Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517.958
№ 733, 2006, с.134-140

Решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности в полубесконечной области с неоднородными свойствами среды

В. Д. Душкин
Военный институт внутренних войск МВД Украины, Украина

The method of heat conductivity equation solution is considered in the domain where the coefficient of heat diffusivity is non-constant. The solution of initial third boundary-value problem was reduced to the solution of the Volterra integral equation. This equation can be solved by the of consecutive iterations method.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Многие задачи современной техники приводят к необходимости исследования нестационарных температурных полей в неоднородных средах. Поэтому в настоящее время по-прежнему остаётся актуальным вопрос численного моделирования нестационарных температурных полей в таких средах.

2. Истоки исследования

В работах [3,4] был предложен способ сведения первой краевой задачи к решению интегральных уравнений типа Вольтера, для численного решения которых применим метод последовательных итераций. В данной работе предлагается метод решения краевой задачи с условиями третьего рода на границе исследуемой области.

3. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + h \cdot u(l,t) = 0 \tag{3}$$

где $\varphi(x) \in C^{1,\alpha}(-\infty, l]$, и $a(x) = a_i,\, x \in \Omega_i,\, \Omega_2 = (-\infty, 0),\quad \Omega_1 = (0, l)$.

На границах раздела областей выполняются условия сопряжения:

$$u(-0,t) = u\ (+0,t) \tag{4}$$

$$k_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(+0,t) = k_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(-0,t) \tag{5}$$

4. Сведение исходной задачи к интегральному уравнению типа Вольтерра.

Для удобства дальнейших преобразований введем функцию $\nu(t)$ следующим образом:

$$\nu\ (t) = k_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(-0,t) = \quad k_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(+0,t)\,. \tag{6}$$

Решение задачи в области $\Omega_2 = (-\infty, 0)$, удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2{}_2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-0,t) = \frac{\nu\ (t)}{k_2} \tag{9}$$

Где $\nu(t)$- функция, которая подлежит определению.

Решение задачи в области Ω_2 ищем в виде:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi) G_2(x,\xi,t)\, d\xi + \frac{a_2}{k_2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_2^2\cdot(t-\tau)}} \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau, \tag{10}$$

где

$$G_2(x,\xi,t) = \frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2 t}} \right\}, \tag{11}$$

функция, которая обладает свойством:

$$\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\ \Big|_{x=0} = 0 \tag{12}$$

Решение задачи в области $\Omega_1 = (0, l)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2{}_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + h \cdot u(l,t) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+0,t) = \frac{\nu\ (t)}{k_1} \tag{16}$$

Где $\nu(t)$- функция, которая подлежит определению.

Решение задачи в области Ω_1 представимо в виде:

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(\xi)\, G_1(x,\xi,t)\, d\xi - \frac{a_1^2}{k_1} \cdot \int_0^t G_1(x,0,t-\tau)\, \nu\ (\tau) d\tau \tag{17}$$

где $G_1(x,\xi,t)$ - функция Грина в области Ω_1, которая обладает свойствами:

$$\left.\frac{\partial G_1}{\partial \xi}+hG_1\right|_{\xi=l}=\left.\frac{\partial G_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=0 \tag{18}$$

и имеет вид:

$$G_1(x,\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty} exp\left(-a_1^2\cdot\lambda_n\cdot t\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot\xi\right)}{\left\|x_n\right\|^2}, \tag{19}$$

где $x_n=\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right)$ решения задачи Штурма-Лиувилля:

$$x''+\lambda x=0 \tag{20}$$

$$x'(0)=0 \quad x'(l)+h\cdot x(l)=0 \tag{21}$$

и

$$\left\|x_n\right\|^2=\int_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot\xi\right)d\xi=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\left(\lambda+h^2\right)}=\frac{l}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{22}$$

Величины λ_n являются решениями уравнения:

$$ctg\left(\sqrt{\lambda_n}\cdot l\right)=\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} \tag{23}$$

и имеют следующее асимптотическое представление:

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{l}+\frac{h}{\pi n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\quad n\to\infty \tag{24}$$

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{2h}{l}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty\,. \tag{25}$$

Из условий непрерывности поля при $x=0$, получаем интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)G_2(0,\xi,t)\,d\xi+\frac{a_2}{k_2\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^t\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=$$

$$=\int_0^l\varphi(\xi)G_1(0,\xi,t)\,d\xi-\frac{a_1^2}{k_1}\cdot\int_0^t G_1(0,0,t-\tau)\nu(\tau)d\tau\,. \tag{26}$$

