$\frac{\partial}{\partial z}H_\phi^+(R,z)+\frac{\partial}{\partial z}H_{0\phi}(R,z)=\frac{\partial}{\partial z}H_\phi^-(R,z),\quad z\in L_q,\ q=1,...,m, \tag{75}$$

$$\int_{a_q}^{b_q}H_\phi^+(R,z)\,dz+\int_{a_q}^{b_q}H_{0\phi}(R,z)\,dz=\int_{a_q}^{b_q}H_\phi^-(R,z)\,dz,\ q=1,...,m. \tag{76}$$

Подставляя выражения для компонент магнитного поля (60), (74) в условие (75-76) и сделав представление неизвестной функции:

$$h(z)=\begin{cases}0, & z\in CL\\ \dfrac{w_q(z)}{\sqrt{(z-a_q)(b_q-z)}}, & z\in L_q\end{cases}$$

где $w_q(z),\ z\in L_q$ – гладкая функция.

имеем СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_q}^{b_q}\frac{w_q(\xi)}{\xi-z}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}\frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)\int\limits_{a_q}^{b_q}\frac{w_q\left(\xi\right)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z-a_q\right)-\cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi-a_q\right)}\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi-a_q\right)\left(b_q-\xi\right)}}+$$

$$+\left(1-\frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}\right)\frac{1}{2R}\int\limits_{a_q}^{z}w\left(\xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi-a_q\right)\left(b_q-\xi\right)}}+$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_p}^{b_p}K_{qp}^{H}\left(z,\xi\right)w_p\left(\xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi-a_p\right)\left(b_p-\xi\right)}}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial z}H_{0\phi}\left(R,z\right)\qquad z\in L_q,\ q=1,\ldots,m \tag{77}$$

где

$$K_{qp}^{H}\left(z,\xi\right)=\frac{1}{\xi-z}+K_0^{H}\left(z-\xi\right)+\frac{\pi}{4R},\quad p<q$$

$$K_{qp}^{H}\left(z,\xi\right)=\frac{1}{\xi-z}+K_0^{H}\left(z-\xi\right)-\frac{\pi}{4R},\quad p>q$$

$$K_{qq}^{H}\left(z,\xi\right)=K_0^{H}\left(z-\xi\right)+\frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}\frac{\pi}{2R}\frac{z-a_q}{l_q}-\frac{\pi}{4R}+$$

$$+\frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}\frac{2\pi}{l_q}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^{(q)}V_n^{(q)}\left(R\right)+1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right]\sin\lambda_n^{(q)}\left(z-a_q\right)\cos\lambda_n^{(q)}\left(\xi-a_q\right)$$

с дополнительным условием

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_p}^{b_p}F_q\left(\xi\right)w_p\left(\xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi-a_p\right)\left(b_p-\xi\right)}}+$$

$$+V_0^{(q)H}\left(R\right)\int\limits_{a_q}^{b_q}w_q\left(\xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\xi-a_q\right)\left(b_q-\xi\right)}}=\int\limits_{a_q}^{b_q}H_{0\phi}\left(R,\xi\right)d\xi\qquad q=1,\ldots,m \tag{78}$$

где

$$F_q^{H}\left(\xi\right)=\int\limits_0^{\infty}\frac{I_1\left(\gamma^+R\right)}{\gamma^+I_0\left(\gamma^+R\right)}\frac{\sin\lambda\left(a_q-\xi\right)-\sin\lambda\left(b_q-\xi\right)}{\lambda}d\lambda+$$

$$+\frac{\pi i}{R}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\sin\lambda_{0n}^{+}\left(a_q-\xi\right)-\sin\lambda_{0n}^{+}\left(b_q-\xi\right)}{\left(\lambda_{0n}^{+}\right)^2} \tag{79}$$

N_0 определяется из неравенства $j_{0,N_0}\le kR,\ j_{0,N_0+1}>kR$, $j_{0,n}$ - нули функции Бесселя нулевого порядка, и $\lambda_{0n}^{+}=\sqrt{\left(k^+\right)^2-\left(\frac{j_{0n}}{R}\right)^2}$, $0<n<N_0$.

Ищем функцию $g\left(z\right)$ в виде:

$$g(z)=\begin{cases}0, & z\in CL\\ \dfrac{v_q(z)}{\sqrt{(z-a_q)(b_q-z)}}, & z\in L_q\end{cases}$$

где $v_q(z),\ z\in L_q$ – гладкая функция.

Подставляя в условие сопряжения (29) представления для функций компонент электрического поля (50), (68) окончательно получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_q}^{b_q}\frac{v_q(\xi)}{\xi-z}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}+$$

$$+\frac{1}{l_q}\sin\frac{\pi}{l_q}(z-a_q)\int_{a_q}^{b_q}\frac{v_q(\xi)}{\cos\frac{\pi}{l_q}(z-a_q)-\cos\frac{\pi}{l_q}(\xi-a_q)}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{a_q}^{b_q}K_{qp}^{E}(z,\xi)v_p(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}=$$

$$=E_{0\phi}(R,z)+H_{0\phi}(R,z)+\frac{\partial}{\partial\rho}E_{0\phi}(R,z)\qquad z\in L_q,\ q=1,...,m \tag{80}$$

$$K_{qp}^{E}(z,\xi)=\frac{1}{\xi-z}+K_0^{E}(z-\xi),\quad q\neq p$$

$$K_{qq}^{E}(z,\xi)=K_0^{E}(z-\xi)+$$

$$+\frac{2\pi}{l_q}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{dV_n^{(q)}}{d\rho}(R)+1+\frac{1}{2R}\frac{1}{\lambda_n^{(q)}}\right]\sin\lambda_n^{(q)}(z-a_q)\cos\lambda_n^{(q)}(\xi-a_q)$$

и дополнительные условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_q}^{b_q}v_q\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}}=0,\quad q=1,...,m. \tag{81}$$

4.Дискретная математическая модель.