Уравнение (26) представим в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a_2}{k_2}+\frac{a_1}{k_1}\right)\cdot\int_0^t\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\int_0^t\left[\frac{a_1^2\cdot K_0(t-\tau)}{k_1}\right]\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\Phi(t), \tag{27}$$

где

$$\Phi(t)=\int_0^l\varphi(\xi)\cdot G_1(0,\xi,t)\,d\xi-\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\cdot G_2(0,\xi,t)\,d\xi \tag{28}$$

и $K_0(t-\tau)=G_1(0,0,t-\tau)-\dfrac{1}{a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}$, $\quad$ (29)

Введем в рассмотрение функцию $G\,(x,\xi,t)$, которая является функцией Грина задачи Неймана на отрезке $[0,l]$ и имеет представление:

$$G\;(x,\xi,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}exp\left(-a_1^2\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot t\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}\cdot\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi\cdot t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{e^{-\frac{(x-\xi+2n\cdot l)^2}{4a_i^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi-2x_i-2nl)^2}{4a_0^2t}}\right\}\qquad(30)$$

И обладает свойством:

$$G\;(0,0,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}exp\left(-a_1^2\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cdot t\right)=\frac{1}{a_1\sqrt{\pi\cdot t}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(n\cdot l)^2}{a_1^2t}}\right)\qquad(31)$$

Используя представления (19) (30) и свойства (25) собственных значений λ_n получим следующее равенство:

$$G_1(0,0,t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-a_1^2\cdot\lambda_n\cdot(t-\tau)}}{\left\|x_n\right\|^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-a_1^2\cdot\lambda_n\cdot(t-\tau)}}{\left\|x_n\right\|^2}-\frac{2}{l}\cdot e^{-a_1^2\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{2h}{l}\right]\cdot(t-\tau)}\right]+$$

$$+\left[\frac{e^{-a_1^2\cdot\lambda_0\cdot(t-\tau)}}{\left\|x_0\right\|^2}-\frac{e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}\cdot(t-\tau)}}{l}\right]+\frac{e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}\cdot(t-\tau)}}{a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2(t-\tau)}}\right]$$

(32)

Несложно показать, что:

$$\frac{e^{-a_1^2\cdot\lambda_n\cdot(t-\tau)}}{\left\|x_n\right\|^2}-\frac{2}{l}\cdot e^{-a_1^2\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{2h}{l}\right]\cdot(t-\tau)}=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty\qquad(33)$$

а из формулы (30) следует:

$$\frac{e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}\cdot(t-\tau)}}{a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2(t-\tau)}}\right]=e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}\cdot(t-\tau)}\cdot G(0,0,t-\tau)\,.\qquad(34)$$

Из формул (32-34) следует ограниченность функции $K_0(t-\tau)$ при $t\in[0,\infty)$.

Умножим левую и правую часть уравнения (27) на $(z-t)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по t от 0 до z. После замены порядка интегрирования и несложных преобразований получаем:

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{a_2}{k_2}+\frac{a_1}{k_1}\right)\int_0^z \nu\ (\tau)\,d\tau+\int_0^z F\ (z-\tau)\nu\ (\tau)d\tau=\int_0^z \frac{\Phi(t)}{\sqrt{z-t}}dt \qquad (35)$$

где

$$F(z-\tau)=\int_0^1 \frac{K_0[x\cdot(z-\tau)]\sqrt{z-\tau}}{\sqrt{(1-x)}}dx \quad F(0)=0 \qquad (36)$$

После дифференцирования интегрального уравнения (35) по переменной z получаем:

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{a_2}{k_2}+\frac{a_1}{k_1}\right)\cdot\nu\ (z)+\int_0^z \frac{\partial}{\partial z}F\ (z-\tau)\nu\ (\tau)d\tau=\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\Phi(t)}{\sqrt{z-t}}dt \qquad (37)$$

Где:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(z-\tau)=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^1 \frac{K_0[x\cdot(z-\tau)]\sqrt{z-\tau}}{\sqrt{(1-x)}}dx=$$

$$=\int_0^1\left\{\sqrt{z-\tau}\,\frac{\partial}{\partial z}G_1[0{,}0,x\cdot(z-\tau)]+G_1[0{,}0,x\cdot(z-\tau)]\frac{1}{2\sqrt{z-\tau}}\right\}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} \qquad (38)$$