Дискретизация проводится по методу дискретных особенностей [5]. Приближенные решения задачи ищем в виде интерполяционных полиномов Лагранжа степени n_q-1 с узлами $t_k^{(1,n_q)}$, где $t_k^{(1,n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=1,...,n$.

Рассматривая сингулярные уравнения (77), (80) в точках $t_j^{(2,n_q)},\ j=1,...,n_q-1$ и применяя к интегралам квадратурные формулы интерполяционного типа получаем систему из $n_1+...+n_q$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с таким же числом неизвестных: $v_q^{(n_q)}\left(t_k^{(1,n_q)}\right),\ k=1,...,n_q,\ q=1,...,m$.

В соответствии с выше сказанным, приближенные значения решений системы СИУ с дополнительными условиями (78), (81) $v_q^{(n_q)}(\xi)$ в точках $\xi_{q,k}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_k^{(1,n_q)} + \frac{b_q + a_q}{2}$, $k = 1,...,n_q$, $q = 1,...,m$ ищем из СЛАУ:

$$\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q}\left[\frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} + \frac{\pi}{l_q}\frac{\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z_{q,j}^{(n_q)} - a_q\right)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z_{q,j}^{(n_q)} - a_q\right) - \cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)} - a_q\right)}\right] w_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) +$$

$$+\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^{E1}\left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)}\right) w_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) +$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{m}\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^{E}\left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{n_p}\right) w_p^{(n_p)}\left(\xi_{p,k}^{(n_p)}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi}\left(R, z_{q,j}^{(n_q)}\right),\ j = 1,...,n_q,\ q = 1,...,m \qquad (81)$$

С дополнительным условием:

$$\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q} v_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) = 0,\ q = 1,...,m \qquad (82)$$

где $z_{q,j}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_j^{(2,n_q)} + \frac{b_q + a_q}{2}$, $j = 1,...,n_q - 1$, $q = 1,...,m$

И

$$\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q}\left[\frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\frac{\pi}{l_q}\frac{\sin\frac{\pi}{l_q}\left(z_{q,j}^{(n_q)} - a_q\right)}{\cos\frac{\pi}{l_q}\left(z_{q,j}^{(n_q)} - a_q\right) - \cos\frac{\pi}{l_q}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)} - a_q\right)}\right] v_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) +$$

$$\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^{H}\left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)}\right) v_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) +$$

$$+\left(1 - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+}\right)\frac{1}{2R}\frac{\pi}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q}\left[\pi - \arccos z_{q,j}^{(n_q)} - \right.$$

$$\left. -2\sum_{s=1}^{n_q-1}\frac{T_s\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right)}{s} U_{s-1}\left(z_{q,j}^{(n_q)}\right)\sqrt{1 - z_{q,j}^{(n_q)}}\right] v_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right) +$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{m}\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^{H}\left(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{n_p}\right) v_p^{(n_p)}\left(\xi_{p,k}^{(n_p)}\right) =$$

$$=H_{0\phi}\left(R,z_{q,j}^{(n_q)}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho}E_{0\phi}\left(R,z_{q,j}^{(n_q)}\right),\ j=1,...,n_q,\ q=1,...,m \tag{83}$$

С дополнительным условием:

$$\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q}\left[F_q^H\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right)+\pi V_0^{(q)H}(R)\right]v_q^{(n_q)}\left(\xi_{q,k}^{(n_q)}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{m}\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_p}F_q^H\left(\xi_{p,k}^{(n_p)}\right)v_p^{(n_p)}\left(\xi_{p,k}^{(n_p)}\right)=\int_{a_q}^{b_q}H_{0\phi}(R,\xi)d\xi,\ q=1,...,m \tag{84}$$

Наиболее трудоемкими являются вычисления интегралов входящих в ядра $K_0^E(y)$ (47) и $K_0^H(y)$ (57).

Легко видеть, что при $\varepsilon_q^-=const\to\varepsilon^+,\ q=1,...,m$ мы получаем в пределе из системы (83) соответствующую систему в статье [1] для H-волны.

Результаты численного эксперимента на базе математической модели будут опубликованы.

Автор благодарит проф. Ганделя Ю. В. за постановку задачи и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Стешенко С.А Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции. Электромагнитные волны и электронные системы, №6, т.7, 2002 с.12-31.
2. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач: Пер. с англ./ Под ред. В.И. Вольмана. – М.:Радио и связь, 1981. –312 с.
3. Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. Электромагнитные явления, Том 1, №2, 1998.- С. 220-232.
4. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Уч. пособие, ч.1. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков-Херсон, 2000.–92 с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.–М., «Янус», 1995.–520 с.