Исследуем функцию $\sqrt{z-\tau}\,\frac{\partial}{\partial z}G_1[0{,}0,x\cdot(z-\tau)]$, которая входит в ядро оператора (38):

$$\sqrt{z-\tau}\,\frac{\partial}{\partial z}G_1[0{,}0,x\cdot(z-\tau)]=-xa_1^2\sqrt{z-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\|x_n\|^2}e^{-\lambda a_1^2 x(z-\tau)}= \qquad (39)$$

$$=K_1[x\cdot(z-\tau)]+\sqrt{z-\tau}\cdot e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}x\cdot(z-\tau)}\cdot\frac{\partial G(0{,}0,x\cdot(z-\tau))}{\partial z} \qquad (40)$$

где:

$$K_1[x\cdot(z-\tau)]=-xa_1^2\sqrt{z-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\|x_n\|^2}e^{-\lambda a_1^2 x(z-\tau)}-\frac{2}{l}\cdot\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-a_1^2\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{2h}{l}\right]\cdot x(z-\tau)}\right) \qquad (41)$$

Несложно показать что ряд, который стоит в правой части формулы (41) сходится абсолютно и следовательно функция $K_1[x\cdot(z-\tau)]$ является ограниченной.

Преобразуем выражение:

$$\frac{\partial G(0,0,x(z-\tau))}{\partial z}=-\frac{2}{l}xa_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-a_1^2\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{2h}{l}\right]\cdot x(z-\tau)}=\frac{-1}{2a_1\sqrt{\pi x}\cdot[z-\tau]^{3/2}}\left[1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2x(z-\tau)}}\right]+$$

$$+\frac{1}{a_1\sqrt{\pi x(z-\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{(nl)^2}{a_1^2x}\right)e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2x(z-\tau)}}\cdot\left(-\frac{1}{(z-\tau)^2}\right). \qquad (42)$$

Для упрощения последующих записей введем обозначение:

$$K_2[x\cdot(z-\tau)]=\sqrt{z-\tau}\cdot e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}x\cdot(z-\tau)}\cdot\frac{\partial G(0,0,x\cdot(z-\tau))}{\partial z}+e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}x\cdot(z-\tau)}\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi x}\cdot[z-\tau]}$$

(43)

Из (43) следует, что:

$$K_2[x\cdot(z-\tau)]=\frac{e^{-a_1^2\frac{2h}{l}x(z-\tau)}}{a_1\sqrt{\pi x}\cdot[z-\tau]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-(z-\tau)+2\frac{(nl)^2}{a_1^2x}\right]e^{-\frac{(nl)^2}{a_1^2x(z-\tau)}}.$$

(44)

где функция, которая входит в правую часть равенства (45) является ограниченной функцией своих аргументов:

Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial z}F(z-\tau)=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^1\left\{\frac{K_0[x\cdot(z-\tau)]}{2\sqrt{z-\tau}}+K_1[x\cdot(z-\tau)]+K_2[x\cdot(z-\tau)]+\frac{\left(1-e^{-a_1^2\cdot\frac{2h}{l}x\cdot(z-\tau)}\right)}{2a_1\sqrt{\pi x}\cdot[z-\tau]}\right\}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$$

(45)

Из ограниченности функций $K_i[t],\quad i=0,1,2$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z}F(z-\tau)=\frac{Q(z-\tau)}{\sqrt{z-\tau}}, \qquad (46)$$

где $Q(z-\tau)$ - ограниченная функция своих аргументов.

После преобразования правой части уравнения (37) и используя (47) получаем следующее представление этого интегрального уравнения типа Вольтера

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{a_2}{k_2}+\frac{a_1}{k_1}\right)\cdot\int_0^z\nu\ (\tau)\,d\tau+\int_0^z\frac{Q(z-\tau)}{\sqrt{z-\tau}}\nu\ (\tau)d\tau=2\int_0^z\Phi_i'(t)\sqrt{z-t}\,dt,$$

(47)

6. Выводы и направления дальнейших исследований

Полученное интегральное уравнение типа Вольтерра может быть решено методом последовательных приближений. В качестве направления дальнейших исследований предполагается рассмотрение задачи, в которой коэффициент температуропроводности в области $\Omega_1 = (0, l)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1987.-328 с.
2. Лыков А.В. Тепломассообмен.- М.: Энергия, 1972.
3. В.Д. Душкин, А.П. Созник Нестационарная задача теплопередачи через толстую стенку.- Проблемы пожарной безопасности. Сб. науч. тр. АГЗ Украины. Спец. Вып.-Харьков: Фолио, 2004.- с.61-65.
4. В.Д. Душкин Решение уравнения теплопроводности в полубесконечной области с неоднородными свойствами среды// Праці XII Міжнародного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2005). Харків-Херсон. 2005. с.122-126.